SHUXUE FENXI XUANXIANG

数学分析选讲

编著 何新龙 陈克军

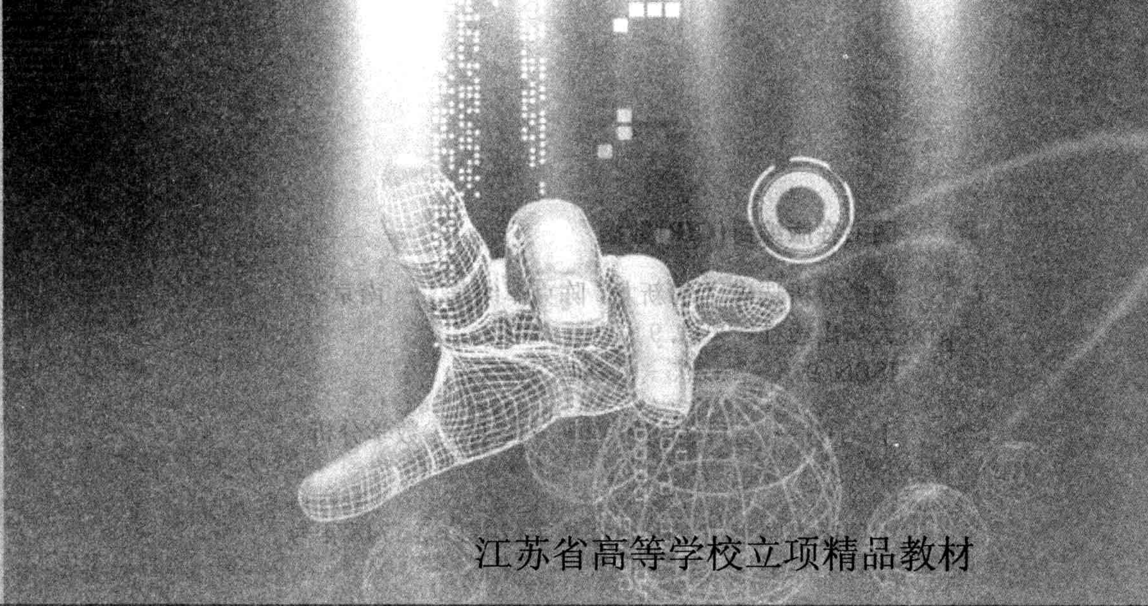
极限理论

微分学 一元函数的连续性

积分学

级数理论

南京大学出版社



江苏省高等学校立项精品教材

数学分析选讲

编著 何新龙 陈克军

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲 / 何新龙，陈克军编著. 一 南京 :
南京大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-305-08781-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①何… ②陈… Ⅲ.①数学分析
Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 174874 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 数学分析选讲
编　　著 何新龙　陈克军
责任编辑 倪　琦　　　　编辑热线 025-83592401

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 盐城市华光印刷厂
开　　本 787×1092　1/16　印张 13.75　字数 330 千
版　　次 2012 年 3 月第 1 版　　2012 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-08781-3
定　　价 26.00 元

发行热线 025-83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　言

本书是大学数学分析课程的辅导用书，既可用于数学分析课程的同步配套学习，也可作为有志报考硕士研究生的读者朋友的数学分析复习指导用书。

全书共分为七章，内容涉及极限理论、一元函数的连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数理论和含参量积分、多元函数微分学与多元函数积分学等。内容的编排顺序基本上和通用的数学分析教材吻合。在素材选取的深度、难度和宽度上，比一般的数学分析基础教材有明显的提升。对较基础的知识点加以全面而简洁的罗列与梳理，对较常用且重要的结论加以辨析与分类，在系统总结数学分析的基本题型及其解题技巧的前提下，将重点放在解题思路的挖掘与提炼上，力求通过一些具有综合性、典型性、代表性的考研真题来最大程度地适应考研读者的需要。每章节配备的习题的难度梯度明显，旨在拓宽基础、启发思维、熟练方法。

本书是编者十余年从事数学分析和数学分析选讲课程教学实践的总结，其中许多素材历经多年收集、整理而得，力争有所创新，力图形成自己独特的风格。在编写本书过程中，力求具有内容全面、结论完备、针对性强、难度适中、解法拓展性强等特点。

本书还可供从事数学分析、高等数学教学的教师以及其他数学爱好者参考阅读。

在编写本书的过程中，编者参阅了多种数学分析教材和资料，在此向相关作者表示衷心的感谢。还要特别感谢校、系各级领导以及张爱武老师、韩诚老师、刘红艳老师、周燕老师对本书的出版所给予的大力支持和帮助。

最后，我们诚恳地期待读者对本书提出宝贵意见。

编　者

2011年8月

目　　录

第一章　极限理论

第一节　极限初论

一、基本内容

1. 预备知识

(1) 函数的定义、构成函数的要素、定义域、对应法则、函数的值域、反函数、函数的四则运算与复合运算.

(2) 函数的几何特性：

① 有界性　有界与无界的定义.

② 单调性　单调递增与单调递减的概念.

③ 奇偶性　奇函数、偶函数的定义及其图象的对称性，奇函数、偶函数的四则运算性质.

④ 周期性　周期函数的定义及其函数的图象特征、基本周期.

(3) 初等函数　初等函数在其定义区间上连续.

(4) 几个重要的非初等函数

① 符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

显然有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$，$x=|x|\operatorname{sgn}x$.

② 取整函数 $[x]$ 和尾数函数 (x)　$[x]$ 为不超过 x 的最大整数，(x) 为 x 的非负小数部分，显然有 $x=[x]+(x)$，且 $x-1<[x]\leqslant x$，$0\leqslant(x)<1$.

③ Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

④ Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\text{ 为正整数},\dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\right),\\ 0, & x=0,1\text{ 和}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}$$

2. 数列与函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow$在 a 的任一邻域之外至多含数列$\{a_n\}$中的有限项.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty(+\infty,-\infty)\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$|a_n|>M(a_n>M,a_n<-M).$$

(4) 有界数列与子列的概念.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有$|f(x)-a|<\varepsilon$.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 的定义以及上述一系列定义中极限为∞或$\pm\infty$的情形.

(7) 无穷大(小)量、高阶、同阶及等价无穷小量的概念.

3. 收敛数列与函数极限的性质

收敛数列有有界性、唯一性、保号性、保不等式性、迫敛性、子列等方面的性质.

函数极限的性质有局部有界性、唯一性、局部保号性、局部保不等式性、迫敛性、归结原则等方面的性质.

无穷小量的运算性质和等价无穷小量在极限运算方面的性质.

4. 数列与函数极限的存在性

数列极限的单调有界定理和柯西收敛准则.

函数极限的单调有界定理和柯西收敛准则、归结原则.

二、难点解析与重要结论

(1) 一个数集无上界指任何实数都不是它的上界.

(2) 定义在关于原点对称的区间上的函数必可表示成一个奇函数与一个偶函数的和.

(3) 两个周期函数周期之比为有理数时,它们的和、差、积、商还是周期函数.

(4) $D(x)$是以任一正有理数为周期的周期函数,且无最小正周期.

(5) $xD(x)$仅在 $x=0$ 处连续,在其他点处都不连续. 类似的,$(x-x_1)(x-x_2)D(x)$仅在 $x=x_1,x_2$ 处连续,在其他点处都不连续.

(6) $R(x)$在$(0,1)$中的任一无理数点处连续,任一有理数点处不连续.

(7) $R(x)$在$[0,1]$上可积,且其积分值为 0.

(8) $H(x)=\begin{cases}q, & x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\text{ 为正整数},\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}\right),\\ 0, & x=0,1\text{ 和}(0,1)\text{内的无理数.}\end{cases}$ $H(x)$为在$[0,1]$上的任一点的任一邻域内无界的函数.

(9) 定义(1)中的 ε 具有双重属性,任意性用来保证 a_n 与 a 之间的距离可任意小,相对稳定性用来寻找 N,N 相应于 ε 产生,但不是 ε 的函数. 在定义中对 N 添加条件$|a_N-a|\geqslant\varepsilon$,则定义没有发生变化,此时 N 唯一决定于 ε,即为 ε 的函数,只不过在按照定义证明问题时的难度变大了.

(10) 定义(1)和定义(2)分别从定量和定性两个方面刻画了数列$\{a_n\}$以 a 为极限的事实,在证明极限时多使用定义(1),但有时使用定义(2)来证明会更简洁. 例如证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$

$=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(11) 以∞或$\pm\infty$为极限的数列是一类特殊数列，要注意它与发散数列及无界数列之间的区别与联系. 一般地，趋于无穷的数列必无界，无界数列未必趋于无穷，但无界数列必有趋于无穷的子列，无界且非无穷大数列肯定既有收敛子列又有趋于无穷的子列. 函数的无穷大量与无穷数列有类似的性质.

(12) 定义(5)中的δ与定义(1)中N的性质类似.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$的定义是将$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义反过来，在$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义中，对所有的$\varepsilon$都能找到一个$N$，使得当$n>N$时，$|a_n-a|<\varepsilon$成立. 将上面的陈述反过来即为：有这样的一个$\varepsilon_0$，找不到满足要求的$N$，即所有的$N$均不满足要求，也即对所有的$N$都能找到$n$，这个$n$依赖于$N$，满足$n>N$，但有$|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

一般地，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$可得数列$\{a_n\}$存在子列$\{a_{n_k}\}$，使得$|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

(14) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq a\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x_\delta$，虽然$0<|x_\delta-x_0|<\delta$，但有$|f(x_\delta)-a|\geqslant\varepsilon_0$. 一般地，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq a$可得，存在数列$\{x_n\}$，使得$x_n\to x_0$，$x_n\neq x_0$，但有$|f(x_n)-a|\geqslant\varepsilon_0$.

(15) 有界数列不一定收敛，但发散的有界数列至少有两个收敛于不同极限的子列；任何数列必有单调子列.

(16) 由保号性的证明知，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且$a>b$，则$\exists N$，当$n,m>N$时，有$a_n>b_m$. 进一步地，$\exists N$，当$n>N$时，有$a_n>\dfrac{a+b}{2}>b_n$.

(17) 迫敛性与极限定义之间的联系：根据极限的定义，在寻找$N(\delta)$时，由于不一定要求出最小(大)的$N(\delta)$，可以对不等式进行适当的放大，且一般是两侧同时放大，而迫敛性告诉我们在放大时也可以两侧分别放大.

(18) 单调数列收敛的充分必要条件是它有一收敛子列.

(19) 归结原则的条件可减弱为：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在的充分必要条件是任一严格递增趋于$x_0$的数列$\{x_n\}$，其对应的函数值组成的数列$\{f(x_n)\}$均收敛.

(20) 由柯西收敛准则的逆否命题知，若数列$\{a_n\}$发散，则$\exists\varepsilon_0>0$，存在$\{a_n\}$的两个子列$\{a_{n_k}\}$和$\{a_{m_k}\}$，使得$|a_{n_k}-a_{m_k}|\geqslant\varepsilon_0$. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，则$\exists\varepsilon_0>0$，存在$x_n\to x_0$，$y_n\to x_0$，但$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$.

(21) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(22) 若$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

(23) 设$a_1,a_2,\cdots,a_k$均为正实数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$.

(24) Stolz 公式：设$\{a_n\}$严格递增，$\{b_n\}$为任一数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

$$\text{若}\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

设$\{a_n\}$严格递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}$则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$

(25) $\dfrac{1}{n^n}=o\left(\dfrac{1}{n!}\right),\dfrac{1}{n!}=o\left(\dfrac{1}{a^n}\right)(a>1),\dfrac{1}{a^n}=o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)(a>1,k>0)$,

$\dfrac{1}{n^a}=o\left[\dfrac{1}{(\ln n)^k}\right](a>0,k>0),\dfrac{1}{(\ln n)^l}=o\left\{\dfrac{1}{[\ln(\ln n)]^k}\right\}(l>0,k>0),\cdots$.

(26) 等价无穷小量公式的来源主要为泰勒(Taylor)公式和函数的幂级数展开式.

三、基本题型与方法

1. 利用极限的定义证明极限

(1) 直接解不等式$|a_n-a|<\varepsilon(|f(x)-a|<\varepsilon)$,得最小(大)的$N(\delta)$.

(2) 有时直接解不等式$|a_n-a|<\varepsilon$较困难,由于定义中没要求N是最小的,故可将$|a_n-a|$进行适当的放大,如$|a_n-a|<h(n)$,然后解不等式$h(n)<\varepsilon$得N_1.一般地,N_1未必是最小的N,但最小的N是存在的.

(3) 分步放大:有时直接放大有一定的困难,特别在已知一极限的基础上再证明另一极限的问题中,常需进行多次放大.

[注]　在证明极限的过程中常用到的几个著名的不等式:

① 伯努利(Bernoulli)不等式:当$h>-1$时,$\forall n\in\mathbf{N}$,有$(1+h)^n\geqslant 1+nh$.

② 柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式:$\forall a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$,总有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

③ 平均值不等式:$\forall a_i>0,i=1,2,\cdots,n$,总有

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

④ $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

【例1】 按极限的定义证明下列各题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+n}{2n^3+n^2-n-3}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}=0(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$.

证　(1) 由于$\left|\dfrac{n^3-2n^2+n}{2n^3+n^2-n-3}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-5n^2+3n+3}{2(2n^3+n^2-n-3)}\right|<\dfrac{5n^2+3n+6}{|2n^3+n^2-n-3|}$

$$<\frac{(5+3+6)n^2}{|2n^3+(n^2-n-3)|},$$

当 $n>2$ 时，有 $n^2-n-3>0$，从而有

$$\left|\frac{n^3-2n^2+n}{2n^3+n^2-n-3}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|\frac{14n^2}{2n^3}\right|=\frac{7}{n}.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{2,\frac{7}{\varepsilon}\right\}$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n^3-2n^2+n}{2n^3+n^2-n-3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2+n}{2n^3+n^2-n-3}=\frac{1}{2}.$$

(2) 令 $h=a-1$，则 $h>0$，且

$$0<\frac{n^2}{a^n}=\frac{n^2}{(1+h)^n}=\frac{n^2}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+\cdots+h^n}$$

$$<\frac{6n}{(n^2-3n+2)h^3}<\frac{6n}{(n^2-3n)h^3}=\frac{6}{(n-3)h^3}(n>3).$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{3,3+\frac{6}{\varepsilon h^3}\right\}=3+\frac{6}{\varepsilon h^3}$. 当 $n>N$ 时，有 $0<\frac{n^2}{a^n}<\varepsilon$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.$$

(3) 由于 $\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\frac{\frac{7}{16x^2-9}-1}{\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}+1}\right|<\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|$

$$=\left|\frac{16(x-1)(x+1)}{16x^2-9}\right|=\left|\frac{16(x+1)}{16x^2-9}\right||x-1|,$$

限制 $|x-1|<\frac{1}{8}$，则 $\frac{7}{8}<x<\frac{9}{8}$，且

$$\left|\frac{16(x+1)}{16x^2-9}\right|<12.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{8},\frac{\varepsilon}{12}\right\}$，当 $|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$. 故

$$\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}=1.$$

[注] ① 上述例题中的第(1)小题给出了用定义证明数列极限的一般方法，其具体做法是将分子的各项系数取绝对值后相加所得和再乘以分子的最高次幂，统计分母中与最高次项符号不同的项数 k，将其首项分成 $(k+1)$ 份，通过限制 n 的范围，将分母缩小为首项的 $\frac{1}{k+1}$.

② 第(2)小题给出了收敛速度相差指数倍的两数列之比的极限证明的一般放大方法.

③ 第(3)小题给出了一般的函数极限的证明方法. 其做法是在表达式中分离出 $|x-x_0|$ 的成分，通过限制 $|x-x_0|$ 的范围，求出剩余部分的一个有限上界以便将不等式放大.

【例 2】 (1) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2) 设函数 f 定义在 $(a,+\infty)$ 上，f 在每一个有限区间 (a,b) 内有界，并满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

［**分析**］ 由于已知条件中仅知道$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，而要证明的是已知数列经过运算后所得到的表达式的极限问题，一般常用还原法解决，即令 $a_n=a$，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{a+a+\cdots+a}{n}=a,$$

故将 a 还原为$\dfrac{a+a+\cdots+a}{n}$，从而可以看出后面的表达式中各成分为待证极限所作的贡献.

证 (1) 因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$. 当 $n>N_1$ 时，有$|a_n-a|<\varepsilon$. 考察

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a+a+\cdots+a}{n}\right|\\&=\left|\frac{a_1-a+a_2-a+\cdots+a_n-a}{n}\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|)\\&\leqslant\frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|)+\frac{(n-N_1)}{n}\varepsilon.\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|)=0$，故$\exists N_2>0$. 当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|)<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有$\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2) 因$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$. 当 $x>M$ 时，有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\varepsilon.$$

又 f 在$(a,M+1]$上有界，设在$(a,M+1]$上有$|f(x)|<G$，且$\forall x>M+1$，$\exists n$ 使得 $x-n>M$，而 $x-n-1\leqslant M$. 故当 $x>M+1$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|&=\left|\frac{[f(x)-f(x-1)-A]+\cdots+[f(x-n+1)-f(x-n)-A]+[f(x-n)-f(x-n-1)-A]}{x}\right.\\&\quad\left.+\frac{[f(x-n-1)-(x-n-1)A]}{x}\right|\\&\leqslant\left|\frac{n}{x}\varepsilon\right|+\left|\frac{f(x-n)-(x-n)A}{x}\right|\\&\leqslant\left|\frac{n}{x}\varepsilon\right|+\frac{G+(M+1)|A|}{|x|}.\end{aligned}$$

又$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G+(M+1)|A|}{x}=0$，故$\exists M_1>a$，使得当 $x>M_1$ 时，有$\dfrac{G+(M+1)|A|}{|x|}<\varepsilon$. 所以，取 $M_2=\max\{M+1,M_1\}$，当 $x>M_2$ 时，有$\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|<2\varepsilon$. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

[注] 第(1)小题用 Stolz 公式一步即可.

2. 证明极限的存在性

一般地,要证明极限等于已知值时常使用极限的定义来证明,但当极限值未知时,主要使用单调有界定理和柯西收敛准则.

【例 3】 证明数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

证明 由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减. 又

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}>0.\end{aligned}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界,故收敛.

[注] 一般地,在证明单调性时,常考察 $x_{n+1}-x_n$ 的正负,或者将 $\frac{x_n}{x_{n-1}}$ 与 1 进行比较,在此过程中经常用到导数方面的知识. 此数列的极限为欧拉常数 c,故有 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=c+\ln n+\alpha_n$,其中 α_n 为无穷小量.

【例 4】 证明(1) 数列 $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$ 收敛.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

[分析] 一般地,在考察数列或函数极限的存在性时,首先考察该数列或函数的单调性,若单调则多用单调有界定理来解决,否则再考虑使用柯西收敛准则. 显然本题中的数列和函数均不单调,故选用柯西收敛准则来处理.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$, $\forall p\in\mathbf{N}^+$,由于

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

所以可取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,对任意的自然数 p,总有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$,由柯西收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, $\forall\delta>0$,取 n 充分大,使得 $x_{1\delta}=\frac{1}{2n\pi}<\delta$,则 $x_{2\delta}=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\delta$,显然有 $|x_{1\delta}|<\delta$, $|x_{2\delta}|<\delta$,但是,

$$\left|\sin\frac{1}{x_{1\delta}}-\sin\frac{1}{x_{2\delta}}\right|=\left|\sin 2n\pi-\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right|=1>\varepsilon_0.$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

[注] 在使用柯西收敛准则证明时，第一步必是放大，在数列中通过适当地放大去掉p，在函数中通过适当地放大去掉一个点.

3. 求极限

(1) 利用极限的性质求极限.

(2) 利用初等变形求极限.

【例 5】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$;

(2) 已知$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

解 (1) 令$a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$，则$\dfrac{1}{2}a_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$，从而

$$\begin{aligned}a_n-\frac{1}{2}a_n&=\frac{1}{2}a_n\\&=\frac{1}{2}+\frac{3-1}{2^2}+\cdots+\frac{(2n-1)-(2n-3)}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3.$$

(2) 由于$\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\dfrac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$，又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$.

由例 2 知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

[注] ① 第(1)小题中使用错位相减法求出表达式的缩写式，求缩写式的方法还有利用部分分式定理来拆项，利用求和公式来求和等方法.

② 第(2)小题中利用初等变形转化为已知极限来求，使用此方法的前提是熟练掌握一些已知数列或函数的极限. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$a>0$；由$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，故若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$，且$\lim\limits_{x\to a}g(x)[f(x)-1]=\alpha$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\alpha}$等.

(3) 利用洛必达法则和泰勒公式求极限.

【例 6】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^a}(a>0)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{ax^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{a^2x^a}=0$，故由归结原则知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^a}=0$.

[注] 一般的，大多数关于数列的不定式极限，均可通过此方法来解决.

(4) 利用定积分的定义求极限.

【例 7】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解 由于

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\geqslant\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$$

$$=\frac{n}{n+1}\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)\frac{\pi}{n},$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)\frac{\pi}{n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

[注] 此类题目的特征是 n 项之和与$\frac{1}{n}$同阶的无穷小量之积，要特别注意定积分定义中点的取法与区间分割的灵活性所导致的题目的复杂性，由于无穷乘积可通过取对数转化为无穷求和，所以有时无穷乘积的极限也可用此法来解决. 例如求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n}\cdots\frac{2n}{n}}.$$

(5) 利用迫敛性求极限.

【例 8】 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=0$.

证 由于$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\cdots,\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$，故有

$$\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^2<\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdots(2n+1)}=\frac{1}{2n+1},$$

即有 $0<\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}<\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}=0$,

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=0.$$

【例 9】 (1) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 k 个大于 0 的实数,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.

(2) 设 $f(x)>0$,且在 $[0,1]$ 上连续,试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x}=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$.

解 (1) 设 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,则

$$a\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{k}a.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}a=a$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

(2) 设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,故存在 $x_0\in[0,1]$,使得 $M=f(x_0)$. 不妨设 $x_0\in(0,1)$(若 $x=0$ 或 1,类似可证)

$\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<M$), $\exists\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>M-\varepsilon$. 所以

$$\sqrt[n]{\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x}\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f(x)]^n\mathrm{d}x}>(M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta}=M-\varepsilon>M-2\varepsilon$,所以 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时有

$$M>\sqrt[n]{\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x}\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f(x)]^n\mathrm{d}x}>(M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta}>M-2\varepsilon,$$

即有

$$\left|\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f[(x)]^n\mathrm{d}x}-M\right|<2\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1 f[(x)]^n\mathrm{d}x}=\max_{x\in[0,1]}f(x).$$

四、综合举例

【例 10】 设 $x\to0$ 时, $f(x)\sim x$, $x_n=\sum\limits_{i=1}^n f\left(\dfrac{2i-1}{n^2}a\right)(a>0)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

[分析] 若令 $f(x)=x$,则 $x_n=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{2i-1}{n^2}a=a$,故可将 a 还原为 $\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{2i-1}{n^2}a$ 来处理.

证 由于 $x\to0$ 时, $f(x)\sim x$,故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $|x|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

又对 $1\leqslant i\leqslant n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2i-1}{n^2}a=0$,故对上述 $\delta>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\delta.$$

所以当 $n>N$ 且 $1\leqslant i\leqslant n$ 时,有 $\left|\dfrac{f\left(\dfrac{2i-1}{n^2}a\right)}{\dfrac{2i-1}{n^2}a}-1\right|<\varepsilon$,即

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\frac{2i-1}{n^2}a\varepsilon.$$

于是,有

$$\begin{aligned}|x_n-a|&=\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-a\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a\varepsilon<\frac{n(2n-1)}{n^2}a\varepsilon\\&=\left(2-\frac{1}{n}\right)a\varepsilon<2a\varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

[注] 此题的解法又称为"拟合法".

【例 11】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续. 证明 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$.

[分析] 首先要找出$\frac{\pi}{2}$的来源,易见

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

故将$\frac{\pi}{2}$还原为$\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x$来考察.

证 由于 $f(x)$在$[0,1]$上连续,故 $f(x)$在 $x=0$ 右连续,即$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0(\delta<1)$. 当 $0<x<\delta$ 时,有$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_0^\delta\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{h}{h^2+x^2}\varepsilon\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\varepsilon+\int_\delta^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又$\int_\delta^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x\leqslant h\int_\delta^1\frac{1}{x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x=hM$,所以对上述$\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0$,
当 $0<h<\delta_1$ 时,有 $hM<\varepsilon$. 从而对上述 ε,$\exists\delta_2=\min\{\delta,\delta_1\}$,当 $0<h<\delta_2$ 时,有

$$\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|<\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{h\to0^-}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{h\to0^-}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(0)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

【例 12】 (东北师大)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$p_i>0(i=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+p_{n-1}a_2+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

[分析] 令 $a_n=a$，则$\dfrac{p_na_1+p_{n-1}a_2+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\dfrac{p_na+p_{n-1}a+\cdots+p_1a}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$，故可将 a 写成 $\dfrac{p_na+p_{n-1}a+\cdots+p_1a}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$来考察.

证 由于

$$\begin{aligned}&\left|\frac{p_na_1+p_{n-1}a_2+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right|\\=&\left|\frac{p_na_1+p_{n-1}a_2+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-\frac{p_na+p_{n-1}a+\cdots+p_1a}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|\\=&\left|\frac{p_n(a_1-a)+p_{n-1}(a_2-a)+\cdots+p_1(a_n-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|\\\leqslant&\frac{p_n|a_1-a|+p_{n-1}|a_2-a|+\cdots+p_1|a_n-a|}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.\end{aligned}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有$|a_n-a|<\varepsilon$，且$\exists M>0$，使得$\forall n$，有$|a_n-a|<M$. 又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$，故$\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有 $0<\dfrac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}<\varepsilon$. 取 $N=N_1+N_2$，则当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}&\frac{p_n|a_1-a|+p_{n-1}|a_2-a|+\cdots+p_1|a_n-a|}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\\\leqslant&\frac{p_n|a_1-a|+\cdots+p_{n-N_1+1}|a_{N_1}-a|+p_{n-N_1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+p_1|a_n-a|}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\\\leqslant&\frac{p_nM+\cdots+p_{n-N_1+1}M+p_{n-N_1}\varepsilon+\cdots+p_1\varepsilon}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\leqslant(MN_1+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+p_{n-1}a_2+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

[注] *以上三题均通过改写$|a_n-A|$中的 A，使之与 a_n 具有相类似的形式，故这种方法又称为拟合法.*

【例 13】 设实数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

证 方法一：由于$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有$|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon$. 令 $y_n=|x_n-x_{n-1}|$，则$|x_n-x_{n-2}|\geqslant|y_n-y_{n-1}|$，所以

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|=\frac{|y_n|}{n}=\frac{|y_n-y_{n-1}+y_{n-1}-y_{n-2}+\cdots+y_{N_1+1}-y_{N_1}+y_{N_1}|}{n}\\\leqslant&\frac{|y_n-y_{n-1}|+|y_{n-1}-y_{n-2}|+\cdots+|y_{N_1+1}-y_{N_1}|+|y_{N_1}|}{n}\leqslant\frac{n-N_1}{n}\varepsilon+\frac{|y_{N_1}|}{n}\end{aligned}$$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{N_1}}{n}=0$，故$\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时有$\left|\dfrac{y_{N_1}}{n}\right|<\varepsilon$.