普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计

（经管类）

主　编　刘文斌

副主编　石　莹

　　　　程　斌

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

前　言

本书根据高等院校经管类专业“概率论与数理统计”课程的教学大纲编写而成，内容设计简明，但结构体系上又不失完整，其中涵盖了概率论的基本概念、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验.

因为面向的是经济管理类学生，而非数学专业的学生，本着“打好基础，够用为度；服务专业，兼顾数学体系”的原则，本书不盲目攀比难度，而是力求做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通.在数学思想和方法的讲解过程中，注重与实践应用背景相结合，强调应用能力的培养，同时适当注意知识面的拓宽.

例题与习题是教材的窗口，集中展示了教学意图.本书对例题、习题给予高度重视，例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，每一个题目都经过再三验算.不仅书后有习题答案，而且我们还编写了习题详解.这些将对学生的课后复习、疑难解答、自学提高以及创新能力的培养起到积极作用.

为了加深对概念的理解，培养逻辑推理能力，比较简单的定理尽量给出证明，这有助于对这些定理的掌握和运用；对于某些证明过程复杂的定理和性质，省略了其证明过程。加“*”号的内容不作要求，供读者深入学习时备选。

本书主要内容基本适用于一个学期(54 学时)的讲授安排。

本书在编写的过程中,一直受到学院及出版社相关领导的热情鼓励与大力支持,并获得了多名相关专家、教授和同事的悉心指导与积极帮助,在此,作者向上述相关职能部门、相关领导、专家、教授和同事表示最真挚的谢意!

百密总有一疏,恳请各位专家、教师与广大读者提出宝贵意见.编者将会根据各位专家、教师与广大读者提出的建议,对教材不断改进与完善,坚持不懈地提高质量,突出自己的特色,更好地为教学第一线服务.

编　者

2011 年 11 月

目 录

第1章

随机事件及其概率

概率论与数理统计是一门应用数学学科，它从定量的角度来研究与揭示现实世界中不确定现象(随机现象)的统计规律性. 20世纪以来，广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 本章重点介绍概率论中的两个方面内容：随机事件及其概率，它们是学习概率论与数理统计的基础.

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象

自然界与人类社会中存在和发生的各种现象，其种类大致可以归结为两类：确定性现象与随机现象.

例如，在一个标准大气压下，纯净水加热到100℃时必然沸腾，温度降到0℃时又必然会结冰；向上抛掷重物必然自由落下；等等. 这种在一定条件下必然会发生的现象，称为**确定性现象**.

又如，在相同的条件下抛同一枚硬币，事先无法预知是正面朝上还是反面朝上；下一个星期的股市是涨还是跌；等等. 这种在一定条件下事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**.

但人们经过长期实践并深入研究后，发现随机现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性. 例如，一枚均匀的硬币抛掷多次，正面和反面朝上的次数比例总是近似于1∶1，而且大体上抛掷次数愈多，愈接近这个比值. 下面是历史上一些科学家所做的抛硬币试验的相关数据(表1-1-1).

表1-1-1　　历史上一些著名的抛硬币试验数据

实验者	抛掷次数(n)	正面次数(n_H)	正面频率$\left(\frac{n_H}{n}\right)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
浦　丰	4 040	2 048	0.506 9

续表

实验者	抛掷次数(n)	正面次数(n_H)	正面频率$\left(\frac{n_H}{n}\right)$
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

从表中可以看到,随着试验次数的增加,正面朝上的次数所占的比例将逐渐稳定于50%.这种在大量试验中呈现的稳定性,我们将其称之为**统计规律性**.正是这种规律性的存在,使得我们利用数学工具研究随机现象成为可能.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学分支.

1.1.2 随机试验

对随机现象的统计规律性进行研究时,需要对随机现象进行重复观察,我们把对随机现象的观察称为**试验**.记为 E.

例如,E_1:抛一枚硬币两次,观察正面 H,反面 T 出现的情况;E_2:记录电话交换台在单位时间内收到的呼叫次数;E_3:抛一颗骰子,观察出现的点数;E_4:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命;E_5:记录某一天城市发生车祸的次数;等等.概括起来,这些试验具有以下共同的特点:

(1) 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,但事先知道所有可能的结果;

(3) 不确定性:每次试验出现的结果事先不能预知,但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中,我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**.简称为**试验**.

我们常常是通过随机试验来研究随机现象的.

1.1.3 样本空间与随机事件

1. 样本空间

由上述随机试验的第二个特点知道,尽管试验前不能准确预知出现哪个结果,但其所有可能结果是明确的.我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**,记为 Ω(或 S).其中 Ω 中的元素,即 E 的每一个可能结果,称为**样本点**,一般用 ω 表示.

例 1 抛一枚硬币两次,观察其出现正面 H 或反面 T 的试验中,其样本空间为 $\Omega_1=\{HH, HT, TH, TT\}$.

例 2 记录电话交换台在单位时间内收到的呼叫次数,其样本空间为:$\Omega_2=$

$\{0, 1, 2, \cdots\}$.

例 3　抛一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为：$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 4　在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命，其样本空间为：$\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}$.

例 5　记录某一天城市发生车祸的次数，其样本空间为：$\Omega_5 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

例 6　将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数，其样本空间：$\Omega_6 = \{0, 1, 2\}$.

同样是试验将硬币抛掷两次，但是 Ω_1 和 Ω_6 截然不同. 这说明，试验的目的不同样本空间也不同.

2. 随机事件

在随机试验中，人们通常不仅关心某个样本点出现，更关心满足某些条件的样本点出现. 例如，在上述 E_3 中，我们可能关心是否出现点数 2 或是否出现偶数点(即点数 2，4，6)等结果. 它们都为样本空间的子集，于是，我们把 E 中可能发生也可能不发生的事件称之为**随机事件**，简称为**事件**. 随机事件通常用大写英文字母 A, B, C 等表示. 此外我们称仅含一个样本点的随机事件为**基本事件**；称含有两个或两个以上样本点的随机事件为**复合事件**；称在每次试验中都必然发生的事件为**必然事件**，用 Ω 或 S 表示；称在任何一次实验中都不可能发生的事件为**不可能事件**，用 ϕ 表示.

例如，事件 A 表示抛一颗骰子一次，出现了 2 点，即 $A = \{2\}$, A 为基本事件；事件 B 表示抛一颗骰子出现的点数小于 5，即 $B = \{1, 2, 3, 4\}$, B 为复合事件；C 表示抛一颗骰子出现的点数小于 7，即 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$, C 为必然事件；D 表示抛一颗骰子出现的点数大于 7，即 $D = \phi$, D 为不可能事件.

很明显，必然事件和不可能事件都是确定性的事件，但是为了讨论问题的方便，也把它们看做特殊的随机事件.

3. 事件的关系与运算

由上分析可知，事件可表示为集合，因此，随机事件之间的关系与运算在本质上与集合之间的关系与运算是一致的. 为此，随机事件的关系与运算可以以集合论的观点和表示方法给出.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，而 A, B, $A_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集，则事件的一些关系与运算如下.

(1) 事件的**包含**关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A **包含于**事件 B 中，或称事件 B

包含事件 A,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,显然 $\phi \subset A \subset \Omega$.

(2) 事件的**相等**关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,且事件 B 发生必然导致事件 A 发生,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B **相等**. 记为 $A = B$.

(3) 事件的**和(并)**运算

事件 $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A 或 \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和**(或**并**). 其含义是:当且仅当事件 A, B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生. $A \cup B$ 亦可记为 $A + B$.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的**和事件**, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 有时也记为 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可数个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ 的**和事件**, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 有时亦可记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 事件的**积(交)**运算

事件 $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A 且 \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积**(或**交**). 其含义是:当且仅当事件 A,B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. 事件 $A \cap B$ 也记为 AB.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_n$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的**积事件**, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_n$ 有时也记为 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_n$.

称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n$ 为可数个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ 的**积事件**, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n$ 有时也记为 $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_n$.

(5) 事件的**差**运算

事件 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A 且 \omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差**. 其含义是:当且仅当事件 A 发生,且事件 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生.

例如,设 $A = \{2, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $A - B = \{5\}$.

易见 $A - B = A\bar{B}$ 或 $A - B = A - AB$.

(6) 事件的**互不相容(互斥)**关系

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB = \phi$,则称事件 A 与事件 B **互不相容**,亦称事件 A 与事件 B **互斥**.

例如,基本事件是两两互不相容的.

(7) 事件的**对立(互逆)**关系

若每次试验,事件 A, B 中有且仅有一个发生,即 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \phi$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**,或称 A 为 B 的**逆事件**. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$,于是,$\overline{A} = \Omega - A$.

注: 两个互为对立的事件一定是互斥事件;反之,互斥事件不一定是对立事件. 而且,互斥可用于多个事件,但是对立只适用于两个事件.

图 1-1-1— 图 1-1-7 可直观地表示以上事件之间的关系与运算.

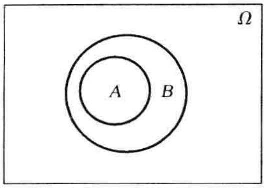

图 1-1-1　A 包含于 B

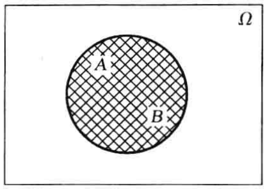

图 1-1-2　A 与 B 相等

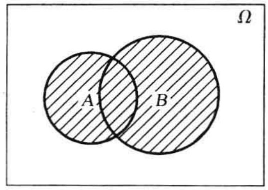

图 1-1-3　A 与 B 的和

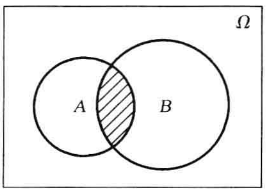

图 1-1-4　A 与 B 的积

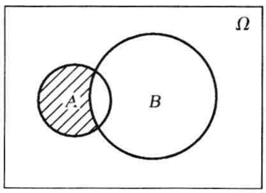

图 1-1-5　A 与 B 的差

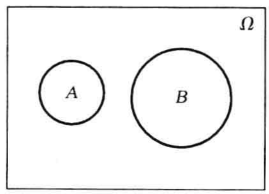

图 1-1-6　A 与 B 互不相容

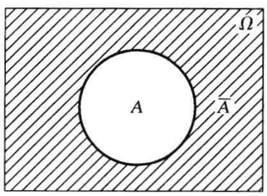

图 1-1-7　A 的对立事件 $\overline{A}$

4. 事件的运算规律

设 A, B, C 为同一随机试验 E 中的事件,则有:

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(4) 自反律　$\overline{\overline{A}} = A$.

(5) 德摩根律(对偶律)　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

注:上述各运算律都可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 7　检验矩形钢板产品,只有当长、宽、厚三者的尺寸都合格时,钢板产品才是合格的.试分析下列事件的关系与运算.

A_1:"长合格",B_1:"长不合格";A_2:"宽合格",B_2:"宽不合格";A_3:"厚合格",B_3:"厚不合格";C_1:"长、宽、厚都合格",C_2:"长、宽合格,厚不合格";D_1:"产品合格",D_2:"产品不合格".

解　D_1 发生必然导致 A_1, A_2, A_3 发生.所以下面三个包含关系成立:

$$D_1 \subset A_1,\ D_1 \subset A_2,\ D_1 \subset A_3.$$

B_1, B_2, B_3, C_2 发生必然导致 D_2 发生,所以下面四个包含关系成立:

$$B_1 \subset D_2,\ B_2 \subset D_2,\ B_3 \subset D_2,\ C_2 \subset D_2.$$

显然,包含关系 $C_1 \subset D_1$ 和 $D_1 \subset C_1$ 同时成立,所以有 $C_1 = D_1$.

根据和事件与积事件的定义,下面四个等式成立:

$$D_2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup C_2,\ C_1 = A_1A_2A_3,$$

$$C_2 = A_1A_2B_3,\ D_1 = A_1A_2A_3.$$

根据逆事件的定义,下面三个等式成立:

$$\overline{A_1} = B_1,\ \overline{A_2} = B_2,\ \overline{A_3} = B_3.\ (\text{即}\overline{A_i} = B_i,\ i = 1,\ 2,\ 3)$$

根据互不相容事件的定义,有:

$$B_1D_1 = \varnothing,\ B_2D_1 = \varnothing,\ B_3D_1 = \varnothing.$$

例 8　设 A, B, C 为三个事件,用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 与 B 都发生,但 C 不发生;

(2) A 发生,且 B 与 C 至少有一个发生;

(3) A, B, C 至少有一个发生;

(4) A, B, C 恰好有一个发生;

(5) A, B, C 至多有两个发生;

(6) A, B, C 不全发生.

解　(1) $AB\overline{C}$; (2) $A(B \cup C)$; (3) $A \cup B \cup C$; (4) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; (5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$ 或 $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$; (6) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

注:用其他事件的运算来表示一个事件,方法不唯一,如例 8 中的(5)和(6)实

际上是同一事件，所以我们在解决具体问题时要选择一种恰当的表示方法.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 将一枚硬币抛掷三次，观察正面出现的次数；

(2) 同时抛掷两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

(3) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(4) 在单位圆内任取两点，观察这两点的距离；

(5) 观察某医院一天内前来就诊的人数.

2. 甲、乙、丙三门炮各向同一目标发射一发炮弹，设事件 A 表示甲炮击中目标，事件 B 表示乙炮击中目标，事件 C 表示丙炮击中目标，则用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件.

(1) 甲炮未击中目标；

(2) 甲炮击中目标而乙炮未击中目标；

(3) 三门炮中只有丙炮未击中目标；

(4) 三门炮中恰好有一门炮击中目标；

(5) 三门炮中至少有一门炮击中目标；

(6) 三门炮中至少有一门炮未击中目标；

(7) 三门炮中恰好有两门炮击中目标；

(8) 三门炮中至少有两门炮击中目标；

(9) 三门炮均未击中目标；

(10) 三门炮中至多有一门炮击中目标；

(11) 三门炮中至多有两门炮击中目标.

3. 指出下列各等式命题是否成立，并说明理由.

(1) $A \cup B = (A\bar{B}) \cup B$；

(2) $\bar{A}B = A \cup B$；

(3) $\overline{A \cup B} \cap C = \overline{AB}\,\bar{C}$；

(4) $(AB)(A\bar{B}) = \varnothing$.

4. 叙述下列事件的对立事件.

(1) A:“掷两枚硬币，皆为反面”；

(2) B:“生产三件产品，至少有一件是合格品”；

(3) C:“投篮三次，皆为投中”.

5. 化简下列事件.

(1) $(\bar{A} \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)$；　(2) $A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$.

6. 证明：$B - A = \overline{AB} - \overline{\bar{A}B}$.

1.2 随机事件的概率

研究随机现象,不仅需要知道可能出现哪些事件,更重要且更具实际意义的是需要研究、了解各事件发生可能性的大小,并加以度量.例如,为了确定水坝的高度,就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小.我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小.为此,首先引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 频率及其性质

定义 1 在相同条件下进行了 n 次试验,其中事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$,称为事件 A 的**频数**,比值$\frac{r_n(A)}{n}$称为事件 A 发生的**频率**,并记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$.

易见,频率具有如下三条最基本的性质.

(1) 非负性 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$; (1.2.1)

(2) 规范性 $f_n(\Omega)=1$; (1.2.2)

(3) 有限可加性 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m). \tag{1.2.3}$$

由于事件 A 发生的频率大小表示 A 发生的频繁程度.若频率大,则事件 A 发生就频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性就大.且当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于某个常数.

例如,抛掷一枚均匀硬币时,从表 1-1-1 中我们可以看到,随着试验次数的增加,正面朝上的频率呈现出稳定性.即当 n 逐渐增大时,正面朝上的频率总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5.

又例如,检查某制衣厂一批衣服的质量,从中分别抽取 10 件、20 件、50 件、100 件、150 件、200 件、300 件检查,检查结果及次品频率列入表 1-2-1.

表 1-2-1

抽取产品总件数 n	10	20	50	100	150	200	300
次品数 μ	0	1	3	5	7	11	16
次品频率 $\frac{\mu}{n}$	0	0.050	0.060	0.050	0.047	0.055	0.053

由表 1-2-1 看出，在抽出的 n 件产品中，次品数 μ 随着 n 的不同而取不同值，但次品频率 $\frac{\mu}{n}$ 仅在 0.05 附近有微小变化. 所以 0.05 是次品频率的稳定值.

由此我们让实验重复多次，计算频率 $f_n(A)$，事件 A 发生的可能性大小就可以用频率 $f_n(A)$ 的稳定值来描述.

1.2.2 概率的统计定义

定义 2　在观察某一随机事件 A 的随机试验中，若事件 A 发生的频率 $f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件 A 的**概率**，并称其为**统计概率**，即 $P(A) = p$.

频率的稳定值是概率的外在表现，并非概率的本质. 据此确定某事件的概率是困难的，但当进行大量重复试验时，频率会接近稳定值，因此，在实际应用时，往往是用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高。

1.2.3 概率的公理化定义

在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的实验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生可能性的大小. 同时，为了理论研究的需要，必须给出概率的严格数学定义. 从概率论有关问题的研究算起，经过近三个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义. 1933 年，苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫，在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

定义 3　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1) **非负性**：对每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；　(1.2.4)

(2) **规范性**：$P(\Omega) = 1$；　(1.2.5)

(3) **可列可加性**：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.2.6}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

1.2.4 概率的性质

性质 1　$P(\varnothing) = 0$.　(1.2.7)

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$, 且 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$; $i,j=1,2,\cdots$.

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

而实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$,故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

注: 不可能事件的概率为零,概率为零的事件不一定是不可能事件.

性质 2(有限可加性) 设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\tag{1.2.8}$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,即有 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$; $i,j=1,2,\cdots$.

由可列可加性及性质 1.1 得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 3 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A);\ P(B)\geqslant P(A).\tag{1.2.9}$$

证 因 $A=(A-B)\cup AB$, 且 $(A-B)(AB)=\varnothing$,再由概率的有限可加性,即得

$$P(A)=P(A-B)+P(AB),\ \text{所以}\ P(A-B)=P(A)-P(AB);$$

由 $A\subset B$,知 $B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\varnothing$,再由性质 2 和概率的非负性可得

$$P(B-A)=P(B)-P(A);\ P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4 对于任一事件 A, $P(A)\leqslant 1$.

证 由 $A\subset\Omega$,再由性质 3 得

$$P(A)\leqslant P(\Omega)=1.$$

性质 5 对于任一事件 A, $P(\overline{A})=1-P(A)$. (1.2.10)

证 由于 $\overline{A}\cup A=\Omega$, $A\overline{A}=\varnothing$,再由概率的规范性和有限可加性,得

$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$，故 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 6　对于任意两个事件 A, B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2.11}$$

证　因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$，$A(B-AB) = \varnothing$，再由性质 2、性质 3 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

注：该性质还可推广到任意 n 个事件的和的情形. 例如，设 A, B, C 为任意三个事件，则有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = &P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - \\ &P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

例 1　产品分一等品、二等品及废品三种，若一等品率为 0.71，二等品率为 0.26，并规定一等品或二等品为合格品，求：(1) 产品的合格品率；(2) 产品的废品率.

解　(1) 设事件 $A_1 = \{$一等品$\}$，事件 $A_2 = \{$二等品$\}$，事件 $A = \{$合格品$\}$，由题意得

$$P(A_1) = 0.71,\ P(A_2) = 0.26,\ A_1A_2 = \varnothing.$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.71 + 0.26 = 0.97.$$

所以产品的合格品率为 0.97.

(2) $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.97 = 0.03.$$

所以产品的废品率为 0.03.

例 2　据天气预报，某市第一天下雨的概率为 0.6，第二天下雨的概率为 0.3，两天都下雨的概率为 0.1. 试求下列事件的概率：

(1) 第一天下雨但第二天不下雨；

(2) 第一天不下雨但第二天下雨；

(3) 两天至少有一天下雨；

(4) 两天至少有一天不下雨；

(5) 两天都不下雨.

解　设 $A_i = \{$第 i 天下雨$\}$，$i = 1, 2$，由题意得

(1) 因 $A_1\overline{A_2} = A_1 - A_2 = A_1 - A_1A_2$，$A_1A_2 \subset A_1$，故

$P(A_1\overline{A_2}) = P(A_1) - P(A_1A_2) = 0.6 - 0.1 = 0.5.$

(2) $P(\overline{A_1}A_2) = P(A_2) - P(A_1A_2) = 0.3 - 0.1 = 0.2$.

(3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0.6 + 0.3 - 0.1 = 0.8$.

(4) $P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = P(\overline{A_1A_2}) = 1 - P(A_1A_2) = 0.9$.

(5) $P(\overline{A_1}\overline{A_2}) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 0.2$.

例 3 设 $P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.3$， $P(A \cup B) = 0.6$，求 $P(A - B)$ 及 $P(B - A)$.

解 因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，

所以 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.1$.

又因为 $A = AB + A\overline{B}$，$AB \cap A\overline{B} = \phi$，

所以 $P(A) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$，

$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3$.

同理 $P(B - A) = P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = 0.2$.

习题 1-2

1. 设 $AB = \phi$，$P(A) = 0.6$，$P(A \cup B) = 0.8$，求事件 B 的逆事件的概率.

2. 已知 $P(\overline{A}) = 0.5$，$P(\overline{A}B) = 0.2$，$P(B) = 0.4$，求：(1) $P(AB)$；(2) $P(A-B)$；(3) $P(A \cup B)$；(4) $P(\overline{A}\overline{B})$.

3. 设 A，B 都出现的概率与 A，B 都不出现的概率相等，且 $P(A) = p$，求 $P(B)$.

4. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = P(BC) = 0$，$P(AC) = \frac{1}{8}$，求 A，B，C 三个事件至少有一个发生的概率.

1.3 古典概型

为了更深刻地揭示概率的本质，我们先行讨论等可能概型，即古典概型. 以抛掷质地均匀的硬币为例，人们自然想到由于硬币两面是对称的，所以出现“正面”和“反面”的可能性都一样，人们有理由认为出现“正面”和“反面”的可能性都是 $\frac{1}{2}$.

这样一类随机试验是最简单的概率模型，它曾经是概率论发展初期主要的研究对象.

1.3.1 古典概型

我们称具有下列两个特点的随机试验所对应的概率模型为**古典概型**.