

KAODIANJIEMA

考点解码 化整为零 各个击破

讲透

【重点难点】



NLIC 2970720547

高中数学

讲练互动

函数、方程、不等式的关系

吉林教育出版社



讲透重点难点

化整为零
各个击破

高中数学

不等式

函数、方程、不等式的关系

集合与函数

解析几何

立体几何

排列 组合 二项式定理 概率

平面向量

三角函数

数列

高中物理

磁与电

电场与恒定电流

力与运动

曲线运动与机械能

高中化学

化学基本概念

化学基本理论

有机化学

元素 单质 化合物

ISBN 978-7-5383-3288-9



9 787538 332889 >

定价: 7.00 元

KAODIANJIEMA



考点解码

化整为零 各个击破

赠书

讲透

【重点难点】



NLIC 2970720547

- ☐ 本册主编/ 姜渭华
☐ 编 者/ 孙 维 解凤玲
付飞菲 罗 欣
李晓民 隋 晶
王晓平 陈丽馨
靳晓杰 沈淑霞
张继山 郭奕津
崔德忠 徐淑敏
李晓芳 张 萍
杨启发

讲练互动

高中数学

函数、方程、不等式的关系

版权所有 翻印必究
举报电话(0431)85645968(总编办)

☐讲透重点难点 高中数学·函数、方程、不等式的关系
☐主 编 傅荣强

☐总 策 划: 房海滨 杨 琳
☐责任编辑: 杨 琳 高铁楠 ☐封面设计: 王 康
☐责任校对: 卜莲清 陈海燕 ☐责任印制: 徐铁军

吉林教育出版社出版发行
长春市同志街1991号 邮编: 130021
电话: 0431—85675379 85645959 85645965
传真: 0431—85633844 85645959
电子函件: xf8640@sina.com
吉林教育出版社制版

长春市博文印刷厂印装
新立城水库管理局院内 邮编: 130000
2007年5月第1版 2007年5月第1次印刷

开本: 880×1230 1/32 印张: 4.25 字数: 140千
印数: 0001—8000册
书号: ISBN 978-7-5383-3288-9

定价: 7.00元



写在前面

《讲透重点难点》丛书以《课程标准》为依据，融通各种版本教材的知识体系，立足初、高中课程和中、高考的实际，按专题编写而成。包括初、高中数、理、化三个学科共计二十七册。

模型是一个人们非常熟悉的概念。如儿童玩具是实物的模型，机器人是模拟人的模型，长方形的面积公式 $S=ab$ 是数学模型，等等。

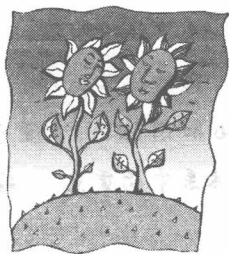
本书的模型是什么？简单地说，可以看成是公式。从中学生学习的实际来讲，将知识点建立成简洁、科学的公式，对于归纳、记忆知识和解题具有重要作用。

本套书立足初、高中课程和中、高考的实际，把初、高中数、理、化知识公式化，形成了以公式为主体的数、理、化知识体系，便于记忆，便于应用，对于破解知识体系中的重点、难点具有极高的使用价值。

从生活走进数学，从生活走进物理，从生活走进化学，将知识应用到生产、生活中去，进行探究性学



习，解决与生产、生活密切相关的实际问题，是《课程标准》的要求，也是中、高考的重点考查内容。本书每个专题单设一讲，通过讲解、举例、练习，专门阐述利用公式解决生产、生活实际问题的方法和技巧，充分体现了《课程标准》的理念。





例题引路

举一反三

目录 Contents



模型破解重点难点

例题解析+训练套餐↓

- 讲述知识体系
- 解说知识点考点
- 诠释重点难点
- 教方法导引思路
- 涵盖所有题型
- 能够举一反三
- 答案详解



第一讲 函数、方程、不等式的关系

1.1	一元函数、一元一次方程、一元一次不等式的关系	
模型	$y=kx+b, kx+b=0, kx+b>0$	(1)
1.2	二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系	
模型	$y=ax^2+bx+c, ax^2+bx+c=0, ax^2+bx+c\neq 0$	(8)
1.3	区间上的二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系	
模型	$x\in[\alpha, \beta]$ 与 $f(x)=ax^2+bx+c, ax^2+bx+c=0, ax^2+bx+c\neq 0$	(13)
1.4	一元二次方程的实根的分佈	
模型	$ax^2+bx+c=0, f(x)=ax^2+bx+c$	(22)
1.5	函数、方程、不等式的关系	
模型	$y=f(x), f(x)=0, f(x)\neq 0$	(29)
高考链接		(33)



第二讲 最大值、最小值问题

2.1	非负数的使用	
模型	$x^2\geq 0$	(36)
2.2	判别式的使用	
模型	$\Delta\geq 0$	(43)
2.3	均值不等式的使用	
模型	$\frac{a+b}{2}\geq \sqrt{ab}$	(48)
高考链接		(53)



第三讲 恒成立问题

3.1	不等式中的恒成立问题	
模型	$ax^2 + bx + c > 0$	(56)
3.2	函数中的恒成立问题	
模型	$y_{\max} \leq p \Leftrightarrow y \leq p, y_{\min} \geq q \Leftrightarrow y \geq q$	(62)
高考链接		(72)

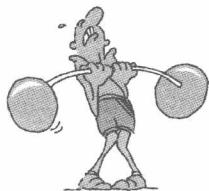


第四讲 函数、方程、不等式的关系在生产、生活中的实际应用

4.1	创新型应用题	(76)
4.2	探究型应用题	(83)
高考链接		(90)

● 复习参考题 (94)

● 答案与提示 (97)





第一讲 函数、方程、不等式的关系

1.1 一次函数、一元一次方程、一元一次不等式的关系

模型 $y = kx + b$, $kx + b = 0$, $kx + b > 0$

内

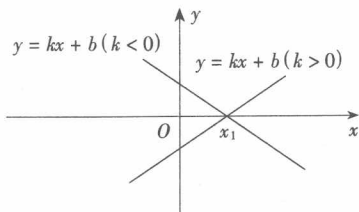
涵

明明白白才是真!

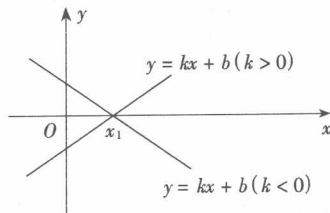
如图 1-1(1), 设一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标是 x_1 , 则

(1) x_1 是方程 $kx + b = 0$ 的根.

(2) 当 $k > 0$ 时, 不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $\{x \mid x > x_1\}$; 当 $k < 0$ 时, 不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $\{x \mid x < x_1\}$.



(1)



(2)

图 1-1

透

析

深度讲解, 条理真清晰呀!

当 x_1 是方程 $kx + b = 0$ 的根时, 函数 $y = kx + b$ 与不等式 $kx + b > 0$ 会因此产生哪些结果呢?



如图 1-1(2), 设 x_1 是一元一次方程 $kx+b=0$ 的根, 则

(1) 函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(x_1, 0)$.

(2) 当 $k>0$ 时, 不等式 $kx+b>0$ 的解集是 $\{x \mid x>x_1\}$; 当 $k<0$ 时, 不等式 $kx+b>0$ 的解集是 $\{x \mid x<x_1\}$.

当不等式 $kx+b>0$ 的解集是 $\{x \mid x>x_1\}$ 时, 函数 $y=kx+b$ 与方程 $kx+b=0$ 又会因此而产生哪些结果呢? 留给读者自行讨论.



哇! 分析, 解答, 解惑, 真像老师讲课一样!

【例 1】已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(x_1, 0)$.

(1) 解关于 m 的方程 $2(kx_1+b-m)^2 + (2kx_1+2b-m+1)m-2=0$;

(2) 设不等式 $kx+b>0$ 的解集是 P , 当 $z \in P$ 时, 解关于 n 的不等式 $(z-x_1)(2n+3) \leq 0$.

□分析 通过一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(x_1, 0)$, 间接地给出了方程 $kx+b=0$ 的根与不等式 $kx+b>0$ 的解集.

□解 (1) 由一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(x_1, 0)$ 可知, x_1 是方程 $kx+b=0$ 的根, 所以

$$kx_1+b=0. \quad ①$$

方程 $2(kx_1+b-m)^2 + (2kx_1+2b-m+1)m-2=0$ 可化为

$$2[(kx_1+b)-m]^2 + [2(kx_1+b)-m+1]m-2=0. \quad ②$$

由①和②, 得 $m^2+m-2=0$, 使用了 $kx_1+b=0$

解得 $m_1=-2, m_2=1$.

(2) 由一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(x_1, 0)$ 还可以知道, 不等式 $kx+b>0$ 的解集是

$$P_1 = \{x \mid x>x_1, k>0\}, \text{ 或 } P_2 = \{x \mid x<x_1, k<0\}.$$

当 $k>0$ 时, $z \in P$ 就是 $z \in P_1$, 所以 $z-x_1>0$,

所以, 不等式 $(z-x_1)(2n+3) \leq 0$ 可化为 $2n+3 \leq 0$, 解得 $n \leq -\frac{3}{2}$,

所以, 不等式 $(z-x_1)(2n+3) \leq 0$ 的解集是 $\{n \mid n \leq -\frac{3}{2}\}$.

同理可得, $k<0$ 时, 不等式 $(z-x_1)(2n+3) \leq 0$ 的解集是 $\{n \mid n \geq -\frac{3}{2}\}$.



本例中, 已知里面隐含着 $k \neq 0$, 至于 k 到底是大于 0 还是小于 0, 这是一个不确定的问题, 因此, 必须就 $k>0$ 和 $k<0$ 实施分类讨论, 第(2)小题我们就是这样处理的.

【例 2】已知 a_1, a_2, b_1, b_2 都是常数.





(1) 设 $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$, 且 $f_1(2) = f_2(2)$, 当 $a_1 \neq a_2$ 时, 解不等式 $(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2 > 0$;

(2) 设 $g_1(x) = a_1x + b_1$, $g_2(x) = a_2x + b_2$, 且 $g_1(1) = 2g_2(1)$, 当 $a_1 \neq 2a_2$ 时, 解方程 $a_1x + b_1 - 2a_2x - 2b_2 = 0$.

□分析 本例的第(1)、(2)两题, 可以分别借助 $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ 与 $G(x) = g_1(x) - 2g_2(x)$ 去获得其解.

□解 (1) 由已知, 可知 $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$.

设 $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$, 则 $F(x) = (a_1 - a_2)x + b_1 - b_2$.

由 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 都是常数以及 $a_1 \neq a_2$ 可知, $F(x)$ 是一次函数.

因为 $f_1(2) = f_2(2)$, 所以 $F(2) = f_1(2) - f_2(2) = 0$,

所以, 一次函数 $F(x) = (a_1 - a_2)x + b_1 - b_2$ 的图象过点 $(2, 0)$,

所以, 当 $a_1 - a_2 > 0$, 即 $a_1 > a_2$ 时, 不等式 $(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2 > 0$ 的解集是 $\{x \mid x > 2\}$; 当 $a_1 - a_2 < 0$, 即 $a_1 < a_2$ 时, 不等式 $(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2 > 0$ 的解集是 $\{x \mid x < 2\}$.

(2) 由题设, 可知 $g_1(x) = a_1x + b_1$, $g_2(x) = a_2x + b_2$.

设 $G(x) = g_1(x) - 2g_2(x)$, 则 $G(x) = (a_1 - 2a_2)x + b_1 - 2b_2$.

由 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 都是常数以及 $a_1 \neq 2a_2$ 可知, $G(x)$ 是一次函数.

因为 $g_1(1) = 2g_2(1)$, 所以 $G(1) = g_1(1) - 2g_2(1) = 0$,

所以, 一次函数 $G(x) = (a_1 - 2a_2)x + b_1 - 2b_2$ 的图象过点 $(1, 0)$,

所以, $x = 1$ 是方程 $(a_1 - 2a_2)x + b_1 - 2b_2 = 0$ 的根.

因为方程 $a_1x + b_1 - 2a_2x - 2b_2 = 0$ 与方程 $(a_1 - 2a_2)x + b_1 - 2b_2 = 0$ 同解,

所以, $x = 1$ 也是方程 $a_1x + b_1 - 2a_2x - 2b_2 = 0$ 的根,

即方程 $a_1x + b_1 - 2a_2x - 2b_2 = 0$ 的根是 $x = 1$.



解悟 本例中, 构造 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的依据是 $f_1(2) = f_2(2)$ 与 $g_1(1) = 2g_2(1)$.

【例3】 已知 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x - 4$, 其中 a 、 b 是常数.

(1) 设 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 当不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集是 $\{x \mid x < 4\}$ 时, 求证: $\log_a 5 < \log_a(5 + b) < 0$;

(2) 设 $a \neq -1$, 当方程 $f(x) + g(x) = 0$ 以 $x = 1$ 为根且 $f(2) + g(2) = 6$ 时, 求 $f(8) + g(8) + 1$ 的值.

□分析 第(1)小题可通过 $F(x) = f(x) - g(x)$ 去获解, 第(2)小题可使用 $G(x) = f(x) + g(x)$.

□解 (1) 由已知, 可知 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x - 4$.

设 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x) = (a - 1)x + b + 4$. ①



由 a, b 是常数及 $a \neq 1$ 可知, $F(x)$ 是一次函数.

不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集是 $\{x \mid x < 4\}$, 也即 $F(x) > 0$ 的解集是 $\{x \mid x < 4\}$,

所以 $a - 1 < 0$, $\leftarrow$ 取决于 $F(x) > 0$ 及 $x < 4$ 中的“ $<$ ”

解得 $a < 1$, 再结合 $a > 0$ 可知, $0 < a < 1$. ②

由①及 $F(x) > 0$ 的解集是 $\{x \mid x < 4\}$, 可得 $F(4) = 4(a - 1) + b + 4 = 0$,

$$4a + b = 0. \quad ③$$

由②、③可知,

函数 $m = \log_a n$ 是减函数, 且 $\log_a(5 + b) = \log_a(5 - 4a)$, $1 < 5 - 4a < 5$,

所以 $\log_a 5 < \log_a(5 - 4a) < 0$. $\leftarrow \log_a 1 = 0$

(2) 设 $G(x) = f(x) + g(x)$, 则 $G(x) = (a + 1)x + b - 4$. ④

由 a, b 是常数及 $a \neq -1$ 可知, $G(x)$ 是一次函数.

当方程 $f(x) + g(x) = 0$ 以 $x = 1$ 为根且 $f(2) + g(2) = 6$ 时, $G(x) = 0$ 以 1 为根, 且 $G(2) = 6$,

所以, ④表达的一次函数的图象通过点 $(1, 0)$ 和点 $(2, 6)$,

所以 $a + b - 3 = 0$, $2a + b - 8 = 0$, 解得 $a = 5$, $b = -2$.

把 $a = 5$ 与 $b = -2$ 代入④, 得 $G(x) = 6x - 6$,

所以 $f(x) + g(x) = 6x - 6$, $\leftarrow G(x) = f(x) + g(x)$

所以 $f(8) + g(8) + 1 = 6 \times 8 - 6 + 1 = 43$.



本例的两个小题中都涉及 $f(x)$ 与 $g(x)$ 两个函数, 设 $F(x) = f(x) - g(x)$ 与 $G(x) = f(x) + g(x)$ 的目的在于把它们统一在一个函数中, 尔后用已知的知识去解析未知的问题.

【例4】 设 $F(x) = ax + b$, $G(x) = 3x - 1$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 当方程 $F(x) - \frac{G(x)}{3} = 0$ 有且只有一个根时, 求 a, b 的取值范围;

(2) 当方程 $F(x) - 2G(x) = 0$ 无解时, 求 a 的值及 b 的取值范围;

(3) 当方程 $G(x) - F(x) - 1 = 0$ 的解集是 $\mathbf{R}$ 时, 求 a 与 b 的值;

(4) 当不等式 $2F(x) - G(x) > 0$ 无解时, 求 a 的值及 b 的取值范围.

□分析 建立相应的函数去求 a, b 的值或取值范围.

□解 (1) $f_1(x) = F(x) - \frac{G(x)}{3} = (a - 1)x + b + \frac{1}{3}$.

当方程 $F(x) - \frac{G(x)}{3} = 0$ 有且只有一个根时, 函数 $f_1(x) = (a - 1)x + b + \frac{1}{3}$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点,



先读审题 建模设题



所以 $a-1 \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$, 所以, a, b 的取值范围分别是 $\{a \in \mathbf{R} \mid a \neq 1\}, \mathbf{R}$.

$$(2) f_2(x) = F(x) - 2G(x) = (a-6)x + b + 2.$$

当方程 $F(x) - 2G(x) = 0$ 无解时, 有 $a-6=0$,

$b+2 \neq 0$, $\leftarrow$ 否则, 继 $a-6=0$ 之后, 方程有无穷多个解, 如: $x=1, 2, \dots$

所以, $a=6$; b 的取值范围是 $\{b \in \mathbf{R} \mid b \neq -2\}$.

$$(3) f_3(x) = G(x) - F(x) - 1 = (3-a)x - 2 - b.$$

当方程 $G(x) - F(x) - 1 = 0$ 的解集是 $\mathbf{R}$ 时, 有

$$3-a=0, -2-b=0, \leftarrow f_3(x) \text{ 的图象与横轴重合}$$

解得 $a=3, b=-2$.

$$(4) f_4(x) = 2F(x) - G(x) = (2a-3)x + 2b + 1.$$

当不等式 $2F(x) - G(x) > 0$ 无解时, 有 $2a-3=0, 2b+1 \leq 0$,

所以, $a = \frac{3}{2}$; b 的取值范围是 $\{b \mid b \leq -\frac{1}{2}\}$.



在本例的第(4)小题中, 如果 $2a-3 \neq 0$, 那么一次函数 $f_4(x) = (2a-3)x + 2b+1$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点 $(x_0, 0)$, 这时不等式 $2F(x) - G(x) > 0$ 的解集是 $\{x \mid x > x_0\}$ 或 $\{x \mid x < x_0\}$, 与这个不等式无解是矛盾的. 继 $2a-3=0$ 之后, 假设 $2b+1 > 0$, 那么不等式 $(2a-3)x + 2b+1 > 0$ 总是成立的, 即不等式 $2F(x) - G(x) > 0$ 的解集是 $\mathbf{R}$, 这与已知也是矛盾的.

【例5】 当 $k \in [-1, 1]$ 时, 不等式 $x^2 + (k-4)x - 2k + 4 > 0$ 总是成立的, 求 x 的取值范围.

□分析 把已知不等式改写成关于 k 的不等式, 通过一次函数去求 x 的取值范围.

□解 不等式 $x^2 + (k-4)x - 2k + 4 > 0$ 可化为 $(x-2)k + (x^2 - 4x + 4) > 0$. ①

当 $x=2$ 时, ①不成立, 所以, $x=2$ 不在 x 的取值范围之内.

当 $x \neq 2$ 时, 设 $f(k) = (x-2)k + (x^2 - 4x + 4)$, $k \in [-1, 1]$. ②

把 k 理解为自变量, 这时②表示线段, 且 $x^2 + (k-4)x - 2k + 4 > 0$ 总成立与 $f(k) > 0$ 总成立是等价的, 而 $f(k) > 0$ 总成立时, ②表示的线段应该位于 x 轴的上方, 它只需线段的两个端点在 x 轴的上方,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0, \end{cases}$$

解得 $x < 1$, 或 $x > 3$. 所以, x 的取值范围是 $\{x \mid x < 1, \text{ 或 } x > 3\}$.



本例中, 当 $x \neq 2$ 时, $f(k)$ 才是 k 的一次函数, 我们的讨论才得以按一次函数的相关知识去施行, 而 $x=2$ 是不是问题的解, 事先是不清楚的, 所以, 对 $x=2$ 应当另行讨论, 我们也是这样做的.

【例6】 设 $A = \{2^p + 3^q \mid 0 < p \leq q < 3, \text{ 且 } p, q \in \mathbf{Z}\}$, $f(x) = ax + b$, c 是实数.

(1) 当 $a, b \in A$, 且 $a < b$ 时, 确定方程 $f(x) + c = 0$, $x \in (1, 2)$ 有根的条件;

(2) 当 $a, b \in A$, 且 $a > b$ 时, 确定方程 $f(x) - 1 + 2c = 0$, $x \in [-1, 3]$ 有根的条件.

□分析 首先把 A 确定下来, 其次把 a, b 确定下来, 最后通过函数、方程、不等式的关系去获解.

□解 由 $0 < p \leq q < 3$, 且 $p, q \in \mathbf{Z}$, 可知

$p=1$ 时, $q=1$, 或 $q=2$; $p=2$ 时, $q=2$.

所以, $2^p + 3^q$ 的值有以下三种情况, 即 $2^1 + 3^1 = 5$, $2^1 + 3^2 = 11$, $2^2 + 3^2 = 13$, 所以 $A = \{5, 11, 13\}$.

(1) 当 $a, b \in A$, 且 $a < b$ 时, 有 $a=5, b=11$; $a=5, b=13$; $a=11, b=13$.

当 $a=5, b=11$ 时, 有 $f(x) = ax + b = 5x + 11$,

$f(x) + c = 0$, $x \in (1, 2)$ 就是 $5x + 11 + c = 0$, $x \in (1, 2)$. ①

令 $g(x) = 5x + 11 + c$, $x \in (1, 2)$, 则方程①有根的条件是 $g(1) < 0$, $g(2) > 0$, 即 $16 + c < 0$, $21 + c > 0$, 解得 $-21 < c < -16$.

同理可得, $a=5$ 与 $b=13$ 、 $a=11$ 与 $b=13$ 时, 方程①有根的条件分别是

$$-23 < c < -18; -35 < c < -24.$$

(2) 当 $a, b \in A$, 且 $a > b$ 时, 有 $a=13, b=5$; $a=13, b=11$; $a=11, b=5$.

当 $a=13, b=5$ 时, 方程 $f(x) - 1 + 2c = 0$, $x \in [-1, 3]$ 可化为

$$13x + 5 - 1 + 2c = 0, x \in [-1, 3],$$

即 $13x + 4 + 2c = 0$, $x \in [-1, 3]$. ②

令 $\varphi(x) = 13x + 4 + 2c$, $x \in [-1, 3]$, 则方程②有根的条件是

$$\varphi(-1) \leq 0, \varphi(3) \geq 0,$$

即 $2c - 9 \leq 0$, $2c + 43 \geq 0$, 解得 $-\frac{43}{2} \leq c \leq \frac{9}{2}$.

同理可得, $a=13$ 与 $b=11$, $a=11$ 与 $b=5$ 时, 方程②有根的条件分别是 $-\frac{49}{2} \leq c$

$$\leq \frac{3}{2}; -\frac{37}{2} \leq c \leq \frac{7}{2}.$$



这里给出 $5x+11+c=0$, $x \in (1, 2)$ 与 $13x+4+2c=0$, $x \in [-1, 3]$ 有解的几何解释, 以帮助读者提高对问题的理解能力.

设 $g(x) = 5x+11+c$, $x \in (1, 2)$ 以后, $g(x)$ 是增函数, 只有在 $g(1) < 0$ 与 $g(2) > 0$ 的情况下, 线段与 x 轴才能有交点, 这时方程才能有解, 见图 1-2(1).

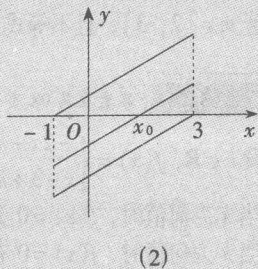
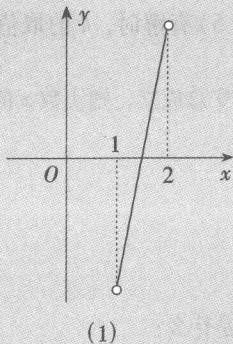


图 1-2

设 $\varphi(x) = 13x+4+2c$, $x \in [-1, 3]$ 以后, $\varphi(x)$ 是增函数, 方程 $13x+4+2c=0$, $x \in [-1, 3]$ 有根的情况有三种, 即 $x = -1$, x_0 , 3 , 这三种情况下, 都需要 $\varphi(-1) \leq 0$, $\varphi(3) \geq 0$, 见图 1-2(2).

注意, 图 1-2(2) 中, 横、纵轴的单位长度不统一.



练习 一

看完讲解, 要及时做题巩固哟!

一 选择题 (答案在第 97 页)

1. 设 a 、 b 是常数, 且 $a \neq 0$, 则使方程 $ax+b=0$, $x \in (-1, 1)$ 有根的点 (a, b) 覆盖的平面区域是图 1-3 中的 (用阴影表示, 不含原点) ()

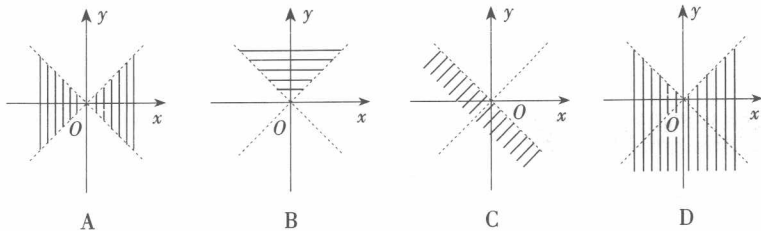


图 1-3



2. 设 a, b 是常数, 且 $a \neq 0$. 当方程 $ax + b = 0, x \in [1, 2]$ 无解时, a, b 应满足的条件是 ()

A. $a + b > 0, 2a + b < 0$

B. $3a + 2b \geq 0$

C. $3a + 2b \leq 0$

D. $3a + 2b \neq 0$

二 填空题 (答案在第 97 ~ 98 页)

3. 设 $f(x) = -x + 2k$, 当方程 $f(x) = 0, x \in [1, 5]$ 有解时, k 的取值范围是 _____.

4. 若 $m \in [2, 3]$, 且不等式 $x^2 + mx - 4m - x - 13 < 0$ 总成立, 则实数 x 的取值范围是 _____.

三 解答题 (答案在第 98 页)

5. 设 $k \in \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} -2x + k (x \leq 1), \\ x - 3 + k (x \geq 1). \end{cases}$

(1) 当 k 为何值时, $f(x) = 0$ 无解?

(2) 当 k 为何值时, $f(x) = 0$ 有且只有一个解? 其值是什么?

(3) 当 k 为何值时, $f(x) = 0$ 有两个解, 且其中的一个解在区间 $(0, 1)$ 内?

6. 设 $k \in \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x + k (x \leq 0), \\ k (0 \leq x \leq 1), \\ -x + 1 + k (x \geq 1). \end{cases}$ 就 k 的取值的各种可能的情况, 讨论方程

$f(x) = 0$ 的解的情况, 并画出相应的图形.

1.2 二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系

模型 $y = ax^2 + bx + c, ax^2 + bx + c = 0, ax^2 + bx + c \neq 0$



明明白白才是真!

为了方便起见, 这里我们把二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系归纳在一个表格里, 见表 1-1.



表 1-1

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)的根	有两相异实根 $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集	$\{x \mid x < x_1, \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$	实数集 $\mathbf{R}$
	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$



迁移

深度讲解,条理真清晰呀!

当 $a < 0$ 时, $y = ax^2 + bx + c$ 、 $ax^2 + bx + c = 0$ 、 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 $ax^2 + bx + c < 0$) 的关系,可参照表 1-1 归纳出类似的结论.



例题

哇! 分析,解答,解惑,真像老师讲题一样!

【例 1】 画出能够反映出抛物线 $y = -x^2 + x + 6$ 的数量特征和位置特征的草图,并根据草图指出方程 $-x^2 + x + 6 = 0$ 的根,以及不等式 $-x^2 + x + 6 < 0$ 的解集.

□解 抛物线 $y = -x^2 + x + 6$ 的开口方向向下,对称轴的方程是 $x = -\frac{1}{2(-1)}$, 即 $x = \frac{1}{2}$, 顶点的坐标是 $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$, 与 x 轴的交点的坐标是 $(-2, 0)$ 、 $(3, 0)$, 与 y 轴的交点的坐标是 $(0, 6)$.

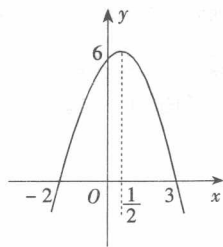


图 1-4

反映抛物线的数量特征和位置特征的草图,见图 1-4.