

R·S

岩土力学 公式速查手册

王文星 编著

Fast Lookup Handbook
of Rock and Soil
Mechanics Formulas



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

岩土力学公式速查手册

王文星 编著



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

岩土力学公式速查手册/王文星编著. —长沙:中南大学出版社,
2012. 8

ISBN 978-7-5487-0580-2

I. 岩... II. 王... III. 岩土力学-公式-手册 IV. TU4-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 165832 号

岩土力学公式速查手册

王文星 编著

☐责任编辑 刘 辉

☐责任印制 文桂武

☐出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路

邮编:410083

发行科电话:0731-88876770

传真:0731-88710482

☐印 装 长沙市华中印刷厂

☐开 本 787×1092 1/16 ☐印张 13.75 ☐字数 337 千字

☐版 次 2012 年 8 月第 1 版 ☐2012 年 8 月第 1 次印刷

☐书 号 ISBN 978-7-5487-0580-2

☐定 价 30.00 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

序

岩土力学的发展晚于工程力学(例如,弹性力学、材料力学),岩土力学用到一些工程力学公式,在工程力学的基础上也发展了一些岩土力学公式。由于岩土力学研究对象的复杂性,导致岩土力学中所用到的有些工程力学的公式和从工程力学导出的有些公式极其复杂。在当今知识爆炸的时代,各种岩土力学书籍为了节省篇幅,经常省去了这些公式的来源或推导过程。忙碌的工作和快速的生活节奏,使人们无暇去探究这些公式的来源。久而久之,许多学者便不知道这些公式是怎么来的了,留给后辈读者许多悬疑。

本书作者将常用的、重要的岩土力学公式收集、整理,按专题集成在一起,为从事岩土力学教学、科研的教师、科研人员和从事岩土工程设计施工的工程技术人员提供一本方便的手边书,也为学习岩土力学的大学本科生、研究生提供一本补充参考书。

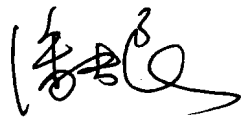
本书主要有下面三个特点:

①所介绍的公式来源清楚。部分公式还介绍了推导过程和不同的形式;相关公式之间的关系明确,自成系统,留给读者的悬疑少。

②所介绍的公式大多属于岩土力学理论和应用的精华部分,内容充实。

③所介绍的公式按专题汇集,选用方便:公式中的参数来源清楚,自我完善,使用起来得心应手。

本书内容充实、理论性和实用性较强,使用方便,是一本值得有关人员备用的工具性书。



2012.5

前 言

岩体力学和土力学的很多公式是在工程力学的基础上发展起来的,其中不乏复杂的公式,它们散见于各种岩土力学书籍中,有的介绍了来源或推导过程,有的来源不确切(主要是参考文献不具体),也没有介绍其推导过程(主要是受篇幅所限),有些公式还具有不同的形式。因此,往往使读者见到这些公式时产生疑问:这个公式是怎么得来的,是否有错误?然而,要查清其来源,往往需要花费不少的精力和时间。编写本书的目的是为从事岩土力学教学、科研和岩土工程技术工作的人员提供方便,也为本科生和研究生学习岩土力学提供一本参考书。

当然,没有必要,也不可能将所有的岩土力学公式汇集在一本书中,本书仅在工程力学的基础上,将一些重要的、常用的公式按专题集成在一起。全书分为两篇:第一篇命名为“工程力学基础”,介绍岩土力学中经常用到的材料力学和弹性力学的概念和公式,其中,第1章介绍应力符号的规定和应力状态方面的力学公式,第2章介绍位移和应变的力学公式,第3章介绍弹性力学五个专题的公式,即厚壁筒问题、圆孔附近的应力和位移、椭圆孔周边切向应力、半空间体在边界上受法向和切向集中力问题、半空间体内部受竖向和水平向集中力问题的解答;第二篇命名为“岩土力学专题”,共10章,分别介绍岩石的强度准则、原岩应力测定结果计算、压力隧道围岩和衬砌内的应力、挡土墙上土压力、坑道围岩稳定性分析和压力计算、边坡安全系数、地基中的应力、浅基础地基的极限承载力、地基沉降和岩土流变力学模型等方面的公式。

本书的出版,得到潘长良教授、谢学斌教授的大力支持,谢学斌教授、白冰博士对书稿提出了很好的建议,编者在此表示衷心的感谢!

书中引用了一些国内外专家、学者的著述,在此一并表示感谢!由于编者水平所限,书中错误和疏漏在所难免,恳请读者批评指正。

编者
2012.3

目 录

第一篇 工程力学基础

第 1 章 应力状态	(3)
1.1 应力符号规定	(3)
1.2 二维应力分析	(4)
1.3 二维空间中的坐标变换	(5)
1.4 三维空间中的应力	(7)
1.4.1 坐标变换公式及次主应力概念	(7)
1.4.2 主应力求解	(9)
1.4.3 主应力坐标系中任意斜平面上的正应力和剪应力	(13)
1.4.4 三维应力状态的应力圆及特殊斜截面上的应力	(13)
第 2 章 位移和应变	(15)
2.1 平面问题	(15)
2.1.1 几何方程	(15)
2.1.2 物理方程	(15)
2.1.3 相容方程	(16)
2.1.4 斜方向的应变	(17)
2.2 空间问题	(17)
2.2.1 一般空间问题	(17)
2.2.2 空间轴对称问题	(18)
第 3 章 弹性力学专题	(20)
3.1 厚壁筒公式	(20)
3.1.1 以拉应力为正、压应力为负时的厚壁筒公式	(20)
3.1.2 以压应力为正、拉应力为负时的厚壁筒公式	(21)
3.1.3 受均匀外压作用时, 厚壁筒内径变化	(21)
3.2 圆孔附近的应力和位移	(21)
3.2.1 一般三维应力状态下圆孔附近的应力和位移	(21)
3.2.2 平面应力和平面应变状态下圆孔附近的应力和位移	(23)
3.3 椭圆孔周边切向应力	(26)
3.3.1 椭圆的三种方程形式	(26)

3.3.2 椭圆孔周边切向应力的一般公式	(27)
3.3.3 在不同应力状态下椭圆孔周边切向应力	(28)
3.4 半空间体在边界上受集中力问题	(30)
3.4.1 半空间体边界上受法向集中力问题	(30)
3.4.2 半空间体边界上受切向集中力问题	(31)
3.5 集中荷载和线荷载作用于半空间体内部的问题	(32)
3.5.1 集中荷载作用于半空间体内的内部问题	(32)
3.5.2 线荷载作用于半空间体内部的问题	(35)

第二篇 岩土力学专题

第4章 岩石的强度准则	(41)
4.1 莫尔强度准则和莫尔-库仑强度准则	(41)
4.1.1 莫尔强度准则	(41)
4.1.2 莫尔-库仑强度准则	(45)
4.2 格里非斯准则	(49)
4.2.1 二维格里非斯准则	(49)
4.2.2 三维的格里非斯准则	(56)
4.3 八面体剪应力准则	(58)
4.4 耶格尔-库克强度准则	(58)
4.5 霍克-布朗经验强度准则	(61)
第5章 原岩应力测定结果计算	(69)
5.1 应力解除法	(69)
5.1.1 孔底应力解除法	(69)
5.1.2 孔径变形法	(71)
5.1.3 用三孔确定岩体三维应力	(73)
5.1.4 孔壁应变法	(74)
5.2 水压致裂法	(77)
5.3 平面应力测量结果的最小二乘方整理方法及测量结果的精密度估计 ^[25]	(80)
第6章 压力隧道围岩和衬砌内应力计算 ^[26]	(88)
6.1 有压隧洞围岩附加应力	(88)
6.2 有压隧道围岩和衬砌内应力计算	(89)
6.3 围岩抗力系数的确定 ^[18, 21]	(91)
第7章 挡土墙上的土压力	(93)
7.1 平面挡土墙上土压力 ^[27]	(93)

7.1.1 静止土压力	(93)
7.1.2 朗肯土压力理论	(93)
7.1.3 库仑土压力理论	(96)
7.2 空心圆柱体挡土墙上的土压力 ^[12]	(99)
第8章 坑道围岩稳定性分析和压力计算	(107)
8.1 圆形坑道围岩稳定性分析和变形压力计算 ^[20, 21]	(107)
8.2 矩形坑道松脱压力计算法	(112)
8.3 块体平衡理论分析	(115)
8.4 层状岩石顶板和边墙的稳定性分析	(117)
第9章 边坡安全系数	(122)
9.1 岩质边坡安全系数 ^[30]	(122)
9.1.1 平面破坏安全系数	(122)
9.1.2 楔体破坏安全系数	(125)
9.2 土质边坡安全系数	(131)
9.2.1 瑞典条分法 ^[27]	(131)
9.2.2 毕肖普条分法	(134)
9.2.3 简布的普遍条分法	(136)
第10章 地基中的应力	(140)
10.1 条形地基中的附加应力	(140)
10.1.1 竖向和水平线荷载作用下地基中的附加应力 ^[10]	(140)
10.1.2 在竖向均布荷载作用下条形地基中的附加应力	(142)
10.1.3 在水平均布荷载作用下条形地基中的附加应力 ^[10]	(146)
10.1.4 在竖向三角形分布荷载作用下条形地基中的附加应力 ^[10, 26]	(148)
10.1.5 在水平三角形荷载作用下条形地基中的附加应力 ^[26]	(151)
10.2 矩形地基中的附加应力	(154)
10.2.1 在竖向均布荷载下矩形地基中的附加应力 ^[9, 10, 33]	(154)
10.2.2 在水平均布荷载作用下矩形地基角点下的附加应力 ^[10, 34]	(156)
10.2.3 在竖向三角形分布荷载下矩形地基角点下附加应力 ^[10]	(157)
10.3 在均布荷载作用下复杂形状地基中的附加应力	(159)
10.3.1 用感应图法计算均布荷载下复杂形状地基中的附加应力 ^[2, 35, 36]	(159)
10.3.2 用三角形角点法计算均布荷载下复杂形状地基中的附加应力	(162)
第11章 浅基础地基极限承载力	(165)
11.1 岩石地基极限承载力	(165)
11.1.1 垂直荷载作用下地基极限承载力 ^[27]	(165)
11.1.2 倾斜荷载作用下地基极限承载力 ^[26]	(167)

11.2 土质地基极限承载力 ^[9, 27]	(169)
11.2.1 地基的临塑载荷与临界载荷	(169)
11.2.2 地基的极限承载力	(171)
第12章 地基沉降计算	(177)
12.1 岩质地基沉降计算 ^[36]	(177)
12.2 土质地基沉降计算 ^[9, 27]	(180)
12.2.1 土的压缩性	(180)
12.2.2 地基的最终沉降量计算	(182)
第13章 岩土流变力学模型	(188)
13.1 岩土的流变特性及其数学模拟方法	(188)
13.2 岩土的流变力学模型	(189)
13.2.1 流变模型元件	(189)
13.2.2 岩土的流变力学模型	(190)
附录 有关积分公式和换元积分法	(206)
参考文献	(208)

第一篇

工程力学基础

第1章 应力状态

1.1 应力符号规定

关于应力符号,在材料力学和弹性力学中都有各自的统一规定,但在岩土力学中,应用弹性理论时,应力符号的规定与弹性力学不同。为了读者阅读参考文献的方便,本书不作统一的规定,但是,有必要首先介绍一下这些规定,并在本书相应的部分对其应力符号的规定给予注明。

在材料力学中,对应力符号的规定是:正应力以拉应力为正,压应力为负,剪应力以顺时针为正,逆时针为负,如图1-1所示, σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 为正, τ_{yx} 为负,斜截面上的应力 σ 和 τ 也为正。斜截面外法线相对于 x 轴正向的转角 α 以逆时针为正,顺时针为负。按照这样的规定,剪应力互等关系为 $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, 并可以直接应用莫尔应力圆进行二维应力分析,求解任意斜截面上的应力。

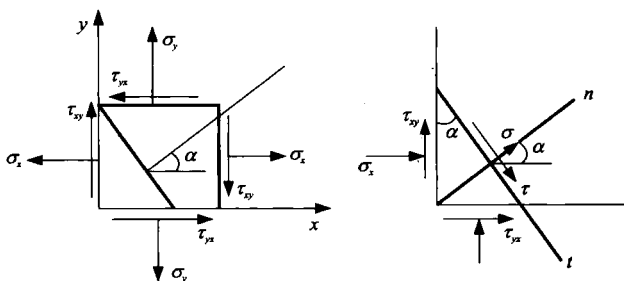


图1-1 材料力学中关于应力符号的规定

在弹性力学中,对应力符号的规定是:当截面外法线沿坐标轴正向时,该截面上的应力分量以沿坐标轴正向为正,沿坐标轴负向为负;相反,当截面外法线沿坐标轴负向时,该截面上的应力分量以沿坐标轴负向为正,沿坐标轴正向为负。图1-2所示的各应力均为正。按照这样的规定,剪应力互等关系为 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 不能应用莫尔应力圆进行二维应力分析,要用莫尔应力圆,则必须按材料力学的规定。

在岩土力学中,应用弹性理论进行岩土中应力计算时,应力符号的规定法则与弹性力学相同,但正负号与弹性力学相反。即当一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向,这个截面就称为正面,正面上的应力分量以沿坐标轴正向为负,沿坐标轴的负方向为正,如图1-3所示。按照这一规定,剪应力互等关系也为 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。

但是,在用莫尔应力圆进行二维应力分析时,规定法向应力以压应力为正,剪应力符号规定与材料力学相反,即以逆时针方向为正。

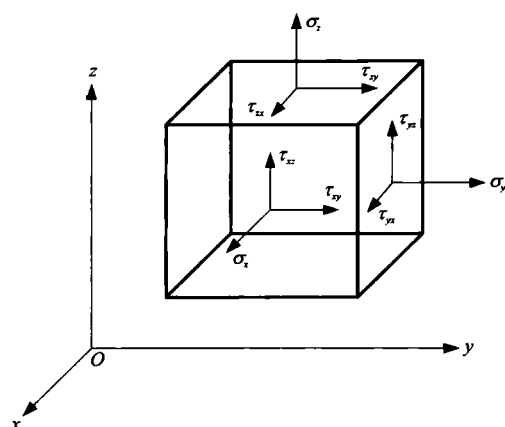


图 1-2 弹性力学中应力符号的规定

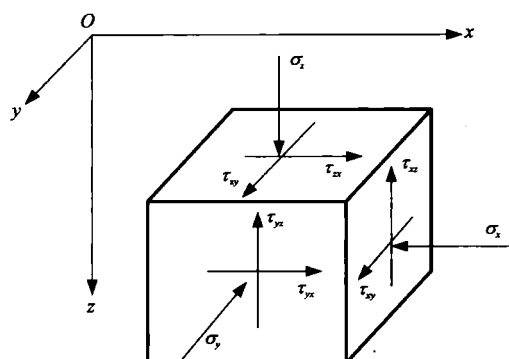


图 1-3 岩土力学中应力符号的一般规定 (与弹性力学相反)

1.2 二维应力分析

按照岩土力学对应力符号的规定,一般二维应力状态可用图 1-4 所示表示。^[1]

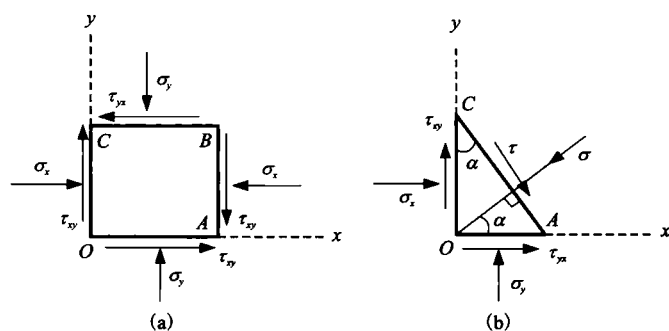


图 1-4 二维应力分析 (应力符号与弹性力学相反)

在图 1-4(b)中, σ 和 τ 均为正。设斜边长为 dl , 考虑斜截面法线方向的平衡, 则有:

$$\sum F_n = 0,$$

即 $\sigma \cdot dl - \tau_{xy} dl \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot dl \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_x dl \cos \alpha \cos \alpha - \sigma_y dl \sin \alpha \sin \alpha = 0$

因为 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 化简上式得

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1-1)$$

同理, 考虑斜截同切线方向的平衡, 得

$$\sum F_t = 0,$$

即 $\tau dl - \tau_{xy} dl \cos^2 \alpha + \sigma_x dl \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{yx} dl \sin^2 \alpha - \sigma_y dl \sin \alpha \cos \alpha = 0$.

化简得

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (1-2)$$

在应用莫尔应力圆进行二维应力分析时,斜截面外法线相对于 x 轴正向转角以逆时针为正(或从 x 轴方向朝 y 方向旋转的转角为正),法向应力以压应力为正,剪应力以逆时针为正。这时,图 1-4(a)中右侧面上的应力为图 1-5 中 d 点的坐标,设 cd 与 σ 轴夹角为 2θ ,图 1-4(b)中斜截面上的应力 σ 和 τ 为图 1-5 中 e 点的坐标。

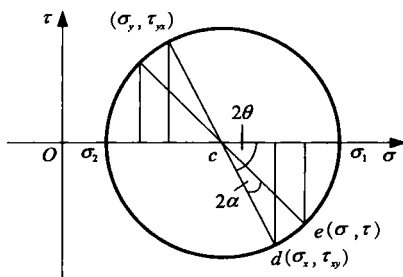


图 1-5 用莫尔应力圆进行二维应力分析

由图 1-5 的几何关系知,

$$\begin{aligned} \sigma &= Oc + cdcos(2\theta - 2\alpha) = Oc + cdcos2\alpha cos2\theta + cdsin2\alpha sin2\theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos2\alpha + \tau_{xy} sin2\alpha \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$\begin{aligned} \tau &= cdsin(2\theta - 2\alpha) = cdsin2\theta cos2\alpha - cdcos2\theta sin2\alpha \\ &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin2\alpha + \tau_{xy} cos2\alpha \end{aligned} \quad (1-4)$$

可见式(1-3)与式(1-4)分别与式(1-1)和式(1-2)相同。

1.3 二维空间中的坐标变换

当采用与弹性力学相反的应力符号规定时,式(1-1)和式(1-2)中的应力 σ 和 τ 可以看作是坐标轴 Ox 和 Oy 同步逆时针旋转 α 角后的应力 $\sigma_{x'}$ 和 $\tau_{x'y'}$,至于 $\sigma_{y'}$,以 $\alpha + \pi/2$ 代替(1-1)式中的 α ,即可得到。因此,二维应力的坐标变换公式为:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1-5)$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1-6)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (1-7)$$

由(1-5)和(1-6)式,知:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad (1-8)$$

这是一个应力不变量,即这两个正应力之和不随坐标变换而变化。

根据(1-7)式,欲使剪应力 $\tau_{x'y'} = 0$,坐标旋转角度 α 必须满足下面条件:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1-9)$$

这时, $\sigma_{x'}$ 和 $\sigma_{y'}$ 都变成了主应力。

所以,在满足(1-9)式的情况下,(1-5)、(1-6)两式变成:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-10)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-11)$$

由式(1-3)和(1-4)知,应用应力圆知识,可以直接得到坐标变换公式。

以直角坐标向极坐标转换为例,如图1-6所示,设从 x 轴方向逆时针旋转 θ 角,为 r 轴方向。已知直角坐标系中的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,试求极坐标中的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 。

在小三角形 A 中,令斜边长为 ds ,取三角形厚度为一个单位。

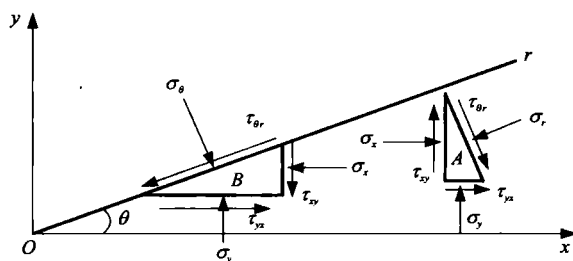


图1-6 极坐标与直角坐标的关系

按照岩土力学对应力符号的规定,考虑 r 方向和 θ 方向的平衡,即

$$\sum F_r = 0$$

$$\sigma_r ds - \sigma_x ds \cos\theta \cos\theta - \sigma_y ds \sin\theta \sin\theta - \tau_{xy} ds \cos\theta \sin\theta - \tau_{yx} ds \sin\theta \cos\theta = 0$$

用 τ_{xy} 代替 τ_{yx} ,进行简化,得

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-12)$$

$$\sum F_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} ds - \tau_{xy} ds \cos\theta \cos\theta + \tau_{yx} ds \sin\theta \sin\theta - \sigma_y ds \sin\theta \cos\theta + \sigma_x ds \cos\theta \sin\theta$$

化简得

$$\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (1-13)$$

又从小三角形 B ,考虑 θ 方向的平衡,即

$$\sum F_\theta = 0$$

$$\sigma_\theta ds + \tau_{yx} ds \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy} ds \sin\theta \cos\theta - \sigma_y ds \cos\theta \cos\theta - \sigma_x ds \sin\theta \sin\theta$$

化简得

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad (1-14)$$

最后,将上面三式写在一起,并利用三角公式,得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (a) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (b) \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

利用应力圆,注意到图1-6的三角形 A 中 σ_x 为正, τ_{xy} 为负,它们是图1-7中 d 点的坐

标, 而斜截面上应力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 是图 1-7 中 e 点的坐标。

从图 1-7 的几何关系知:

$$\sigma_r = Oc + cdcos(2\alpha - 2\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \quad (1-16)$$

$$\tau_{r\theta} = cdsin(2\alpha - 2\theta) = \tau_{xy}\cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta \quad (1-17)$$

至于 σ_θ , 将(1-16 式中的 θ 换成 $90^\circ + \theta$, 即可得到, 即

$$\sigma_\theta = oc + cdcos[2\alpha - 2(90^\circ + \theta)] = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \quad (1-18)$$

可见, 式(1-16)、(1-17)、(1-18)合写在一起, 则与(1-15)式完全相同。

同理, 可以得到极坐标向直角坐标的坐标变换式。

因为从 r 向 x 方向是顺时针方向, 从图 1-8 的几何关系有:

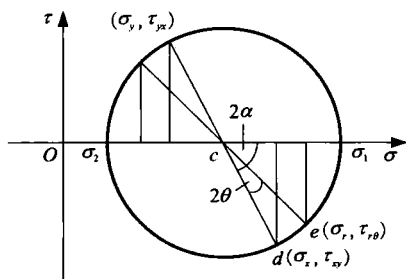


图 1-7 应力分量从直角坐标向极坐标变换

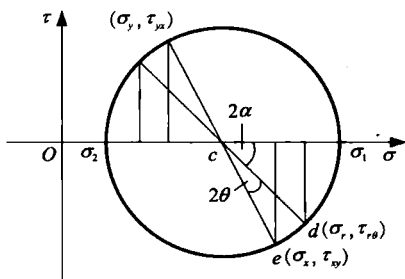


图 1-8 应力分量从极坐标向直角坐标变换

$$\sigma_x = Oc + cdcos(2\alpha + 2\theta) = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta - \tau_{r\theta}\sin 2\theta \quad (1-19)$$

$$\sigma_y = Oc - cdcos(2\alpha + 2\theta) = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{r\theta}\sin 2\theta \quad (1-20)$$

$$\tau_{xy} = cdsin(2\alpha + 2\theta) = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\sin 2\theta + \tau_{r\theta}\cos 2\theta \quad (1-21)$$

1.4 三维空间中的应力^[1]

图 1-9(a)所示为一般三维应力状态。共有 9 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{yx}$ 和 τ_{zy} 。考虑到立方体的平衡, 则严格遵循剪应力互等定律, 即:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1-22)$$

1.4.1 坐标变换公式及次主应力概念

图 1-9(b)为一个微小四面体, 设 ABC 的面积为 s , 其法线相对于 Ox, Oy 和 Oz 轴的方向余弦为 l, m, n 。则 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ 的面积分别为 sn, sl 和 sm 。

假定 p_x, p_y, p_z 分别是作用在 ABC 面上的应力在 x, y, z 方向上的分量, 考虑 x 方向的平

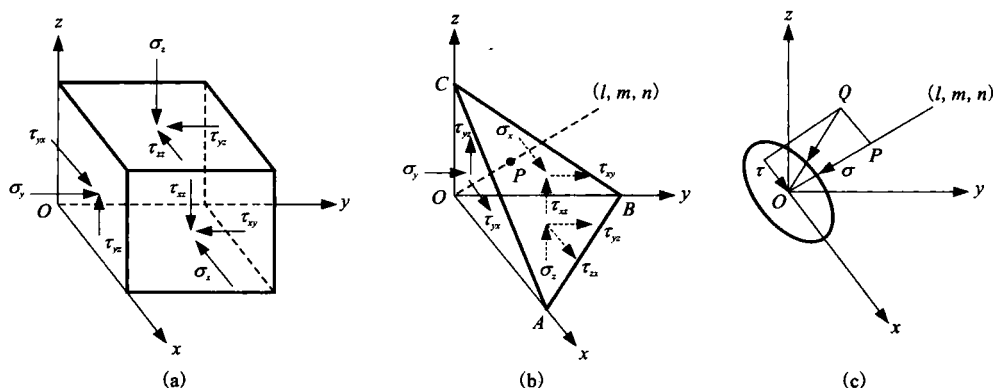


图 1-9 般三维应力状态

衡,可以得到

$$sp_x = sl\sigma_x + sm\tau_{yx} + sn\tau_{zx}$$

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \quad (1-23)$$

简化为

类似地,考虑 y, z 方向的平衡得到

$$p_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \quad (1-24)$$

$$p_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \quad (1-25)$$

平面 ABC 上的正应力为

$$\sigma = lp_x + mp_y + np_z = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \quad (1-26)$$

设坐标轴从 Ox, Oy, Oz 旋转到 Ox', Oy', Oz' , 新坐标轴相对于老坐标轴的方向余弦分别为: $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$, 则由(1-26)式知, 法线为 Ox' 的面上的正应力为:

$$\sigma_{x'} = l_1^2\sigma_x + m_1^2\sigma_y + n_1^2\sigma_z + 2m_1n_1\tau_{yz} + 2n_1l_1\tau_{zx} + 2l_1m_1\tau_{xy} \quad (1-27)$$

同理可得应力分量 $\sigma_{y'}$ 和 $\sigma_{z'}$ 为

$$\sigma_{y'} = l_2^2\sigma_x + m_2^2\sigma_y + n_2^2\sigma_z + 2m_2n_2\tau_{yz} + 2n_2l_2\tau_{zx} + 2l_2m_2\tau_{xy} \quad (1-28)$$

$$\sigma_{z'} = l_3^2\sigma_x + m_3^2\sigma_y + n_3^2\sigma_z + 2m_3n_3\tau_{yz} + 2n_3l_3\tau_{zx} + 2l_3m_3\tau_{xy} \quad (1-29)$$

剪应 $\tau_{x'y'}$ 在 $x' - O - y'$ 面内与 Oy' 轴平行, 因此有:

$$\tau_{x'y'} = p_x l_2 + p_y m_2 + p_z n_2 \quad (1-30)$$

将(1-23)、(1-24)、(1-25)式代入(1-30)式, 得:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= l_2(l_1\sigma_x + m_1\tau_{yx} + n_1\tau_{zx} + m_2(l_1\tau_{xy} + m_1\sigma_y + n_1\tau_{zy}) + n_2(l_1\tau_{xz} + m_1\tau_{yz} + n_1\sigma_z)) \\ &= l_1l_2\sigma_x + m_1m_2\sigma_y + n_1n_2\sigma_z + (m_1n_2 + m_2n_1)\tau_{yz} + (n_1l_2 + n_2l_1)\tau_{zx} + (l_1m_2 + l_2m_1)\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1-31)$$

同理, 在 $x' - O - z'$ 面内, $\tau_{x'z'}$ 平行于 Oz' , 在 $y' - O - z'$ 面内, $\tau_{y'z'}$ 平行于 Oy' , 因此有:

$$\tau_{x'z'} = l_1l_3\sigma_x + m_1m_3\sigma_y + n_1n_3\sigma_z + (m_1n_3 + m_3n_1)\tau_{yz} + (n_1l_3 + n_3l_1)\tau_{zx} + (l_1m_3 + l_3m_1)\tau_{xy} \quad (1-32)$$

$$\tau_{y'z'} = l_2l_3\sigma_x + m_2m_3\sigma_y + n_2n_3\sigma_z + (m_2n_3 + m_3n_2)\tau_{yz} + (n_2l_3 + n_3l_2)\tau_{zx} + (l_2m_3 + l_3m_2)\tau_{xy} \quad (1-33)$$

在二维空间的坐标变换讨论中谈到, 当坐标旋转满足(1-9)式时, 则 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, σ_x 和