精英计划 JINGYINGJIHUA

考研专业硕士系列丛书

2013年

JINGJILEILIANKAOZONGHENENGLIHEXINBIJISHUXUE

经济类联考

综合能力核心笔记·数学

跨考教育教研中心 编著

1 个中心 严格按照最新考纲编写

2 个结合 真题精选+典型习题

3 大板块 内容概要+考点精析+技巧点拨

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

跨考教育 KUAKAO EDUCATION 考研专业硕士系列丛书

经济类联考

综合能力核心笔记·数学

总　策　划:跨考专业硕士考试研究中心
编　　　著:跨考教育教研中心
编　委　会:李　擂　张　彬　余文涛
尹　霞　牛秀艳　高明晶

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

经济类联考综合能力核心笔记．数学／跨考教育教研中心编著．—北京：北京理工大学出版社，2012.6

（考研专业硕士系列丛书）

ISBN 978-7-5640-6094-7

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①跨…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①G643②013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 129049 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市文阁印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／19.00
字　　数／401 千字
版　　次／2012 年 6 月第 1 版　2012 年 6 月第 1 次印刷
定　　价／36.80 元

责任编辑／袁　媛　张慧峰
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

前 言

在跨考教育数学教研室全体老师的努力下，这本《2013年经济类联考综合能力核心笔记·数学》终于如期与广大考生见面了。自2011年人民大学金融硕士以经济类联考综合取代考研数学三以来，经济类联考综合持续升温，越来越多的高校加入该考试，考生对其关注也越来越多。继年初推出《2013 年经济类联考综合能力核心教程》以后，针对广大考生的需求，我们又推出了这本《2013 年经济类联考综合能力核心笔记·数学》，配合《核心教程》，以适应考生在不同阶段复习的具体要求。

一、这本书写什么

本书针对经济类联考综合的数学部分，依据经济类联考综合考试大纲，结合历年真题具体要求以及考试的最新资讯编写，力求精确地再现考试的考查内容以及对考生的能力要求，最大限度地帮助考生提高复习效率。具体来说，本书的编写有如下特点:

1. 重视知识体系的构建

相比其他学科，数学更强调知识点之间的内在联系以及总体的逻辑知识体系。从考试的角度来看，经济类联考综合数学部分的考题越来越强调综合性与灵活性，这就要求考生不但要全面掌握各个单一的考点，更要掌握他们之间的联系，从体系上和框架上去把握整个学科。而体系和框架正是大部分考生在复习过程中所欠缺、所忽略的，这也是很多考生考分无法更进一步提高的根本原因。

有鉴于此，在每一章的开头，我们都加上了知识框架图和总体介绍本章主要内容和考试要求的考点概述，在讲解具体的考点时，也都力求清晰地阐释他在学科中的位置，以及与其他考点之间的联系。以求帮助考生总体了解本章主要知识点及其相互之间的逻辑关系，把握知识体系，从整体上把握整个学科。

2. 依据考试大纲和最新真题编写，采用模块化知识结构

针对考试大纲对考试范围和能力要求的规定，结合最新真题，我们对各章节内部的考点进行了划分，实现了模块化的知识结构，以便于考生更加清晰地认识考试的具体要

求，在复习时做到有的放矢。

每个模块下分为**内容概要**、**考点精析与方法技巧点拨**、**精讲精练**三部分。

内容概要部分讲解本模块内主要的考点和常用公式定理，一般分为基本概念、基本性质和常用公式定理三部分。具体内容包括：精确地阐释基本的概念，对部分核心的概念还会通过注释以及例证加深考生的理解；对常见性质和主要的公式定理进行系统的总结和归纳，方便考生理解和记忆。

考点精析与方法技巧点拨和**精讲精练**这两部分是对应的，**考点精析与方法技巧点拨**是对本模块考试的具体考查方向以及应对方法的概括和总结，而**精讲精练**部分则对本章考题的具体类型进行了总结，并通过精选的典型例题讲解各种题型的具体的求解方法与技巧。建议考生把这两部分结合起来学习，先通过**考点精析与方法技巧点拨**了解大致的解题思路和处理方法，再通过**精讲精练**部分的经典例题的实战演练掌握各方法的具体应用。

3. 重视考生练习的质与量

要想学好数学，练习是必不可少的，这其中，练习的质与量是两个关键的指标：不足量不足以引起质变，无法实现对具体方法的熟练掌握；而低质量的例题和练习题不仅浪费考生时间，更有可能打乱考生的复习思路，将考生的复习引上"歧途"。

因此，我们在编写本书时，首先注意保证例题和练习题的质量，严格依据考试大纲和最新真题的具体要求精选适合经济类联考考生的经典题目，力求使考生以点带面，举一反三，最大限度地提高复习效率。在保证质量的基础之上，我们配备了数量可观的例题与练习题，以保证考生达到考试所需的练习量。我们建议考生在使用本书时，不但要独立完成每章最后的练习题，对所有的例题，也要先做一遍再与解答过程对照。

二、考试考什么

1. 试卷结构

选择题 10 题，每题 2 分，共 20 分；解答题 9 题，每题 5～6 分，共 50 分。

2. 考试大纲

1. 微积分部分

一元函数的微分、积分；多元函数的一阶偏导数；函数的单调性和极值。

2. 概率论部分

分布和分布函数；常见分布；期望值和方差。

3. 线性代数部分

线性方程组；向量的线性相关和线性无关；矩阵的基本运算。

3. 试题特点及能力要求

(1)较之 2011 年，2012 年经济学联考综合数学部分的试题总体上延续了往年的要求，呈现出如下鲜明的特点：

①总体难度较低，以考查基本概念和基本计算为主。

相对于考研数学三的试题，2012 年经济学联考综合数学部分试题的灵活性和综合性

都不高，主要考查考生对基本概念的理解和对基本运算和基本方法的掌握情况。考生在复习时一定要牢记这一点，不要追求难度，而要踏踏实实打好基础，并进行足量的训练，才能拿到理想的分数。

②重视考查的广度与考生解题的熟练度。

试卷考点分布较广，考试大纲上有提及的考点均有涉及，重视考生复习的全面性。同时，试卷对考生解题的速度有较高的要求，考生需要在约 75 分钟的时间内完成 10 道选择题和 9 道解答题，这对大部分考生的解题速度是一个考验。这就要求考生在复习的时候一定要全面而细致，不要存在侥幸心理，扎扎实实掌握每一个知识点，多做练习以求熟能生巧，只有这样，才能顺利取得高分。

③与考研数学联系紧密，部分试题直接选自考研数学三试卷。

由于专业的相关性，金融硕士经济学联考综合数学部分的考试内容与考研数学三有较多的联系，所有的考点都可以在考研数学三的考试大纲中找到，且对每个考点具体要求的程度也都不会超过数学三中对应部分的要求。从已考试题来看，大部分试题除灵活性和综合性略低外，特点、要求与考研数学三考题类似，部分试题甚至直接选自已考的数学三试卷。例如：

【2012 年经济类联考综合选择题第 6 题】

26. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x, I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$ 则 I,J 的大小关系是(　　).

A. $I<J$　　B. $I>J$　　C. $I\leqslant J$　　D. $I\geqslant J$

本题原题见 2011 年数学三考研试题的第 4 道选择题。

【2011 年经济类联考综合选择题第 10 题】

30. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$ (　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　D. $1-\mathrm{e}^{-1}$

本题原题见 2010 年数学三考研试题的第 7 道选择题。

可见，历年考研数学真题也是很重要的资料。考生应该多留意考研数学真题中对考生能力要求与经济类联考综合能力考试较为接近的试题。我们在编写本书时，依据考试的具体要求收录了历年考研数学中适合(经济类联考综合能力考试考生)的试题，作为例题或练习题，在书中对应位置均有标示。

④重视考生对学科逻辑知识体系的掌握，命题不局限于大纲。

经济类联考综合的考试大纲比较简略，只给出了考试的大致范围，没有完全限定考试内容。考试中会出现一些大纲上没有指出但在整个逻辑知识体系内部的考点。请看如下例证：

【2012 年经济类联考综合选择题第 2 题及解答题第 1 题】

22. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=($　　$)$.

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不存在

31. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

【考点评析】:这两道题都考查函数极限的计算及常见的性质,但考试大纲上并没有出现极限。这是因为掌握极限是学习整个高等数学的基本要求,没有极限就无法正确理解后面的导数与积分。

【2011 年经济类联考综合选择题第 4 题】

24. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有 $f'(x)<0$,且 $f''(x)<0$,则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内(　　).

A. 单调增加,图像上凹　　B. 单调增加,图像下凹

C. 单调减少,图像上凹　　D. 单调减少,图像下凹

【考点评析】:本题考查函数凹凸性,但考试大纲上并没有出现函数的凹凸性,只要求了函数的单调性和极值。这是因为函数的凹凸性实质上是其导函数的单调性,掌握函数凹凸性是掌握函数单调性的内在要求。

可见,考生在复习数学时,要依据大纲进行,但不可拘泥于大纲。要依据大纲所规定考点的内在要求进行学习,建立起清晰完整的知识体系。这也是我们编写本书的基本原则之一

(2)与 2011 年相比,2012 年经济类联考综合数学部分的试题还呈现出如下新的特点:

①试题的灵活性与综合性有所上升。

伴随着经济类联考逐年升温,试题难度也将有所上升,以保持足够的区分度。具体表现在综合性与灵活性的升高,试题中也明显增多了需要考生思考与理解的成分,部分试题需要考生综合运用多个基本概念,理解它们之间的相互关系才能顺利求解。

例如:【2012 年经济类联考综合选择题第 9 题】:

29. 设随机变量 X,Y 服从正态分布,$X\sim N(\mu,16)$,$Y\sim N(\mu,25)$,记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$,$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$,则(　　).

A. 只有 μ 的个别值,才有 $p_1=p_2$

B. 对任何实数 μ,都有 $p_1<p_2$

C. 对任何 μ 都有 $p_1=p_2$

D. 对任何实数 μ,都有 $p_1>p_2$

本题要求考生综合运用各种正态分布与标准正态分布的关系以及正态分布的对称性才能得出正确答案,对考生的综合能力要求较高。

这一趋势在 2013 年经济类联考综合的考试中仍将延续,试题将会进一步提高对考

生的能力要求。当然,任何考试的命题都会有一定的延续性,因此不会出现难度陡增的现象,只会是缓慢地逐年上升。也就是说,2013 年的试卷难度将会略高于 2012 年。同时,从长远来看,经济类联考综合数学部分试题的难度总体还是会低于普研数学三。

②考点重复率较高。

2011 年试卷中的主要考点在 2012 年的考卷中都有体现,重复率很高,部分考题相似度很高。如:【2012 年经济类联考综合选择题第 3 题】

23. 设 $f(x)=\arcsin x^2$,则 $f'(x)=($　　$)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　B. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$　　D. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

【2011 年经济类联考综合选择题第 1 题】

21. 设 $f(x)=\arccos x^2$则,$f'(x)=($　　$)$.

A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　B. $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　　C. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$　　D. $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

可见,在复习过程中,要重视对已考真题的分析与学习。在本书中,我们根据考点将所有已考真题插入到了每章具体的例题及练习题中,并标出了考查年份,以便于考生把握考试要求。

三、复习建议

结合考试的具体要求以及考生复习过程中常出现的问题,我们对考生对本书的使用以及全年的复习给出如下建议:

1. *重基础*

任何数学考试都会强调基础,打好基础也是考生复习时首要的、根本的任务。相比考研数学,经济类联考综合数学部分更强调考生的基本能力,考题中基础题所占的比重更大。因此,考生在复习时一定不要偏离基础这个根本的方向,过多地强调难题和怪题不仅浪费时间,还容易导致考生轻视基础,在考试中丢掉一些本身很容易拿到的分数。

2. *多做题*

经济类联考综合的试题难度虽然不大,但是时间相对较少,对考生解题的速度要求较高(要在 75 分钟之内完成 19 道题)。而考生要提高解题的熟练度与准确度是没有任何捷径可走的,只能通过大量的练习。在此,以往届数学高分学员最常用的一句经验分享与广大考生共勉:“无他,唯手熟而。”

3. *重质量*

相比其他学科,数学更强调复习的质量,无论在什么阶段,考生都不能牺牲复习的质量去追求复习的速度与数量。数学考试的要求是要能够综合地、灵活地运用所学知识去分析问题、解决问题,浅尝辄止的学习是没有任何意义的,必须要在理解的基础之上深入地掌握,这就要求我们在复习时重视复习的质量,扎扎实实掌握每一个考点。同时,数学的复习是前后关联的,前面的复习质量会对后续的学习产生持续的影响,前期不重视质量还会给后续的学习带来更大的障碍。因此,我们建议考生要把复习的质量放在第一

位，打好“三基”（基本概念、基本理论、基本方法），多做练习，才能顺利取得高分。

4．不间断

数学的复习需要考生通过持续不断的练习来保持做题的“手感”，将最好的状态带到考场上。因此，数学全年的复习一定不能间断。到了复习的后期，复习情况比较好的考生可以根据自身的情况适当地减少数学复习的时间，但绝不可完全间断数学的复习。每年都有很多前期复习情况很好，但由于后期的“战略性放弃”而在数学考试中遭遇滑铁卢的考生，希望2013年的考生引以为鉴。

对广大考生来说，考研的复习是一个从体力到精神力的全方位比拼，作为长年奋战在考研数学第一线的老师，我们对考生的困难也感同身受。在此，借助出版《2013年经济类联考综合能力核心笔记·数学》的机会，我们将多年积淀的教学成果分享开来，只希望能为广大经济类联考考生的数学复习尽一点绵薄之力。另外，由于时间仓促和编者本身水平有限，如果书中有不足乃至纰漏之处，还望广大考生与专家不吝批评指正。

最后，本书是跨考教育数学教研室集体智慧的结晶，在此对所有对本书付出过努力和贡献的老师表示由衷的感谢。

本书答疑地址：http://weibo.com/u/1919209457，或新浪微博搜索：kuakaolilei.

编　者

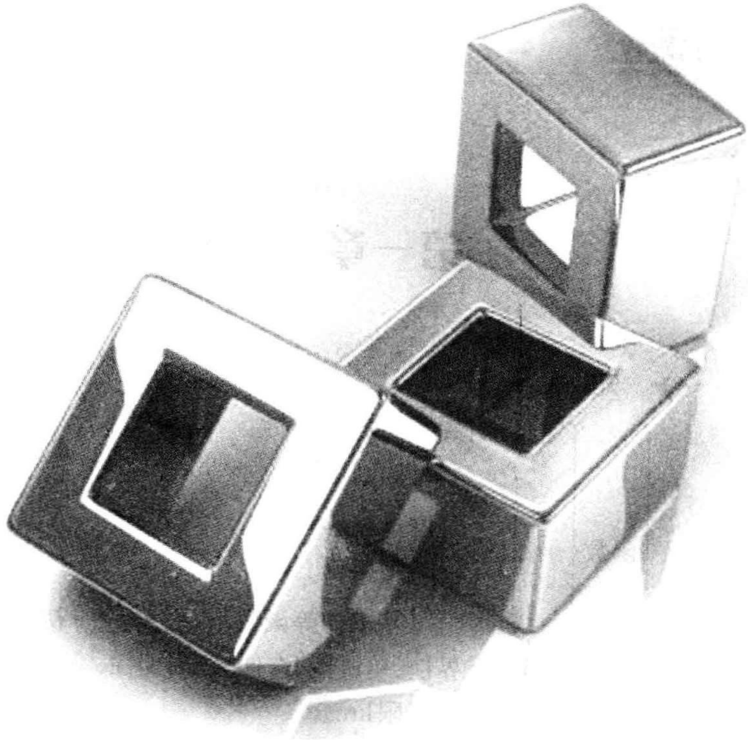
2012.6

目 录

高等数学

线性代数

概率论



高等数学

第一章 函数、极限与连续性

知识框架图

- 函数
  - 定义：函数的三要素
  - 函数的运算
    - 四则运算
    - 复合函数
    - 反函数
    - 基本初等函数 $\xrightarrow{\text{四则运算、复合}}$ 初等函数
  - 性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性
- 极限
  - 定义
    - 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
    - 函数极限
      - $\lim\limits_{x\to a} f(x)$：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(a+0), f(a-0)$ 存在且相等
      - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在且相等
  - 性质
    - 唯一性、有界性、保号性（保序性）
    - 两个收敛准则：单调有界收敛准则、夹逼定理
  - 无穷大与无穷小
    - 定义和性质
    - 无穷小的比较（高阶、低阶、同阶、等价、k 阶无穷小）
  - 极限的计算
    - 四则运算
    - 等价无穷小替换
    - 洛必达法则
    - 重要极限
    - ……
- 连续
  - 定义
    - 函数在一点连续
    - 函数在一个区间上连续
  - 性质
    - 连续函数四则运算、复合运算或求反函数仍连续
    - 所有初等函数在其定义域内连续
  - 间断点分类
  - 闭区间上连续函数的性质

概述：函数是微积分的研究对象，极限是微积分的理论基础，微积分中所有的运算从本质上讲都是极限. 因此，本章在微积分的学习过程中具有很基本的意义，是正确理解后续章节的关键. 从考试的角度来讲，本章的内容可以分为三部分.

一是函数的相关知识，主要讲解函数的定义、性质以及常见的运算. 这一部分主要是

对中学阶段初等数学的相关知识的复习. 考生需要理解函数的基本概念,掌握函数的常见运算及常见性质. 为了适应考试的要求,最好能结合后续章节的相关知识点来复习,对函数相关概念和性质在后续章节中的应用有简单的总结.

二是极限的概念、性质及运算. 其中,对于极限的定义,简单地理解即可,不需要过于深究. 极限部分复习的核心应该是极限的计算,所有的性质与运算都可以看做是为该问题服务的. 极限的计算综合性较强,需要用到多个阶段的知识点,在强化阶段的复习中,需要对常用的计算方法有系统的总结,针对各种类型的函数采取对应的计算方法.

三是函数的连续性及间断点的定义与性质. 在极限的基础之上,我们定义了函数连续的概念,掌握连续性的关键就是正确理解极限以及系统掌握极限的计算方法. 间断点的分类也是依据函数左右极限的不同情况进行的,计算出左右极限再对号入座即可.

模块一 函 数

※ 内容概要

一、函数的定义

设在某个过程中,有两个变量 x 和 y,当变量 x 在它的取值范围 D(实数集)内变化时,变量 y 按照一定的规律总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作

$$y=f(x), \quad x\in D.$$

其中,x 称为自变量,D 称为定义域,y 称为因变量,f 称为对应关系,也称 f 为 x 的函数. 当 x 在 D 内取值时,按照对应关系 f,y 的取值范围称为函数的值域,常记为 R_f. 在本书中,如果不作特别声明,x,y 均取实数.

【注】 (1)函数的三要素:定义域、对应关系、值域. 在这三要素中,定义域与对应关系是本质的,它们可以决定函数的值域. 两个函数相同当且仅当它们的定义域与对应关系相同.

(2)函数的自变量与因变量取什么符号是没有关系的,例如:我们把 $y=f(x)$,$x\in D$ 与 $u=f(t)$,$t\in D$ 看做是同一个函数.

二、函数的性质

1. 单调性

定义: 单调递增 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

单调不减 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$

类似地,可以定义单调递减和单调不增.

判定:(1)定义(最本质的方法,但一般情况下比较麻烦);

(2)利用单调性的常用性质:

①假设 $f(x),g(x)$均单调递增,则 $f(x)+g(x)$也单调递增.

②假设 $f(x),g(x)$单调性相同,则 $f(g(x))$单调递增;

假设 $f(x),g(x)$单调性相反,则 $f(g(x))$单调递减.

③常见函数及其单调区间:

函数	增区间	减区间
$y=x^2+ax+b$	$\left[-\frac{a}{2},+\infty\right)$	$\left(-\infty,-\frac{a}{2}\right)$
$y=e^x$	$(-\infty,+\infty)$	无
$y=\ln x$	$(0,+\infty)$	无
$y=\sin x$	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$
$y=\cos x$	$[2k\pi-\pi,2k\pi]$	$[2k\pi,2k\pi+\pi]$

(3)导数:设函数 $f(x)$在定义域 D 上可导,则

若 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$单调递增;

若 $f'(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)$单调不减.

【注】 (1)类似地,可以讨论单调减和单调不减,在此不做赘述.
(2)微积分对单调性的考查大多要结合导数.

2. 奇偶性

定义:偶函数:$f(-x)=f(x)$;奇函数:$f(-x)=-f(x)$.

判定:(1)利用定义,也可以结合奇偶性的几何意义:偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(2)利用奇偶函数的性质:

①如果 $f_1(x),f_2(x)$都是奇函数(或偶函数),则对任意的常数 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$,$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$仍然是奇函数(或偶函数).

②如果 $f_1(x),f_2(x)$奇偶性相同,则 $f_1(x)f_2(x)$为偶函数;如果 $f_1(x),f_2(x)$奇偶性相反,则 $f_1(x)f_2(x)$为奇函数.

③常见的奇函数:$y=x^{2k+1}$,$y=\sin x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,$f(x)-f(-x)$.

常见的偶函数:$y=x^{2k}$,$y=\cos x$,$y=|x|$,$f(|x|)$,$f(x)+f(-x)$,$f(x)f(-x)$.

(3)利用微分学相关知识:

①设 $f(x)$可导.若 $f(x)$是偶函数,则 $f'(x)$是奇函数;若 $f(x)$是奇函数,则 $f'(x)$是偶函数.

②设 $f(x)$连续,若 $f(x)$是偶函数,则 $f(x)$的原函数中有且仅有一个是奇函数;若 $f(x)$是奇函数,则 $f(x)$的原函数都是偶函数.

应用:假设 $f(x)$为连续函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数}\\ 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数}\end{cases}$.

3. 周期性

定义:若 $f(x+T)=f(x)$,T 称为函数 $f(x)$的周期,在 $f(x)$所有周期中,我们把其中最小的正数称为最小正周期.

判定:(1)利用定义.

(2)利用周期函数的常见性质:

①如果 $f(x)$以 T 为周期,则对任意的非零常数 C,$Cf(x)$仍然以 T 为周期,$f(Cx)$以 $\frac{T}{|C|}$为周期.

②如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$都以 T 为周期,则 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$仍然以 T 为周期($k_1,k_2\in\mathbf{R}$). 注意这时最小正周期有可能缩小,如 $f_1(x)=\cos 2x+\sin x$,$f_2(x)=\sin x$ 都以 2π 为最小正周期,但 $f_1(x)-f_2(x)=\cos 2x$ 以 π 为最小正周期.

③常见的周期函数及其最小正周期:

$y=\sin x$,$T=2\pi$;　　　$y=\cos x$,$T=2\pi$;

$y=\tan x$,$T=\pi$;　　　$y=\cot x$,$T=\pi$.

(3)可导的周期函数的导函数仍为周期函数.

应用:$f(x)$以 T 为周期,则 $\int_{x}^{x+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$.

4. 有界性

定义:若存在 $M>0$,使得 $\forall x\in D$,$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在区间 D 上有界.

判定:(1)利用定义,证明 $\exists M>0$,使得$|f(x)|\leqslant M$ 对所有的 $x\in D$ 都成立.

也可以分别证明 $f(x)$有上界和下界,也即 $\exists m<M$,使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 对所有的 $x\in D$都成立.

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$收敛,则数列$\{x_n\}$有界;假设$\lim\limits_{x\to a}f(x)$收敛,则存在 $\delta>0$,使得 $f(x)$在$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$上有界.

(3)$f(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上有界.

【注】 (1)函数 $f(x)$在区间 D 上有界的另一种等价的描述方式:$f(x)$在区间 D 上有上界且有下界,也即 $\exists m<M$,使得 $\forall x\in D$,$m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(2)讨论函数的有界性之前一定要明确区间,同一函数在不同区间上的有界性可能是不相同的. 例如 $f(x)=\frac{1}{x}$,容易检验 $f(x)$在$(1,+\infty)$上有界,在$(0,1)$上无界.

(3)函数 $f(x)$在区间 D 上无界的定义:对 $\forall M>0$,总 $\exists x_0\in D$,有$|f(x_0)|>M$. 一般来说,要说明 $f(x)$在区间 D 上无界,则说明 $f(x)$(或$-f(x)$)在区间 D 上可以取得无限大.

三、函数的运算

1. 复合函数

设 $y=f(u),u\in D_1$ 与 $u=g(x),x\in D_2$ 为两个函数，如果 $g(x)$ 的值域 $g(D_2)$ 包含于 $f(u)$ 的定义域 D_1，则可以定义 $y=f(g(x)),x\in D_2$ 为函数 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的**复合函数**，记作 $y=f(g(x))$ 或 $f0g$.

2. 反函数

设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的一个函数，其值域为 $f(D)$. 如果对于每一个 $y\in f(D)$，都有一个唯一确定的 x 使得 $f(x)=y$ 与之对应，我们就将该对应法则记作 f^{-1}，这个定义在 $f(D)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数.

【注】 (1)函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是，对于定义域 D 中任意两个不同的自变量 x_1,x_2，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

(2)复合函数、反函数以及函数的四则运算是函数最基本的运算，也是由简单的函数构造更为复杂的函数的基本方法.

3. 基本初等函数与初等函数

(1)**常函数**：C(C 为常数)，$x\in\mathbf{R}$.

(2)**幂函数**：x^a，定义域随 a 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有意义.

(3)**指数函数**：a^x(常数 $a>0,a\neq1$)，$x\in\mathbf{R}$.

(4)**对数函数**：$\log_a x$(常数 $a>0,a\neq1$)，$x\in(0,+\infty)$.

(5)**三角函数**：$\sin x,x\in\mathbf{R}$；$\cos x,x\in\mathbf{R}$；$\tan x,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$；$\cot x,x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(6)**反三角函数**：$\arcsin x$，$x\in[-1,1]$；$\arccos x$，$x\in[-1,1]$；$\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$；$\mathrm{arccot}x,x\in\mathbf{R}$.

以上 6 种函数称为**基本初等函数**，由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合得到的函数统称为**初等函数**.

【注】 幂指函数 $[f(x)]^{g(x)}$(其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为初等函数，且 $f(x)>0$)也是初等函数. 由于 $[f(x)]^{g(x)}$ 在运算中较为复杂，在高等数学中如果出现这类函数，我们基本的处理方式是将其作如下的等价变换：$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

4. 高等数学中常见的基本函数类型

1)初等函数

如函数 $f(x)=[\arctan x^2+\cos x]^{2x\tan x}$.

2)分段函数

根据自变量取值范围不同解析式有所不同的函数：$f(x)=\begin{cases}f_1(x),x\in I_1\\ f_2(x),x\in I_2\end{cases}$.

【注】 考生要熟悉的常见分段函数：

绝对值函数：$|x|$.