桃李 书系

数学教与思

SHUXUE JI

中国轻工业出版社

数学教与思

SHUXU AO YU S

中国轻工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教与思/杨林著.
—北京：中国轻工业出版社，2012.6
ISBN 978-7-5019-8857-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①数学教学－教学研究
Ⅳ.①O1-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 132449 号

策划编辑：刘云辉　责任终审：唐是雯　封面设计：郝亚娟
责任编辑：张文佳　责任监印：吴京一　图书策划：天宏教育

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街 6 号，邮编 100740）
印　　刷：三河市人民印务有限公司
经　　销：各地新华书店
版　　次：2012 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：710×960mm　1/16
印　　张：15
字　　数：280 千字
书　　号：ISBN 978-7-5019-8857-0
定　　价：35.00 元

邮购电话：010－65241695　传真：65128352
发行电话：010－85119835　85119793　传真：85113293
网　　址：http://www.chlip.com.cn
Email：club@chlip.com.cn
如发现图书残缺请直接与我社邮购联系调换
120374Y1X101HBW

◎自 序

追求数学的真善美

30多年数学教研的实践与探索，使我成长为一个酷爱数学的人。本书收录了我的数学学习、教学与教育随笔，涉及数学教学与改革、初等数学研究、数学奥林匹克竞赛、数学思想方法、教师教育与培训等多个专题和领域。这些文章所要展示的不仅仅是对专题和问题的实践与探索，更是我毕生立足教育、不懈追求数学真善美的历程和记录。

求真，磨砺理性精神

世界万物，真善美是理想的最高境界，数学发展的目标是追求真理，探索事物的客观规律性，并在这一过程中形成数学所特有的理性精神。真实是这种理性精神的首要体现，它既反映事物的客观规律性，又要求这种由数学抽象建构起来的真理性必须经受逻辑和实践的双重检验。这要求一个真正的数学教育工作者对待数学和数学教育要有注重逻辑、不轻信经验、勇于质疑与批判以及刻苦钻研的求真精神。本书文章的特点之一正是它的真实性。虽然本人对数学及数学教育的认识尚浅，能力和水平有限，但绝无用自己的口说别人话的举措。这些文章中，有些是探索数学的内在规律及其结论的成果，如《一个不等式的推广及其应用举例》一文中，得出了被国内初数界誉为“苏—杨不等式”的成果等；有的则是对在数学教学中存在一段时间且具有一定影响的错误结论和方法的质疑与修正，如《也谈一个非标准图形的计数问题》、《关于whc137证明中的两个问题》等。

臻善，张扬人性道德

数学的"善"主要体现在数学的结构与秩序上，体现在数学的包容性上，体现在数学应用的广泛性上。《一类数学竞赛题的发展、演化与联系初探》一文，从知识的结构、关联，认知的动态发展和运用的实效等多个侧面体现出"善"的隐含；《三角形的一种母子关系映射反映原则及其功用》、《三角形的折心及其与各心的联系》也同样说明了知识内在结构的和谐、统一和相互关联的"善"意。不仅如此，我们还应从中感受到"善"的品质和教化功能。如探索过程中的执著与坚韧；论证过程中的务实与严谨；创新过程中的开拓与超越等。同时，通过数学的教学来推行"善"举，树立学生的学习志向和目标；培养学习兴趣与习惯；提升学习品质与能力，有意引导学生对"善"产生一种心向往之的需要。

乐美，感悟心性意境

数理逻辑学家罗素把数学美比作一种"冷而严肃的美"，数学美是数学真理性的表现形式，是数学结构中统一性与奇异性的对立统一。有人说：变化中的不变量是数学美的共同根源，对此，本人在《指数、对数函数的一个不变性及其应用》、《解决"两色分布"的不变量方法》等文章中略有感悟。又如《单形·欧拉公式·杨辉三角联系初探》一文中，把看似不相干的数学现象通过抽象、类比等数学思想方法，获得了它们内在联系的清晰图像，揭示出数学有机整体的统一性。数学中这种"美"的内在与追求，也是数学教学艺术的一个重要组成部分，是引导学生学好数学的内驱力，同时也是培养学生理性精神、提升素质的原动力。

时代在发展，数学教育也在不断地变化，而本书又是跨30年的论文剪辑，出版前虽经作者进行了"与时俱进"的打磨和"刷新"，但恐仍留陈迹，为了不至于误导读者，还望读者能本着数学的求真精神，用历史的眼光、批判的思考来对待。

杨　林

2012年3月25日

目 录

专题一 探寻课堂教学实效

专题二 注重问题解决价值

专题三 培养数学思维能力

专题四 提升教师培训质量

专题一

探寻课堂教学实效

当今世界，数学科学以及数学量化模式技术正在“科学数学化”的过程中推动着科学技术的突飞猛进，数学本身也孕育着突破。一方面，科技、经济的发展和社会进步需要数学文化广泛深入的传播，另一方面，这一传播却受到学生厌学数学这一“远离数学”现象的严重挑战。这就迫切需要深化数学教育改革，不断提高数学教师教学的实践能力和研究水平。深入地研究学生，挖掘教材，探索教学规律和方法。数学教学是一门具有高度科学性和艺术性的学问，它随着教学环境的不同，在基本教学规律的制约下，在方式、方法上有着极大的灵活性和创造性。所谓教无定法，即指对教学方法——蕴涵着丰富的教学艺术的科学方法的探讨将是永无止境的。

以下所展示的文章皆为作者在教学实践中的一些探索和尝试，可作为教学中的素材和借鉴，望能收到以孔窥豹、抛砖引玉之效。

数学教学的“层次观”[①]

——对教学艺术的遐想(提要)

1 数学教学是一个开放的层次系统

1.1 层次的含义

这里的层次是指事物内部各种要素的不同组合形态,其动态表征是主次、先后、轻重等事的顺序、数量特征;其静态表征是上下、内外、纵横等物的结构、几何特征。

教学不但是门科学,更主要的还是一门艺术,要掌握好这门艺术,不断提高教学技艺,有很多因素在起作用,其中,对教学层次的娴熟处理能力与水平是至关重要的。这是一个不断认识、实践、完善的开放的教学“层次观”。

1.2 层次观的宏观背景

1.2.1 数学发展与教学体系的矛盾统一

数学发展史表明,数学的发展进程与现行的教学体系并非同步。反映在教学上,要求我们运用好层次观妥善处理群体与个体的关系,以便更好地了解过去,把握现在,寻求发展。

1.2.2 教学体系与学生心理发展过程的矛盾统一

教学的理论与体系是一定时代的政治、经济和社会发展水平(包括学生心理发展水平)相适应的产物,但发展总不是平衡的。这就需要通过教学,调整层次来提高学生的思维能力和认识水平。

---

① 原载《长沙教育学院》1996 年增刊。

1.3 层次观的微观背景

1.3.1 课堂教学与课外学习相结合

教学源于经验,学生是具有一定阶段的生活经验的主观能动者,课堂教学是有限的、指导性的,必须注意结合与引导学生的各种生活经验与实践,促使形成各种个体知识结构适应型(包括可能出现的"变异体")。

1.3.2 课堂教学与教材体系相结合

教材或课本是相对稳定的,而教学则是充满活力的认识活动。只有通过恰当的层次处理教学,才能使教学既沿着教材体系的正确轨道前进、充分挖掘教材的功能,又不至于过分受到教材的束缚,限制学生能力的超常发展。

1.3.3 教材体系与不同教学要求相结合

教学对象与教材体系在一定条件下可能会出现差异,认识到这一点,通过对教材和教学的恰当层次处理,找到最佳结合点,从而达到较好教学效果的目的。

2 课堂教学的层次处理

2.1 不同教学方法的不同层次处理

选择不同的教学方法,对同一教学对象和教学内容可以有不同的层次处理。

2.2 概念教学的层次处理

一般来说,概念教学是数学教学的重点,很多时候亦是难点。从认识论的角度看,概念本身是不断发展和完善的。反映在教学上,必须注意与学生认识水平相适应的层次处理,既要揭示概念的本质属性,比较准确地把握概念,又要留有充分的发展余地。在这里通常容易犯的弊病是追求过分完美。

2.3 解题教学的层次处理

解(证)题是学习数学的基本活动,也是学生认识数学的基本实践活动,课堂上解(证)题要突出思路、注意方法、理顺过程、培养能力,不要在过分严谨性和枝节问题上纠缠。

2.4 习题布置的层次处理

练习、习题是课堂教学必不可少的环节和自然延伸,起到消化、巩固、加深对知识的理解和掌握的作用,习题的恰当配置、增删有助于学生全面、深入地掌握所学

的知识及其发展线索。

2.5 复习的层次处理

课内与课外复习相结合;重点与一般复习相结合;纵向复习强调知识结构与知识点的作用;横向复习突出专题知识应用与知识板块的功能;纵横相结合的复习使知识构成一个完整的知识网络结构。如果将学生比喻为一个编织好了自己知识网络的"蜘蛛",那么,一旦需要,他就能从这个网络中的任一处循着各种途径或选择最佳途径顺利地达到网络中的另一处。

2.6 层次处理的艺术性

2.6.1 层次与节奏

课堂层次处理教学应像一首悦耳的交响乐,有时是独奏,如交代背景材料、讲述重要概念;有时应齐奏,如复习旧知识、巩固主要内容;更多的时候是协奏,如分析解题思路、选择方法、阐述过程、讨论问题;升华到高潮时出现变奏,如由旧知识过渡到新知识、由简单概念上升到复杂概念、由具体到抽象、由特殊到一般,又如发现新问题、产生新结论、总结新模式。

2.6.2 层次与板书

数学教学离不开板书,整洁、清晰、优美的板书应像一幅美妙的画图,这幅图画应是逐步完成的,它有新概念、新思想的轮廓,讲究结构的流畅与顺序的和谐。它以五彩缤纷的方法和技巧展现,合乎逻辑的构思与布局传神。

2.6.3 各层次的呼应

层次与层次之间的连接与过渡不应是简单的拼凑和堆积,而应是有机地、逻辑地结合起来形成的一个更大的、更高级的层次。每一个层次处理中讲究穿插、伏笔,留有余味是必要的,这不光是层次教学体系本身的需要,更是激发学生学习兴趣的一种生长素。这种层次间的结合与呼应需在整体研究的基础上进行。用一句诗来形容,这些层次"横看成岭侧成峰,远近高低各不同"。

一类数学竞赛题的发展、演化与联系初探[①]

提出好的问题并巧妙地予以解决，是推动数学竞赛活动深入发展的内在动力，开展对竞赛命题的研究，已逐渐成为“竞赛数学”的重要组成部分，也是广大教育工作者、各级教练员进行培训指导、驾驭竞赛活动的一大法宝。

本文是从一类几何不等式问题的发展、变化中，探索这类问题的某些实质性联系和相应的思考方法与解题技巧。

问题 1　平行四边形区域上的三角形面积不大于该平行四边形面积的一半。

问题 2　三角形区域上的平行四边形面积不大于该三角形面积的一半。

这是熟知的两个具有对偶形式的命题(其中问题 2 的证法有多种，可参见[1])，它是一类竞赛命题的生长点。

例 1　已知$\triangle ABC$的面积为 1，第一个比赛者在边AB上选取点X，第二个在边BC上选取点Y，随后第一个又在边AC上选取点Z，第一个比赛者希望使$\triangle XYZ$面积最大，第二个则力求使得到的面积最小，问第一个比赛者能保证得到$\triangle XYZ$的最大面积是多少？(1975，第 9 届全苏数学奥林匹克)

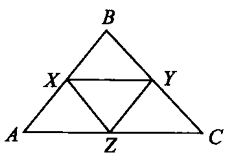

图 1

略解　首先指出，不管第一个比赛者怎么做，第二个比赛者能力争使$S_{\triangle XYZ}\leqslant 1/4$。为此，他可以选择点$Y$，使得$XY /\!/ AC$(见图 1)。综合运用问题 1 与问题 2 可知，对于底边AC上的任一点Z，将有$S_{\triangle XYZ}\leqslant 1/4$。从另一个方面，第一个比赛者取边$AB$和$AC$的中点作为$X$和$Z$，不管第二个比赛者怎样选择，他自己总保证等式$S_{\triangle XYZ}=1/4$成立。

① 此文被“中国人民大学书报资料中心”复印收藏，收藏目录为“中学数学教学，月刊，G35，1993.8”，原载《中等数学》.1993.3。

例 2 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上，求证：四个三角形：$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_1P_2P_4$、$\triangle P_1P_3P_4$ 以及 $\triangle P_2P_3P_4$ 中，至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的 1/4。（1986，首届全国中学生数学冬令营）

分析 事实上，如图 2 所示，若设 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=\min\{S_{\triangle P_1P_2P_3},S_{\triangle P_1P_2P_4},S_{\triangle P_1P_3P_4},S_{\triangle P_2P_3P_4}\}$

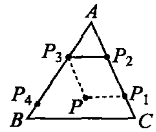

图 2

则易证："以 $\triangle P_1P_2P_3$ 两边 P_1P_2 与 P_2P_3 为邻边的平行四边形 $PP_1P_2P_3$ 必被凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所覆盖。"然后综合运用问题 1 与问题 2 即得所需结论。

该问题中，四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 是凸的（隐含在题设中）这个条件是必要的，并可通过减弱条件："凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 被 $\triangle ABC$ 所覆盖"，而将问题进行推广。

例 3 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1，求证：在它的边上（包括顶点）或内部可以找出四个点，使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均大于 1/4。（1991，全国高中数学联赛）

分析 不妨设 $S_{\triangle ABD}=\min\{S_{\triangle ABC},S_{\triangle BCD},S_{\triangle CDA},S_{\triangle DAB}\}$

（1）若 $S_{\triangle ABD}>1/4$，则选取 A,B,C,D 即可。

（2）若 $S_{\triangle ABD}<1/4$，则选取 B,C,D 及 $\triangle BCD$ 的重心 G 四点即可。

（3）若 $S_{\triangle ABD}=1/4$，以 AB,AD 为邻边的 $\square ABPD$ 的顶点 P 在凸四边形 $ABCD$ 的内部。$AM /\!/ BC$ 交 CD 于 M（见图 3）。在 DM 线段上（不包括 D 点）取点 X。则四点 A,B,C,X 满足要求。若 $AD /\!/ BC$（P 点落在四边形 $ABCD$ 边界 BC 上，此时 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=1/4$，延长 BA 与 CD 相交于 E，则可得 $AD/BC=1/3\Rightarrow S_{\triangle EBC}=9/8$，于是，取 EB 的中点 X，取 EC 的中点 Y，则由问题 1 与问题 2 即知 X,Y,C,B 四点满足要求。

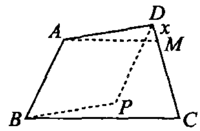

图 3

杨克昌在文[2]中将例 3 加强为：

例 4 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1，在它的边上（包括顶点）或内部总可以找出四个点，使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均不小于 4/15，并猜想 4/15 是最佳值。

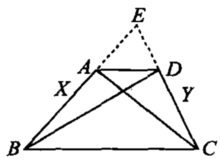

图 4

遵循例 3 的思路，不难发现：图 4 所示的特殊情形是问题的关键，由此，可得到 4/15 是最佳的证明[3]。

例 4′ 已知梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$S_{梯形ABCD}=1$，$S_{\triangle ADC}=1/5$（见图 5）。证明这个梯形区域不存在这样的四个点 M,N,P,Q，使 $m=\min\{S_{\triangle MNP},S_{\triangle MNQ},S_{\triangle MPQ},S_{\triangle NPQ}\}>4/15$。

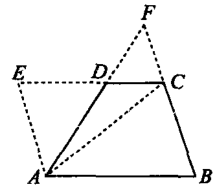

图5

略证 对梯形 $ABCD$ 区域的任意四点 M,N,P,Q。

(1)若四点 M,N,P,Q 的凸包为三角形,延长 CD 到 E,使 $CE=AB$,则有

$S_{\square ABCE}=2S_{\triangle ABC}=2(S_{梯形ABCD}-S_{\triangle ACD})=2(1-1/5)=8/5$

设上述凸包三角形为 $\triangle MNP$,则

$\triangle MNP\subset$ 梯形 $ABCD\subset\square ABCD$,由问题1知

$S_{\triangle MNP}\leqslant(1/2)S_{\square ABCE}=S_{\triangle ABC}=4/5$

而对 $\triangle MNP$ 内的点 Q, $\min\{S_{\triangle MNQ}, S_{\triangle MPQ}, S_{\triangle NPQ}\}\leqslant(1/3)S_{\triangle MNP}\leqslant 1/3\times 4/5=4/15$

(2)若四点的凸包为四边形 $MNPQ$,延长 AD 与 BC 交于 F。

$\frac{S_{\triangle FAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{FB}{BC}=\frac{FB}{FB-FC}=\frac{1}{1-\frac{FC}{FB}}=\frac{1}{1-\frac{CD}{AB}}=\frac{1}{1-\frac{1/5}{4/5}}=\frac{4}{3}\Rightarrow S_{\triangle FAB}=4/3\quad S_{\triangle ABC}=4/3\times 4/5=16/15$

又凸边形 $MNPQ\subset$ 梯形 $ABCD\subset\triangle FAB$。故由例2(问题2)的推广可知:

$m\leqslant 1/4\times 16/15=4/15$

至于四点中有两点重合或四点在一直线上的情形,则结论显而易见。

注:这类问题中,梯形作为平行四边形和三角形的联系纽带,是促成问题转化的关键,这也是证明有关几何问题的一种常用技巧。

类似的问题还有很多,如:

例5 $\square MNPQ$ 的一边 PQ 在 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上,另两点 M,N 分别在 AB、AC 上,求证:$MNPQ$ 的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的一半。(1989,湖北黄冈地区初中竞赛)

例6 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 S,作一直线 $l/\!/BC$,且与 AB,AC 分别相交于 D,E 两点,记 $\triangle BED$ 的面积为 k。证明 $k\leqslant(1/4)S$。(第二届祖冲之杯初中数学邀请赛)

通过这两道试题,使我们看到,问题1与问题2的基本思想方法越来越多地渗透到中学数学中。

在有关"抽屉原理"的竞赛辅导中,可以看到这样一个简单问题:"在 $\triangle ABC$ 上任意放置九个点,则其中必存在三点 X,Y,Z,使得 $S_{\triangle XYZ}\leqslant(1/4)S_{\triangle ABC}$。"以后,有人将九点改为七点,结论仍然成立,区工在文[4]中将点数减到最少为五点,并用剖分方法进行了证明。事实上,如果深入分析,应用以下问题3的有关结论,则"五点问题"即可转化为像例2那样的"凸四边形问题"而得解。

问题3 设平面上有五个已知点,其中每三点不在一条直线上,求证这五个点中必有某四个点能构成一凸四边形的顶点。(1962,美国第23届普特南竞赛)

证略。

至于问题3本身的推广和讨论,本文不再赘述。

与前面的“五点问题”对偶的是

例7 设正方形$ABCD$的面积为1,在其上任意放置九个点,则其中必存在三点X,Y,Z,使$S_{\triangle XYZ}\leqslant 1/8$。(1963,北京市高三竞赛)

将例7加强,有

例8 设正方形$ABCD$的面积为1,在其上任意放置六个点,则其中必存在三点X,Y,Z,使$S_{\triangle XYZ}\leqslant(1/8)$[5]。

改变对问题1与问题2的视角,有

例9 已知凸多边形,在其内不能置放面积为1的任何三角形。证明:这个多边形能置于面积为4的三角形内。(1974,第8届全苏数学奥林匹克)

这只需证明“该凸多边形存在三个顶点X,Y,Z,组成的三角形面积是任意三点组成的三角形面积最大者,且$S_{\triangle XYZ}\leqslant 1$”及“该凸多边形必被面积不大于4的$\triangle ABC$所覆盖,其中$X,Y,Z$分别为$AB,BC,CA$的中点。”

将例9稍加改造,又有

例10 平面上有n个点,其中任三点都可组成三角形,且其面积均不超过1。证明存在一个面积不超过4的三角形,它能覆盖住所有n个点。(1987,第二届全国中学生数学冬令营)

顺便指出,1991年澳大利亚数学奥林匹克的第5题正是该题。

接下来,我们考察另一类与1/4有关的几何不等式问题,常庚哲教授在文[6]、[7]中运用复数方法做了证明。

例11 从$\triangle Z_1Z_2Z_3$的顶点Z_1,Z_2,Z_3各作角平分线分别交对边于W_1,W_2,W_3。求证:$S_{\triangle W_1W_2W_3}\leqslant(1/4)S_{\triangle Z_1Z_2Z_3}$。

式中等号当且仅当$\triangle Z_1Z_2Z_3$为正三角形时成立。

例12 $\triangle ABC$的内切圆分别切各边于A',B',C',则

$S_{\triangle A'B'C'}\leqslant(1/4)S_{\triangle ABC}$。

式中等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立。

三角形的一个顶点与其对边上任意一点的连线称作“塞瓦线”,这个术语取自意大利数学家塞瓦(G · Ceva)的名字,是与他在1678年发表的著名的“塞瓦定理”联系在一起的。

李尔源同志在文[8]中,通过对例11、例12及三角形的中位三角形、锐角三角

形的垂足三角形等具体事例的深入探讨,挖掘出此类问题的本质联系,提出并用几何方法证明了以下的推广问题。

问题 4　设 H 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点,AH,BH,CH 的延长线交 $\triangle ABC$ 三边于 D,E,F 三点,则 $S_{\triangle DEF}\leqslant(1/4)S_{\triangle ABC}$。

式中等号当且仅当点 H 与 $\triangle ABC$ 的重心 P 重合时成立。

这样,前述特例的证明,即转化为证明相应的三条塞瓦线共点即可。

通过进一步的探讨,我们发现:问题 4 与问题 2 是等价的[4],其中间联系环节也正是塞瓦定理。

例 13　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线交外接圆于 A_1,类似地定义 B_1,C_1,AA_1 与 B,C 处的外角平分线相交于 A_0,类似地定义 B_0 与 C_0。证明:

$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2\ S_{\triangle AC_1BA_1CB_1}\geqslant 4\ S_{\triangle ABC}$

(1989,第 30 届 IMO 预选题)

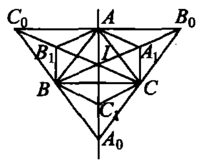

图 6

分析　设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,则 I 为 AA_0,BB_0,CC_0 的交点。由问题 4 可知 $S_{\triangle ABC}\leqslant(1/4)S_{\triangle A_0B_0C_0}$。剩下只需证明 $S_{\triangle A_0B_0C_0}=2\ S_{\triangle AC_1BA_1CB_1}$ 即可。而这一点,根据 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,同时 I 为 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心等条件可证

$A_1I=A_1A_0,B_1I=B_1B_0,C_1I=C_1C_0$ 来达到。

对于由塞瓦线所联系的"母子三角形"的面积关系、周长关系等有关问题还可进行深入探讨,限于篇幅,本文不再赘述。

参考文献

[1][俄]B. B. 波拉索洛夫. 平面几何问题集及其解答[M]. 周春荔,张同君等译. 长春:东北师范大学出版社,1988:247

[2]杨克昌. 探讨一道竞赛题的加强[J]. 湖南数学通讯,1991,6.

[3]杨林,张学文. 从一道竞赛题的加强谈起[J]. 湖南数学通讯,1992,6.

[4]区工. 定理的推广、加强与深入[J]. 湖南数学通讯,1991,5.

[5]杨路,张景中.《数学讲座》正方形内六点问题[M]. 成都:四川人民出版社

[6]常庚哲. 复数与面积[J]. 数学通报,1979,1.

[7]常庚哲. 关于三角形的两个不等式[J]. 数学通报,1980,2.

[8]李尔源. 三角形的一个不等式[J]. 数学通报,1990,5.