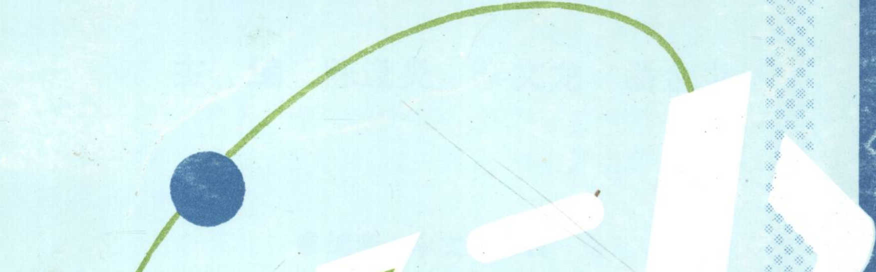
经济数学系列教材之二

线性代数

主编　陈逢炎　李文龙　潘金炎



湖北科学技术出版社

O151.2

南方医科大学图书馆
藏书

经济数学系列教材之二

线性代数

主　编　陈逢炎　李文龙　潘金炎

参编者　李文龙　钱　彦
　　　　陈逢炎　潘金炎
　　　　贾　武

南方医科大学图书馆
AA285889

湖北科学技术出版社

（鄂）新登字03号

经济数学系列教材之二
线 性 代 数
主编：陈逢炎　李文龙　潘金炎
湖北科学技术出版社出版发行
军事经济学院印刷厂印刷
850×1168毫米　32开本　9.625印张　240千字
1994年8月第1版　1997年1月第2次印刷
ISBN7—5352—1579—3/G·455
印数1501—3500　定价13.45元

前　　言

为适应教学改革的需要，进一步提高经济数学教学水平，我们依据全国经济类院校经济数学教学试行大纲，在认真总结十年来本科生教学经验的基础上，经过深入的研究与相关的讲义书稿准备，编写了这套经济数学系列教材。本系列教材包括《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三个部分。系列教材编委是王行友、陈逢炎、李文龙、刘正新、曹少琛同志，由陈逢炎、李文龙、刘正新同志具体负责。

在编写这套教材中，我们力求使其既保持数学学科的系统与完整，又恰当地联系经济分析、现代管理问题，编排了大量的经济应用例题，突出了经济管理的需要；重点放在基本概念和基本方法内容上，论证适度。系列教材以章为单位，各章后都安排有适量习题，以培养学生逻辑思维能力与经济定量分析能力。系列教材文字叙述力求深入浅出，通俗简明；除必修的基本内容，对较深入的部分均用 * 号标明。

《线性代数》这本教材是系列教材之二，其内容包括行列式、矩阵、向量空间与矩阵的秩、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型及投入产出数学模型。此外，书后附有各章习题答案。

本教材在成书过程中，得到了军事经济学院教务部、科研处、教保处领导及印刷厂的关心、指导与帮助；高望琼、吴廷璧、蒋万里教授对教材提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。

由于成书时间仓促，加之编者水平有限，错误和缺点在所难免，希望并欢迎广大读者和同行批评指正。

编　者

1994 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　行列式

我们在中学学过二阶、三阶行列式。大家知道，利用对角线法则可以计算出二阶行列式和三阶行列式的值。但是，当行列式的阶数超过三时，例如四阶行列式，对角线法则则失去效力。本章将从分析二阶和三阶行列式的结构入手，引出 n 阶行列式的定义，并进一步研究其性质和计算方法。

§1.1　行列式的概念

一　二阶、三阶行列式

考察二阶行列式 D_2 及三阶行列式 D_3，由定义

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}。$$

从 D_2、D_3 的展开式可以看出：

(1) D_2 由 2×2 个数排成，其展开式共有 2！项；D_3 由 3×3 个数排成，其展开式共有 3！项。

(2) D_2 的展开式中每一项都是两个元素的乘积，D_3 的展开式中每一项都是三个元素的乘积；且同一项中各元素所在行不同，所在列也不同。

(3) 在每项前适当加以正负号，其代数和就是行列式的值。各项前的正负号如何确定？下面我们对二、三阶行列式作出进一步的分析：

D_2、D_3 中的每个元素都有两个下标，其中，前面的叫做行标，后面的叫做列标，如 D_3 中的元素 a_{32}，3 表示行标，2 表示列标，a_{32} 表示该元素在行列式 D_3 中处于第三行第二列，如果把同一项中各元素的行标按自然数顺序写成一排，列标按对应的顺序写成一排，带上该项前面的符号，则由 D_2、D_3 的展开式可分别得如下表 1—1、表 1—2：

表 1—1

行　　标	12	12
列　　标	12	21
项前符号	+	—

表 1—2

行　　标	123	123	123	123	123	123
列　　标	123	231	312	321	213	132
项前符号	+	+	+	—	—	—

从表 1—1、表 1—2 可以看出，展开式中的每一项，当行标都按自然数顺序排列时，对于列标的每一种不同排列法，各项前面相应地取“＋”或“－”。由此可知，此时展开式各项前面的符号取决于列标数字的排列顺序。为了找出各项前面符号与列标数字排列顺序的关系，下面引进排列及其逆序数的概念。

二　排列及其逆序数

定义 1.1　由 n 个数码 1,2,…,n 组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列。

不难知道，由 n 个数码 1,2,…,n 构成的所有不同的 n 阶排列总数为 $n!$ 个，例如 1、2、3 这三个数码的全体不同排列一共有 3! 个，它们分别是：123,132,231,213,321,312。

如果 n 个自然数 1,2,…,n 是按自然数的大小顺序排列的，这种排列称为自然排列。例如 1234,12345 都是自然排列。

在上述 6 个 3 阶排列中，除 123 之外，其余全是非自然顺序排列。在排列 132 中，3 比 2 大，但 3 却排在 2 的前面，对此，我们给出排列的逆序数定义。

定义 1.2　在 n 阶排列 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中，如果有某个较大的数码 S_j 排在某个较小的数码 $S_i(S_j>S_i)$前面，则称数码 S_j 与 S_i 构成一个逆序。一个 n 阶排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为：$N(S_1S_2\cdots S_n)$。

对于一个 n 阶排列 $S_1S_2\cdots S_n$，若在 S_n 前比 S_n 大的数码的个数为 m_n，在 S_{n-1}前比 S_{n-1}大的数码个数为 m_{n-1}，…，在 S_2 前比 S_2 大的数码个数为 m_2，则有 $N(S_1S_2\cdots S_n)=m_n+m_{n-1}+\cdots+m_2$。

例 1　求下列排列的逆序数：

(1) 32514;　　　　(2) 23451。

解　(1)　按照上述方法，$m_5=1,m_4=3,m_3=0,m_2=1$。

故 $N(32514)=1+3+0+1=5$;

(2)　$m_5=4,m_4=0,m_3=0,m_2=0$。

故 $N(23451)=4+0+0+0=4$。

例 2　计算排列 $123\cdots n$ 与 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数。

解　在 $12\cdots n$ 中，$m_n=m_{n-1}=\cdots=m_2=0$。

故 $N(123\cdots n)=0$。由此可知自然排列的逆序数都是零。

在 $n(n-1)\cdots321$ 中，$m_n=n-1, m_{n-1}=n-2, \cdots, m_3=2, m_2=1$。故

$$N(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}。$$

定义 1.3　对于数码 1,2,…,n 的一个排列 $S_1S_2\cdots S_n$，如果它的逆序数是偶数（或零），则称它为偶排列，如果逆序数是奇数，则称其为奇排列。

如例 1 中 $N(32514)=5$，故 32514 是奇排列；$N(23451)=4$，故 23451 是偶排列。

注意到 $N(312)=2$，$N(321)=3$。321 与 312 这两个排列仅将 1 和 2 的位置交换一下，则奇偶性刚好相反。从这个事实，我们引进下面的定义和定理。

定义 1.4　把一个排列的两个数码 i、j 互换位置，其余数码不动，得到另一个排列。对于排列施行这样的一个变换，称为一个对换，并用符号 (i,j) 来表示。

例如，对排列 21354 施以对换 (1,5) 后得到 25314。

定理 1.1　排列经过一次对换，其奇偶性改变。

证　以 S 表示排列 $S_1S_2\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$，把 S_i 与 S_j 对调位置，则得到排列 S' 为 $S_1S_2\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$。

若 $j=i+1$，即 S_i 与 S_j 相邻。当 $S_i<S_{i+1}$ 时，则有 $N(S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n)=N(S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n)-1$；当 $S_i>S_{i+1}$ 时，则 $N(S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n)=N(S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n)+1$。也就是说 $j=i+1$ 时，S 与 S' 的奇偶性相反。

若 $j=i+k$。首先在 S 中，将 S_j 与 S_{j-1} 对换，再将 S_j 与 S_{j-2} 对换，…，如此经过 k 次相邻的对换，便得到排列 S''：$S_1\cdots S_{i-1}S_jS_iS_{i+1}\cdots S_{i+k-1}S_{j+1}\cdots S_n$；然后，将 S'' 中的 S_i 与 S_{i+1} 对换，再把 S_i 与 S_{i+2} 对换，…，这样进行 $k-1$ 次后，就得到 S'。从 S 到 S''，又从 S'' 到 S'，总共进行了 $2k-1$ 次相邻两数的对换。由于 $2k-1$ 是奇数，此说明从

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

S 到 S'，排列 S 的奇偶性改变了奇数次。即如果 S 是奇排列，则 S' 必是偶排列；如果 S 是偶排列，S' 必是奇排列。

三　n 阶行列式的定义

下面，我们用排列的理论，来进一步观察二、三阶行列式展开式中各项列标排列与该项前符号之间的关系。以三阶行列式 D_3 的展开式为例（对 D_2 可作类似讨论），由表 1—2 列出如下表 1—3：

表 1—3

列标排列	123	231	312	321	213	132
逆 序 数	0	2	2	3	1	1
项前符号	+	+	+	−	−	−

从表 1—3 可以看出，当 D_3 展开式中各项所含元素的行标都是自然排列时，列标排列为偶排列的项，前面都取正号；列标排列为奇排列的项，前面都取负号 。这种现象并非偶然。它正好揭示出各项前面的符号与其下标排列奇偶性之间的内在联系。

综合前面的讨论，当三阶行列式 D_3 的展开式中每一项元素的行标都按自然顺序排列时，各项元素的列标正好是数码 1，2，3 的所有不同的排列，因此，展开式的每项可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是 123 的所有不同排列中的一个。其项前符号由排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定，可以表示为$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$。展开式的项数 3！正好是 $j_1j_2j_3$ 的所有不同排列数。由此 D_3 可以表示为：

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}。$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对 1、2、3 的所有不同排列求和。

类似地 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum\limits_{(j_1j_2)}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$。

以上是二阶行列式、三阶行列式定义的另一种形式。由此推广，可以得到如下 n 阶行列式的一般定义。

定义 1.5　将 n^2 个数 $a_{ij}(i、j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 n 行 n 列，在其两边各画一条竖线，记为 D，并规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}。\quad (1.1)$$

则称 D 为 n 阶行列式。其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 所有不同 n 阶排列求和。

说明：

(1)　定义中，等式右边叫做 n 阶行列式的展开式，它是一个具有 $n!$ 项的代数和。其中每一项是取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积，其一般形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。

这里，n 个元素的行标是按自然顺序排列，列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列。

(2)　$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$ 是 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面的符号。即在 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的行标是自然排列时，如果相应的列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列，则其前面的符号取正号，否则取负号。

当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，(1.1)式表示二阶或三阶行列式。我们规定，由一个元素 a 构成的一阶行列式 $|a|=a$。

例 3　计算行列式

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}。$$

解 (1) 按照 n 阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3 j_4)} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

右边的展开式是一个含有 4! $=24$ 项的代数和。根据该行列式的特点,只有当 $j_1=4, j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 时,$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才可能不为零,其余各项均为零。而 $N(j_1j_2j_3j_4)=N(4321)=6$, $(-1)^{N(4321)}=1$。故 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 前面应带正号。因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41};$$

(2) 和(1)相同,当 $j_1=2, j_2=4, j_3=1, j_4=3$ 时,$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才可能不为零,其它各项均为零。而 $N(2413)=3$, $(-1)^{N(2413)}=(-1)^3=-1$。故 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{43}$ 前面带负号。因此

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = -a_{14}a_{23}a_{32}a_{43}。$$

行列式中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线;从右上角到左下角的对角线称为次对角线。主对角线下方的元素全为零的行列式称为上三角行列式,主对角线上方元素全为零的行列式称为下三角行列式。上、下三角行列式统称为三角行列式。

例 4 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}。$$

解　按照 n 阶行列式的定义，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3j_4)} (-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}。$$

由于在行列式中，第四行除 a_{44} 之外，其它全为零，故 j_4 只能取4，即只有相应的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{44}$ 可能不等于零；又第三行只有 a_{33}、a_{34} 可能不为零，而 $j_3\neq4$，故只能有 $j_3=3$，因此，只有相应的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{33}a_{44}$ 可能不等于零。同理可知，$j_2=2$，$j_1=1$。由此得出在4！个项中，只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可能不为零，而列标排列的逆序数 $N(1234)=0$。所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}。$$

此例说明，四阶上三角行列式的值，等于其对角线元素的乘积。将上面的方法推广，类似可计算出：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}；$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}；$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

以上结论提示我们，对于一般的行列式，如能将它化为三角行列式，其值可以立即计算出来，就等于其主对角线上各元素之乘积。这是计算行列式中我们经常使用的一种方法。

§1.2　行列式的性质

用定义计算行列式的值，当 n 很大时是很困难的，有时几乎是不可能的事。因此，我们有必要讨论行列式的基本性质。利用这些性质，可以帮助我们更深入地了解行列式，并简化行列式的计算。

定理 1.2　从 n 阶行列式的第 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 列，取出元素作乘积：

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.2}$$

这里 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 1，2，…，n 这 n 个数码的一个 n 阶排列。那么，这一项在行列式中的符号是 $(-1)^{s+t}$。其中 $s=N(i_1i_2\cdots i_n)$，$t=N(j_1j_2\cdots j_n)$。

证　首先证明式（1.2）的因子经过互换后，行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和的奇偶性不变。显然，只要证明互换两个因子的情况即可。不妨把式（1.2）中的两个因子 $a_{i_1j_1}$ 与 $a_{i_2j_2}$ 互换，行标排列成为

$$i_2, i_1, i_3, \cdots, i_n,$$

列标排列为

$$j_2, j_1, j_3, \cdots, j_n。$$

设 $s'=N(i_2i_1i_3\cdots i_n)$，$t'=N(j_2j_1j_3\cdots j_n)$。

由定理 1.1 知，s 与 s'，t 与 t' 奇偶性都相反，即 $s-s'$ 与 $t-t'$ 均为奇数，这样

$(s-s')+(t-t')=(s+t)-(s'+t')$ 是偶数。

故 $s+t$ 与 $s'+t'$ 有相同奇偶性。

把式（1.2）的因子作适当的互换，使其行标具有自然排列顺

序，即式(1.2)变为

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n},$$

由上述结论，

$$(-1)^{N(12\cdots n)+N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)}$$

$$=(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{s+t},$$

证毕。

定义 1.6　将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次换为列，并且不改变它们的前后次序，得到一个新行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的转置行列式，记为 D^T（或 D'）。

显然，D 也是 D^T 的转置行列式。因此 D 与 D^T 互为转置行列式。

例如：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}，\text{其转置行列式 } D^T=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}。$$

性质 1　行列式 D 与其转置行列式 D^T 的值相等，即 $D=D^T$。

证　在 D 中任取一项 $a=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，它的元素位于 D 的不同行不同列，从而位于 D^T 的不同行不同列。由定理 1.2 知，a 在 D 中与在 D^T 中的符号都是 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$。反过来，$D^T$ 的任一项也是 D 的一项，而且在两个行列式中有相同的符号。因此，D 与 D^T 是具有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com