

近代 物理实验

主 编 \ 郑勇林 葛泽玲 李泽涛

JINDAI WULI SHIYAN



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

近代物理实验

主 编 郑勇林 葛泽玲 李泽涛
副主编 孙婷雅 杨 敏 周晓兵
参 编 党随虎 何晓宇 李春霞 周 红

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

近代物理实验 / 郑勇林, 葛泽玲, 李泽涛主编. —
成都: 西南交通大学出版社, 2011.5
ISBN 978-7-5643-1179-7

I. ①近… II. ①郑… ②葛… ③李… III. ①物理学
—实验 IV. ①041-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 081388 号

近代物理实验

主编 郑勇林 葛泽玲 李泽涛

*

责任编辑 牛 君

特邀编辑 罗在伟

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm×260 mm 印张: 15.375

字数: 381 千字

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5643-1179-7

定价: 28.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

物理实验是物理学发展的基础，自然科学研究的根本，又是检验物理理论的重要标准。回顾物理学的发展史，可以看出，重要的物理实验往往推动着物理学及其他学科的蓬勃发展，特别是实验技术的进步对物理学发展产生了举足轻重的影响。近 20 年来，近代物理实验已经成为高等学校物理、非物理专业（部分工科）本科教育中开发学生思维，活跃学生思想，培养学生观察、分析、概括问题和独立工作能力及技能的课程之一。因此，对学生来说，认真做好相关的实验是非常重要的。

本书内容共分两篇：第 1 篇为基础理论知识，着重介绍数据处理、原子物理、微波技术、真空技术、X 光技术等方面的知识；第 2 篇为实验部分，从实验技能技术角度介绍了有关物质结构、物质性质的分析研究方法。例如，在真空镀膜实验中，首先从真空环境下薄膜的制备出发，根据不同实验要求分别测定薄膜厚度、物质晶体结构、薄膜样品的磁性质（磁化强度）、电性质（方块电阻）等项目；然后依据相应物理理论对测量结果进行分析研究。通过这样的实验，力求引导学生学会独立分析研究问题，引导学生独立进行科学探索。

本书从基本原理出发，深入浅出地讲解了相应实验的基本概念和实验研究分析方法。全书共选择编写了 12 个实验，每个实验着重突出实验技能和方法，并对一些实验问题进行了讨论，使得本书受众范围更加广泛。本书可作为高等学校物理、非物理专业（部分工科）本科、专科教学用书及科研人员参考用书。

本书在编写过程中得到了汪令江教授的关心和支持，编者对他表示由衷的感谢。此外，本书还参考了一些相关文献及教材，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请各位读者批评指正。

编 者

2011 年 1 月

目 录

第 1 篇 基础理论知识

第 1 章 数据处理	2
1.1 随机变量与概率（密度）函数	2
1.2 物理量中几种常见的概率分布	7
1.3 测量结果及其参数估计	15
1.4 测量数据的合理性检验	21
1.5 实验结果的表示与间接测量中的误差传递	25
1.6 曲线拟合	30
第 2 章 原子物理	36
2.1 单原子的轨道角动量、自旋角动量、能级的精细结构	36
2.2 L - S 耦合	42
2.3 原子磁矩	45
2.4 能级的塞曼分裂和塞曼效应	47
2.5 原子能级的超精细结构	51
第 3 章 微波技术	60
3.1 微波及其技术的应用	60
3.2 微波振荡器	62
3.3 矩形截面波导中的 TE_{10} 、 TE_{102} 波	68
3.4 电子自旋共振的基本原理	73
第 4 章 真空技术	80
4.1 真空的基本性质	80
4.2 真空应用	83
4.3 真空的获得	84
4.4 真空的测量	87
4.5 真空系统的检漏	90
4.6 真空材料的清洁处理	90
第 5 章 X 光技术	92
5.1 X 射线衍射的晶体学基础知识	92
5.2 X 射线基础	101

5.3 X射线与物质的相互作用 108

5.4 X射线的衍射 110

5.5 X射线的检测 114

5.6 X射线的防护 118

第 2 篇 实验部分

实验 1 密立根油滴实验 121

实验 2 弗兰克-赫兹实验 127

实验 3 塞曼效应 133

实验 4 微波电子自旋共振实验 142

实验 5 铁磁共振实验 149

实验 6 漫反射全息照相 158

实验 7 光信号的空间频谱与空间滤波 168

实验 8 真空镀膜 179

实验 9 多晶体 X 射线衍射及德拜相的摄取与分析 191

实验 10 用 X 射线衍射仪进行物相分析 204

实验 11 光谱分析、平面光栅摄谱仪及其调节 214

实验 12 氢（氘）原子光谱 226

附 表 232

附表 1 常用物理常数表 232

附表 2 国际单位制（SI）基本单位 233

附表 3 国际单位制中具有专门名称的导出单位 233

附表 4 SI 词头 233

附表 5 标准正态分布的分布函数 $N(x,0,1)$ 数值表 234

附表 6 t 分布的分位值表 236

附表 7 χ^2 分布的分位值表 237

参考文献 238

第 1 篇

基 础 理 论 知 识

第 1 章 数据处理

在物理实验中，我们不仅要对实验中所获得的数据进行分析，还要设计模型及对预期的结果或新的规律作出判断。但困难在于物理量的真值不可能得到，由于物理量本身的性质，测量中随机、偶然因素的存在，导致测量结果或多或少地偏离真值而存在一定的误差。因而，必须合理应用误差知识对测量数据进行分析处理，以便最大限度地减小误差，使实验结果更接近于被测量的真值，从而得出科学的结论。

测量结果是有误差的，也就是说，测量结果与待测量的实际数值（或称真值）是有差异的，这一差异的大小称为测量结果的误差。即某次测量的结果 x 与待测量的真值 μ 之差，定义为这次测量结果的误差 e ，表示为： $e = x - \mu$ 。

为什么测量结果有误差呢？这可以从下列几个方面来看：首先，测量是用各种仪器与设备来进行的，而仪器、设备的精度与科学技术和生产力的发展水平有关。例如，由于技术的原因，我们还不能以 0.0001°C 以上的精度来测量物体的温度。其次，在实用中我们允许测量结果有一定误差，并且我们可以这样说，不给出测量结果的误差，那么这样的实验结果是没有意义的。当然，提高仪器设备的精度可以减小测量的误差，但这是要付出代价的。所以，在实际工作中，如何对测量工作提出合理的要求是很重要的，也就是说，我们先要根据测量结果允许的误差大小，选定所需要的实验方法，做好实验。

另外，审慎分析和计算测量结果的误差也是很重要的。事实上，在实验中无论是随机误差还是物理量本身实际数值的统计涨落及物理量之间关联等引起的误差，它们都遵从一定的统计规律。实验数据处理的任务就是要在测得的数据中找出规律性的东西。要做好这个工作需要用数学上的“概率论和数理统计”方法来处理，在这里我们就实验中涉及的有关数据处理的概念作一扼要介绍。

1.1 随机变量与概率（密度）函数

1.1.1 系统误差与偶然误差

我们测量某一个物理量时，总是先根据测量要求，选定一种测量方法，对所用仪器的规格、操作规程、实验步骤和实验条件等作出规定，然后用上述设备及方法进行测量。因此，测量过程中的误差来源有如下几个方面：

(1) 测量方法的不完善：① 理论方法误差，所依据的理论本身具有近似性或所用的实验方法不完善；② 测量的设备安装不合理，仪器调整不当；③ 在具体测量过程中，没有满足测量方法中规定的实验条件和操作规程。

(2) 仪器、设备本身不完善的固有误差。

(3) 观察者本身生理感觉器官或心理特点的限制，而产生的误差。

(4) 物理现象的随机性（或称统计起伏）。这就是说，测量结果的误差是有两类误差组成的，即系统误差及随机误差。

系统误差的定义是：对某一物理量 x 进行了多次测量，测量结果用它的算数平均值 $\bar{x}$ 来表示，即

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.1.1)$$

测量结果 $\bar{x}$ 与真值 μ 的差值，称为这一测量结果的系统误差，即

$$e_{\text{系统}} = \bar{x} - \mu \quad (1.1.2)$$

假设我们进行的是没有系统误差的测量过程，或者对所有的系统误差进行了修正，测量结果还是会有随机起伏的，这类误差叫做随机误差（或称为偶然误差）。处理这类误差一般都使用多次测量的方法，当测量次数很多时，可以认为它的算数平均值就是待测量的真值，即

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.1.3)$$

物理学中称 $x_i - \mu$ 为第 i 次测量结果的随机误差。

1.1.2 随机变量、总体及样本

从概率统计的角度看，测量某一物理量是一个随机事件。即如果每次测量结果用一个数 x 来表示，那么 x 是一个随机变量，在一定条件下，对某一物理量的测量，测得的值即为该随机变量的随机值。

对一个随机变量进行无限多次的测量，这些无限多个数据组成了该随机变量的总体。但是，在实际工作中，我们只能进行有限次的测量，例如 n 次测量的随机值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，也就是从总体中随机抽出有限个数（ n ）的随机值，这有限个数的随机值的集合，称为样本。抽取的随机值的个数，或测量次数 n 称为样本容量。随机样本的容量足够大时，就呈现出随机总体的性质，不同样本其反映的性质是不同的。常遇到的问题是，在有限次测量的情况下去估计总体的性质或处理测量的结果。

随机变量可分为两种类型：① 随机变量只能在数轴上取一些孤立的值，称为离散型随机变量。如放射源放射出的粒子数只可能是一些整数。② 随机变量的随机值在数轴上是连续的，这类随机变量称为连续型随机变量。例如，测量一个谐振腔的谐振频率，它可以是谐振点邻近域内的任何一个值。

1.1.3 概率（密度）函数

1.1.3.1 概率的概念

在同一条件下，对某一物理量进行测量，由于测量中存在无法控制的某些偶然因素或被测

对象的随机性,使其测量值 A 可能出现,也可能不出现。设在 n 次的测量中,测量值出现 m 次,则将测量出现的次数 m 与总的测量次数 n 的比,称为 n 次的测量中 A 出现的概率,也叫频率。

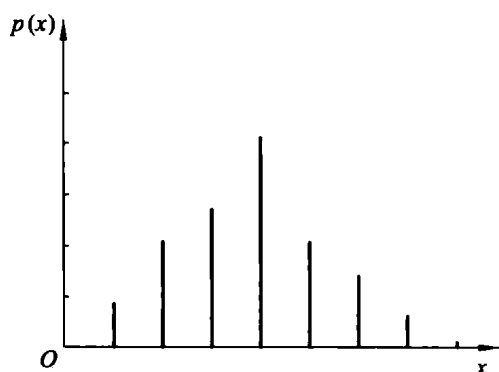
1.1.3.2 分布函数和概率(密度)函数

如果用 x_i 来表示变量 x 的测量值,而且对任何实数 α ,当 $x_i < \alpha$ 有确定的概率,则称 x 为一个随机变量,它的每一个随机值都以一定的概率出现。各随机值所对应的概率构成了随机变量的概率分布,用 $P(x)$ 来表示,概率分布反映了随机变量的全部特征。

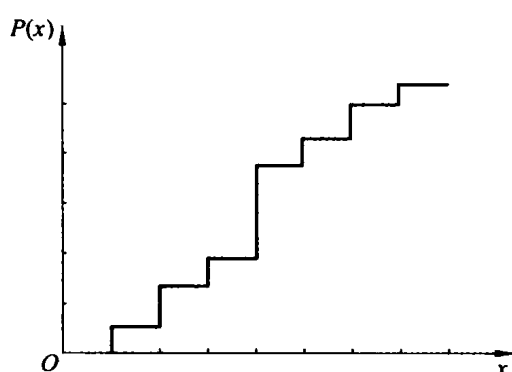
对于离散型随机变量 x ,它只能取可数的数值 $x_1, x_2, \dots$,除了用分布函数外,还常用概率(密度)函数 $p(x)$ 来描述它的概率分布。概率(密度)函数在某一点 x_i 的值等于随机变量 x 取值 x_i 的概率,即

$$p(x) \equiv P(x = x_i) \quad (1.1.4)$$

所以,有 $P(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$ 及 $\sum_x p(x_i) = P(x = \infty) = 1$ (对 x 的所有可能取值求和)。离散型随机变量概率(密度)函数和分布函数形状如图 1.1.1 (a) 所示。



(a) 离散型随机变量 x 的概率(密度)函数



(b) 离散型随机变量 x 的分布函数

图 1.1.1 离散型随机变量 x 的概率(密度)函数和分布函数图

随机变量 x 的取值小于或等于 x_i 时的概率 $P(x \leq x_i)$ 就定义为随机变量 x 的分布函数,即

$$P(x) \equiv P(x \leq x_i) \quad (1.1.5)$$

显然,分布函数必满足

$$P(x_i = -\infty) = 0; \quad P(x_i = \infty) = 1$$

分布函数 $P(x)$ 与概率(密度)函数 $p(x)$ 之间的关系为

$$P(x) = \sum_{x \leq x_i} p(x_i) \quad (1.1.6)$$

式中, $\sum$ 表示对所有满足 $x \leq x_i$ 的 $p(x_i)$ 求和。显然, $P(x)$ 是一个单调上升函数,如图 1.1.1 (b) 所示。

对连续型随机变量的分布函数 $P(x)$ 的定义与离散型的相同,即 (1.1.5) 式。但是,它的概率(密度)函数 $p(x)$ 则定义为

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (1.1.7)$$

或

$$p(x)dx = dP(x) = P(x_i < x \leq x_i + dx)$$

即概率（密度）函数在某一点的值就是随机变量在该点的概率密度。随机变量的值落在某点附近一个无限小的区间内的概率等于该点的概率（密度）函数的值和无限小区间的间距的乘积。 $P(x)$ 与 $p(x)$ 关系可表示为

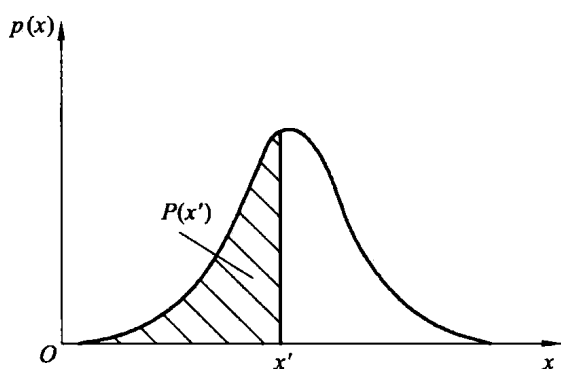
$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx \quad (1.1.8)$$

显然有

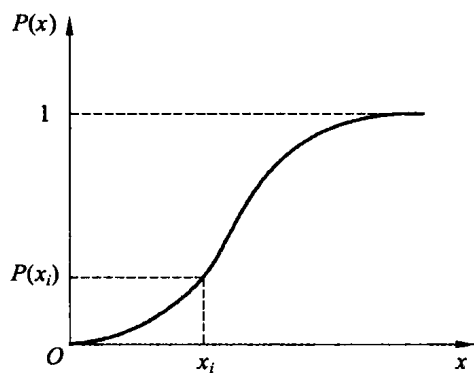
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = P(\infty) = 1 \quad (1.1.9)$$

这就是归一化条件。

如图 1.1.2 (a) 所示，概率（密度）函数 $p(x)$ 在横轴上任一点 x' 左边曲线下的面积，就是分布函数 $P(x)$ 在该点的值。由归一化条件知，密度曲线下的总面积为 1。随机变量 x 的分布函数 $P(x)$ 在概率（密度）函数 $p(x)$ 图上可由式 $P(x') = \int_{-\infty}^{x'} p(x)dx$ 表示，其曲线如图 1.1.2 (b) 所示。 $P(x)$ 是一条单调上升的曲线，其最大值趋于 1。



(a) 随机变量 x 的分布函数 $P(x)$ 在 $p(x)$ 图上的表示



(b) 随机变量 x 的分布函数

图 1.1.2

1.1.4 随机变量分布的数字特征量

随机变量 x 的概率（密度）函数 $p(x)$ 全面地描述了随机变量的性质（为了方便起见，以后不再区分 x 和 x_i ，即用 x 表示随机变量或随机值）。如果已知一个概率（密度）函数的形式，那么只要给出函数式中参数的数值，则随机变量的分布就完全确定了。而随机变量的性质更多的是用相关的特征数字来描述。在各种特征量中最重要的有期望值、方差和协方差，下面分别予以介绍。

1.1.4.1 期望值

随机变量 x 的期望值 $\langle x \rangle$ （或记为 $E\{x\}$ ），对于连续型随机变量 x ，定义为

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad (1.1.10)$$

期望值是随机变量概率密度曲线的重心位置。它与实验中测量结果的平均值的概念有相似之处，但又不完全相同。对于单峰、对称的概率密度曲线，期望值就是与曲线峰值对应位置处的值。

随机变量 x 的 n 次幂的期望值叫做 x 的 n 次矩，即

$$\langle x^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx \quad (1.1.11)$$

对于离散型随机变量，期望值定义为

$$\langle x \rangle \equiv \sum x_i p(x_i) \quad (1.1.12)$$

$$\langle x^n \rangle \equiv \sum x_i^n p(x_i) \quad (1.1.13)$$

式中， $p(x)$ 为随机变量 x 的概率（密度）函数。

1.1.4.2 方差

随机变量 x 的方差 $\sigma^2(x)$ （或记为 $\text{Var}(x)$ ）定义为

$$\sigma^2(x) \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \equiv \int (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx \quad (1.1.14)$$

即 $\text{Var}(x)$ 为 x 与其期望值 $\langle x \rangle$ 之差的平方的期望值。

对于离散型随机变量，方差为

$$\text{Var}(x) = \sum_x (x - \langle x \rangle)^2 p(x_i) \quad (1.1.15)$$

方差的平方根取正值叫做随机变量的标准误差，即

$$\sigma(x) = [\text{Var}(x)]^{1/2} \quad (1.1.16)$$

方差反映了随机变量的离散程度，它的值越大意味着随机变量 x 在期望值 $\langle x \rangle$ 附近分布越广，也就是随机值的分布范围越大。

方差或标准误差和期望值都是总体的分布参量。

1.1.4.3 协方差

N 维随机变量 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 中，任意两个随机变量 x_i, x_j 之间的相关程度，用协方差 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 来表示。协方差定义为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_j) &\equiv \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &\equiv \iint (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) p(x_i, x_j) dx_i dx_j \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

如果一个随机变量 x_i 的概率分布与另一个随机变量 x_j 的取值没有任何联系，也就是说这两个随机变量是相互独立的，根据概率公式

$$p(x_i, x_j) = p(x_i) p(x_j) \quad (1.1.18)$$

可见，当 x_i 和 x_j 相互独立时，协方差 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 的值为 0；反之， $\text{Cov}(x_i, x_j) = 0$ 时， x_i 和 x_j 可

能相互独立，也可能不相互独立。当 $\text{Cov}(x_i, x_j) \neq 0$ 时，则称它们是相关的。 x_i 和 x_j 的相关性越大，则 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 的绝对值越大，但是， $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 的大小不只与它们的相关程度有关，还与方差 $\sigma^2(x_i)$ 、 $\sigma^2(x_j)$ 的大小有关。因此，为了更确切地反映两个随机变量的相关程度，需引入相关系数 $\rho(x_i, x_j)$ 的概念

$$\rho(x_i, x_j) \equiv \frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{\sigma(x_i)\sigma(x_j)}$$

其中 $\sigma(x_i)\sigma(x_j)$ 分别为 x_i 和 x_j 的标准误差。可以证明

$$|\rho(x_i, x_j)| \leq 1 \quad (1.1.19)$$

当 $\rho(x_i, x_j) = 0$ 时， x_i 和 x_j 互不相关；当 $\rho(x_i, x_j) \neq 0$ 时，表明 x_i 和 x_j 之间存在一定程度的线性相关；当 $\rho(x_i, x_j) > 0$ 时，一个随机变量增加，另一个随机变量有按线性增大的趋势，这时称 x_i 和 x_j 正相关；当 $\rho(x_i, x_j) < 0$ 时，称 x_i 和 x_j 负相关；当 $\rho(x_i, x_j) = +1(-1)$ 时，则称为正（负）全相关，这时 x_i 和 x_j 之间存在线性关系。

1.2 物理量中几种常见的概率分布

概率（密度）函数是随机变量最重要的属性，不同的随机变量可以有不同或相同的概率（密度）函数。在物理实验中，各个观测量是随机变量，这些观测值有连续的也有离散的，如核物理中离子的计数率是离散的。故对这些测量数据的分析处理，必须应用建立在概率论和数理统计基础上的误差理论。通常实验中只能进行有限次观测，不可能对随机变量的全部进行研究，但必须知道各种可能值的概率，即随机变量的分布。本节将讨论几种常用的概率（密度）函数；同时，还讨论一些统计量（实测数据的函数）所服从的概率分布。

1.2.1 二项式分布

设某随机事件 x 进行独立测量时出现的概率为 p ，不出现的概率为 q （ $q = 1 - p$ ），则在 n 次独立试验中 x 出现 k 次的概率为

$$p(x) = p_k = p(x = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.20)$$

式中，系数 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是在 n 次独立试验中 x 出现 k 次，而有 $n-k$ 次不出现的组合数。

由于 $p(k)$ 恰好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中的第 $k+1$ （一般）项，故称它为二项式分布。二项式分布是离散型分布，其中 $k=0, 1, 2, \dots, n$ ， n 为有限值。服从二项式分布的随机变量的期望值 $\langle x \rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为 $\bar{k} = np$ 和 $\sigma^2(k) = np(1-p)$ ，所以我们也常将（1.1.20）式称为随机变量 x 服从参数为 n 、 p 的二项式分布。

1.2.2 泊松分布

泊松分布是离散型分布，当二项式分布中的 n 很大而事件出现的概率 p 又很小，且它们的乘积 $np = \lambda > 0$ 是一个常数时，则有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，有

$$p(x=k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (1.1.21)$$

服从 (1.1.21) 式的分布称为泊松分布。可以证明，服从泊松分布的随机变量的期望值 $\langle x \rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为

$$\langle x \rangle = \bar{k} = \lambda, \quad \sigma^2(x) = \sigma^2(k) = \lambda \quad (1.1.22)$$

式 (1.1.22) 表达的泊松分布还可图 1.1.3 表示，随着参数 λ 的增大，从图可见泊松分

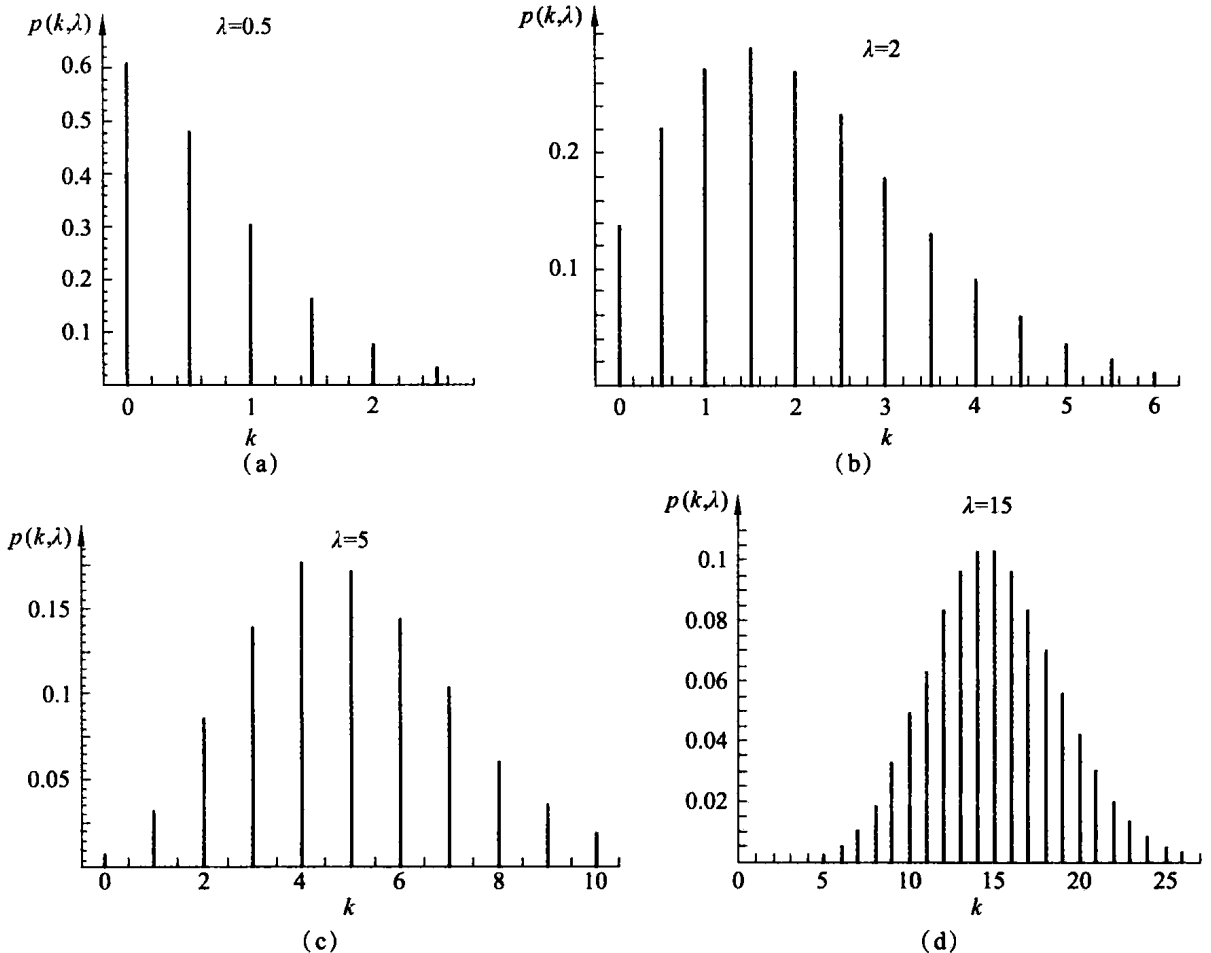


图 1.1.3 泊松分布

布逐步趋向对称。在实际应用中,当 $n \geq 10$ 、 $p \leq 0.1$ 时,就可选用泊松分布来描述。在物理问题中,例如,对有 n 个原子核的体系,单位时间内 n 个原子核发生衰变 p 和不发生衰变 q 的事件中,是服从二项式分布的。当系统中的原子核数 n 很大而单位时间内的衰变 p 又很小时,此时 $np = \lambda > 0$ 。这个在核衰变中 λ 的意义是明确的,即在单位时间内, n 个原子核中发生衰变的概率 p 为 λ/n , n 是事件的总数,因此 λ 是单位时间内发生核衰变的事件数。

假设我们对每秒核衰变数 x 进行很多次测量(例如 100 次以上),得到平均值 $\bar{x} = 2$,那么,我们可以近似地认为它的期望值 $\langle x \rangle = \lambda \sim 2$ 、方差 $\sigma^2(x) = \lambda \sim 2$ 。由 (1.1.21) 式,可算得 x 取值 0, 1, 2, 3, 4, 5 时的概率分别为

$$\begin{aligned} p(0) &= 0.135, p(0.5) = 0.216, p(1) = 0.271, p(1.5) = 0.288, p(2) = 0.271, p(2.5) = 0.230, \\ p(3) &= 0.180, p(3.5) = 0.132, p(4) = 0.090, p(4.5) = 0.059, p(5) = 0.036, p(5.5) = 0.021, \end{aligned}$$

因此,出现 $x > \bar{x}$ 的概率与出现 $x < \bar{x}$ 的概率是不同的,即概率函数是不对称的,图 1.1.3 (b) 就是上述概率分布的图形表示。如果测得的平均值 $\bar{x} = 15$, 则有 $\langle x \rangle = \lambda \sim 15$, $\sigma^2(x) = \lambda \sim 15$ 。从图 1.1.3 (d) 可看出,这时的概率分布已近似地呈现对称形,它与正态分布十分相似。

1.2.3 正态分布和中心极限定理

1.2.3.1 正态分布

正态分布是一种连续分布。所谓连续分布,直观地说就是随机变量的可能取值连续地充满某一区间或整个数轴。由于连续型随机变量可能取值是不可列的,因此就不能像对离散型随机变量那样,用分布列作为它的概率分布。此外,一般来说,连续型随机变量取任何个别值的概率都是零,所以,考虑连续型随机变量取某个值的概率为多少是没有意义的。

在概率论和统计物理研究中证明,只要随机变量 x 受到大量相互独立的微小随机因素影响时,这些随机因素将使测量值在平均值的上下起伏,但这种起伏是有一定的规律。例如,在平均值上下出现的概率是对称的,离平均值较远的数据的概率小于与平均值较近的数据的概率,出现远离平均值的数据的概率几乎等于零。这种规律在数学上可以用正态分布函数 $p(x, \mu, \sigma^2)$ 确切地描述。

$$p(x, \mu, \sigma^2) \equiv N(\mu, \sigma^2) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1.23)$$

式中, $1/\sqrt{2\pi}$ 为归一化因子; σ 、 μ 为分布参数,则 x 服从参数为 μ 、 σ 的正态分布[记为 $N(\mu, \sigma)$]。

正态分布是一种非常重要的概率分布,在近代物理实验中,凡属连续型的随机变量几乎都属正态分布。在自然界中,凡由大量的、相互独立的诸因素共同微弱作用下所得到的随机变量都服从正态分布。即使有些物理量是不服从正态分布的随机变量,但它(或它的测量平均值)也往往以正态分布作为它的极限分布,泊松分布就是一个例子。

特别在 $\mu = 0$, $\sigma = 1$ 时的 $N(0, 1)$, 称为标准正态分布,此时

$$p(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1.24)$$

由式 (1.1.23) 所作的曲线为正态分布的密度曲线 (也称为正态曲线), 如图 1.1.4 所示。由图可知: ① 正态曲线是关于直线 $x = \mu$ 对称; ② 当 $x = \mu$ 时, $p(x)$ 达最高峰值; ③ $p(x)$ 的值随着 x 与 μ 远离而逐渐减小, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $p(x) \rightarrow 0$, 即曲线远离直线 $x = \mu$ 越接近 (渐近线) x 轴。

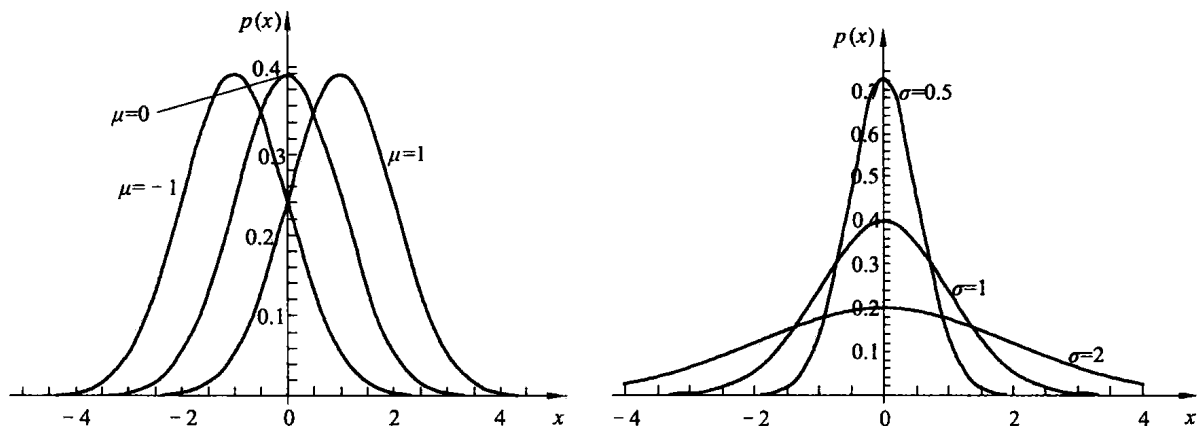


图 1.1.4 正态分布密度曲线

1.2.3.2 正态分布的期望值和方差

设 x 服从正态分布 $x \sim N(\mu, \sigma)$, 由式 (1.1.23) 代入式 (1.1.10) 有

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

作代换 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则得

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

因

$$\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2} dz = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

故

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \mu \quad (1.1.25)$$

结果说明, 正态分布中的参数 μ 就是数学期望值。由式 (1.1.23) 代入式 (1.1.14) 同样可证明

$$\sigma^2(x) = \sigma^2 \quad (1.1.26)$$

即正态分布的方差就是其分布参数 σ 的平方。 μ , σ 值不同时, 对应的函数形状也不同, 如图 1.1.4 所示。

一般进行正态分布的概率运算时, 可作如下的变换, 令

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (1.1.27)$$

当 $\mu = 0$, $\sigma = 1$ 时, 概率 (密度) 函数变为

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (1.1.28)$$

它的期望值和方差分别为 $\langle z \rangle = 0$ 、 $\sigma^2(z) = 1$, 这正是前面说的标准正态分布。由于它的概率 (密度) 函数中没有参数, 而仅仅是随机变量 z 的函数, 这就为数值计算带来很大的方便, 通常按下式制备标准正态分布表

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx \quad (1.1.29)$$

由随机变量 z 的值, 即可查得相应的分布函数 $P(z)$ 的值。

标准正态分布概率 (密度) 函数 $p(x)$ 表及标准正态分布的分布函数 $N(x, 0, 1) \equiv P(z)$ 数值表都可直接用计算机编程完成。见附表 5 标准正态分布表。

服从正态分布的随机变量 x 在 $[a, b]$ 区间内的概率大小也可由上式算出

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = P\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (1.1.30)$$

在常用的 $P(z)$ 表中, 往往只给出 $z \geq 0$ 的 $P(z)$ 的值。 $P(-z)$ 的值可以由归一化条件求得

$$P(z) = 1 - P(-z) \quad (1.1.31)$$

【例】 试求服从正态分布的随机变量 x 处于区间 $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ 内的概率。

解: 根据式 (1.1.30) 有

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) &= P\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(1) - P(-1) \\ &= P(1) - [1 - P(1)] \\ &= 2P(1) - 1 \end{aligned}$$

查正态分布表, 得 $P(1) = 0.841\ 34$, 因此有

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 2 \times 0.841\ 34 - 1 = 0.682\ 7$$

这就是说, 服从正态分布的随机变量 x , 其值在期望值邻近的 $\pm\sigma$ 区间 (标准误差范围内) 的概率为 68.27%, 这个概率常称为置信水平。

同理可得

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.954\ 4$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.997\ 3$$

$$P(\mu - 4\sigma \leq x \leq \mu + 4\sigma) = 0.999\ 9$$

这些结果说明, 虽然正态变量的取值范围为全部数轴, 实际上, 在期望值 μ 左右各为