

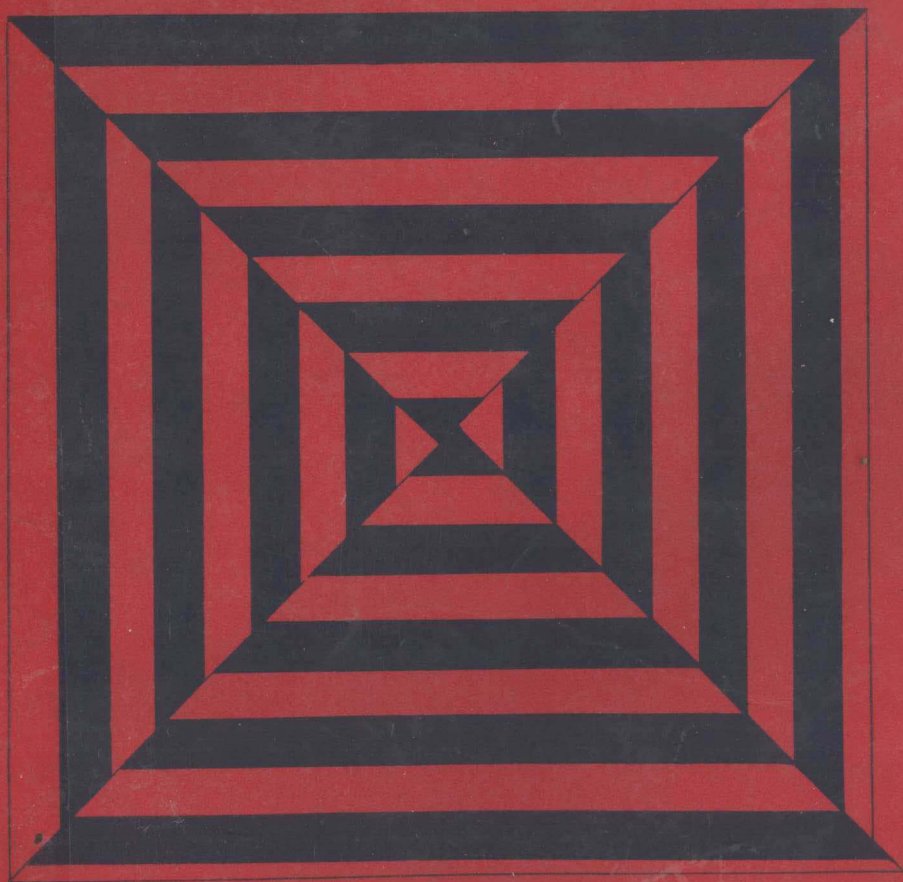
Washington

An Introduction to Calculus with Applications

應用微積分

上 册

郭 變 昌 譯



東華書局印行

# 應 用 微 積 分

上 册

著 者

*Allyn J. Washington*

譯 者

郭 燮 昌

東 華 書 局 印 行



---

**版權所有・翻印必究**

中華民國六十一年九月臺初版

大專  
用書 **應用微積分** (全二冊)

上册 定價新臺幣四十元整

(外埠酌加運費滙費)

著者 A. J. Washington  
譯者 郭 燮 昌  
發行人 卓 鑫 森  
出版者 臺灣東華書局股份有限公司  
臺北市博愛路一〇五號  
印刷者 臺灣中華書局印刷廠  
臺北市雙園街六〇巷九〇號

---

內政部登記證 內版臺業字第一〇三一號  
(61063)

# 序

本書主要的是為修習一或二學期微積分的技藝科學生而寫。重點在於微積分的基本題材與一些屬於較高深範圍的材料，所選教材着重於其在商業、社會科學、生物、以及物理、數學各方面的應用。用直觀而不注重嚴謹的方式推展並加強於教材的講解及應用。

用此書的學生要學過基本的代數、三角。但為了複習及參考，本書仍編進了一些代數及三角，因為這些都是瞭解與學習微積分的基礎。

本書中包括解析幾何，代數函數及初等超越函數的微分及積分，偏導數及重積分的簡介，基本統計附實驗曲線繪製，以及把函數展為級數。

本書中雖然討論了很多曲線像圓錐曲線等的直接應用，講述解析幾何主要仍為用在微積分上。有關極坐標一章之目的在於說明不同坐標系統之應用。同時，實驗曲線之編入乃在指出如何由數據繪出曲線。在偏導數與重積分的一章中，有一節的內容為立體解析幾何。除了解析幾何的這些特殊題材外，作圖的技巧與說明分佈在本書中各處，亦包含三角函數、指數函數、及對數函數之圖形。

微積分可使學生得到其他學科中的數學概念。本書介紹了許多其他科目中的各種應用以指出微積分的廣泛應用，生物學、物理學、經濟學、及化學中的指數成長及衰退問題便是其中一例。其他重要應用包括如何計算各種幾何圖形的面積與體積，速度及加速度的重要物理觀念，還有與商業及經濟有關的邊際利益問題。

多數教師可能會覺得並非本書中的所有教材都是其課程上所必須的。有些部份可略去不授而仍不失其連貫性。諸如一部份解析幾何及本書後半部的若干章節。這些題材是為配合學生是否需要而教師可斟酌講授。

## 2 應用微積分 (上冊)

本書的一大特點是 350 個以上解出的範例。這些例題有助於澄清並說明書中各點。作者感覺這些做好的例題對學生幫助頗大。

本書中約有 2000 個習題，所有奇數題的答案，包括圖形問題的答案，都附在本書之末。每章之後都有一組雜題，這些可作為補充題或複習的作業。

作者願借此機會，感謝許多用過本書中教材的人士所提供的意見。這其中我特別感激 Dutchess Community College 的數學系同仁。更感謝該學院的 John Davenport 先生的鼎助校閱教材及解答。最後，並對 Cummings 出版公司全體員工的協助與合作致深摯謝意。

A. J. W.

Poughkeepsie, New York

January, 1972

## 希臘字母及發音

<i>A</i>	$\alpha$	Alpha	<i>I</i>	$\iota$	Iota	<i>P</i>	$\rho$	Rho
<i>B</i>	$\beta$	Beta	<i>K</i>	$\kappa$	Kappa	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
<i>\Gamma</i>	$\gamma$	Gamma	<i>\Lambda</i>	$\lambda$	Lambda	<i>T</i>	$\tau$	Tau
$\Delta$	$\delta$	Delta	<i>M</i>	$\mu$	Mu	$\Upsilon$	$\upsilon$	Upsilon
<i>E</i>	$\epsilon$	Epsilon	<i>N</i>	$\nu$	Nu	$\Phi$	$\phi$	Phi
<i>Z</i>	$\zeta$	Zeta	<i>\Xi</i>	$\xi$	Xi	<i>X</i>	$\chi$	Chi
<i>H</i>	$\eta$	Eta	<i>O</i>	$o$	Omicron	$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Theta$	$\theta$	Theta	<i>\Pi</i>	$\pi$	Pi	$\Omega$	$\omega$	Omega

## 幾 何 公 式

$A$  = 面積,  $B$  = 底面積,  $c$  = 圓周,  $S$  = 側面積,  $V$  = 體積,

1. 三角形,  $A = \frac{1}{2}bh$  (圖 B-1)
2. 畢氏定理,  $c^2 = a^2 + b^2$  (圖 B-2)
3. 平行四邊形,  $A = bh$  (圖 B-3)
4. 梯形,  $A = \frac{1}{2}(a+b)h$  (圖 B-4)
5. 圓,  $A = \pi r^2$ ,  $c = 2\pi r$  (圖 B-5)
6. 長方體,  $A = 2(lw + lh + wh)$ ,  $V = lwh$  (圖 B-6)
7. 立方體,  $A = 6e^2$ ,  $V = e^3$  (圖 B-7)
8. 兩底平行的柱體或角柱體,  $V = Bh$  (圖 B-8)
9. 直圓柱體,  $S = 2\pi rh$ ,  $V = \pi r^2 h$  (圖 B-9)
10. 錐體或角錐體  $V = \frac{1}{3}Bh$  (圖 B-10)
11. 直圓錐體,  $S = \pi r s$ ,  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  (圖 B-11)
12. 球體,  $A = 4\pi r^2$ ,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  (圖 B-12)

平面圖形的周界為環繞圖形之曲線長度, 例如在圖 B-2 中三角形的周界  $p = a + b + c$ ,

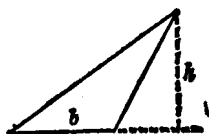


Figure B-1

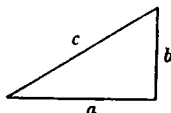


Figure B-2

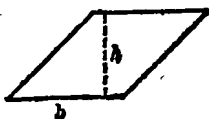


Figure B-3

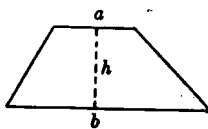


Figure B-4

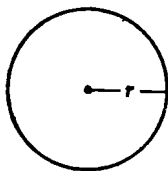


Figure B-5

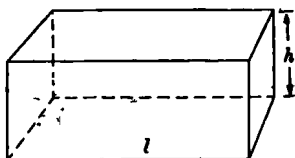


Figure B-6

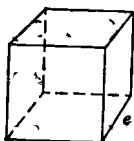


Figure B-7

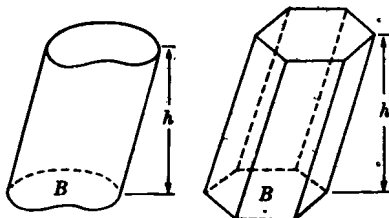


Figure B-8

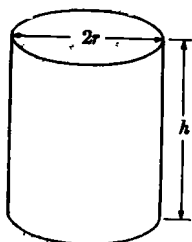


Figure B-9

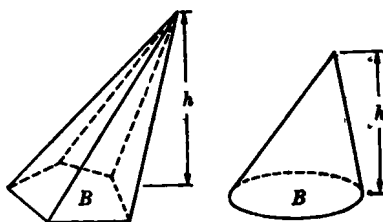


Figure B-10

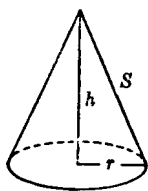


Figure B-11

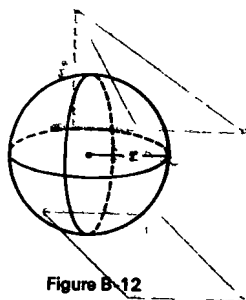


Figure B-12



# 目 錄

<b>第零章 告讀者</b> .....	1~3
0-1 引言.....	1
0-2 學習的建議.....	2
0-3 問題分析.....	3
<b>第一章 平面解析幾何</b> .....	4~59
1-1 引言.....	4
1-2 直角坐標.....	5
1-3 方程式之圖形.....	9
1-4 基本定義.....	14
1-5 直線.....	20
1-6 圓.....	26
1-7 拋物線.....	31
1-8 橢圓.....	36
1-9 雙曲線.....	42
1-10 移軸.....	48
1-11 二次方程式.....	53
1-12 雜題.....	56
<b>第二章 導 數</b> .....	60~97
2-1 代數函數.....	60

## 2 應用微積分 (上册)

2-2	極限	67
2-3	曲線的切線斜率	70
2-4	導數	75
2-5	導數的意義	78
2-6	多項式的導數	82
2-7	函數之積與商的導數	87
2-8	函數之冪的導數	90
2-9	雜題	96

## 第三章 導數的應用 98~130

3-1	切線與法線	98
3-2	曲線運動	102
3-3	相關變率	109
3-4	導數在作曲線中的應用	112
3-5	曲線製作的其他事項	118
3-6	極大與極小的應用問題	123
3-7	雜題	128

## 第四章 積分法 131~154

4-1	微分	131
4-2	反微分法	135
4-3	不定積分	136
4-4	曲線下的面積	140
4-5	定積分	146
4-6	數值積分法; 梯形律	149
4-7	雜題	153

<b>第五章 積分法的應用</b> .....	155~181
5-1 簡易微分方程式 .....	155
5-2 簡易微分方程式的應用 .....	158
5-3 用積分法求面積 .....	164
5-4 用積分法求體積 .....	169
5-5 其他應用 .....	175
5-6 雜題 .....	179

# 第零章 告讀者

## 0-1 引言

本課程的基本目標在於使學生瞭解微積分以便進一步知道怎樣應用到不同的學科上去。若瞭解了這一點，就會感覺本教材是更有趣更有意義了。

學習這個課程以前，作者認為你已有了包含代數及三角在內的知識基礎。但，在若干節中也列了些代數及三角的基本題材以便複習及參考。你應當利用這幾節使你確信自己都瞭解透徹。對數學課程除非已花了必須的功夫去真正瞭解其內容，否則不會收到完全的效果。

不論學習那一種課程，瞭解及應用的唯一最佳方法便是“邊學邊做”。許多學生認為數學太難，並訴說他們缺乏學習數學的能力而且其內容本身就很難學。當然，數學中的某些課題，特別是在較高等的範疇裏，是需要某種程度的才智的。但，在基本數學課程裏，成績太差的學生大多數都是由於不肯化功夫去瞭解。他通常先大略看一下內容，試做幾道題目，也許大多數都做不出來，就認為再也“不可能”做出來了。事實上，若詳細閱讀教材，仔細看懂例題，然後再去做題目，效果一定會好些，而且能使人覺得所下的功夫是有趣且有意義的了。不論用那一本教科書，不論教學的方法如何，或附加了其他的東西，只要你肯花相當的學習功夫，你一定會得到適當的成果。下節中提示些詳細的學習方法。

如果你好好照着這些指示去做，並養成良好的讀書習慣，你會享受到與其他課程一樣的成功的學習歷程。

## 0-2 學習的建議

在學習本書中的教材時，以下的指示可使你收事半功倍之效。

(1) 在做習題之前，先把前面的內容充分唸通。

(2) 仔細的看懂例題，確實了解如何從一步推演到下一步。這樣就可得到所用方法的良好概念。

(3) 所有的習題都做，每個題目都應當花相當的時間。假如你不能在相當的時間內把題目解出，就暫把這題保留先解下一題，以後再回頭解這一題。假如你發覺很多題都有困難，應當再重溫教材中的說明及例題，看看自己究竟是那一部分沒有弄清楚。

(4) 把全部或絕大部分習題都做完之後，再大略看一遍教材的說明，使自己確信已經明瞭了教材中陳述的方法及原則。

(5) 假如你已做到了以上四步而還有不清楚的部分，就應在課堂上要求老師說明。只要你已經盡了努力，就不必害怕問問題。

以下是一些讀書的習慣，不僅可應用在本課程上，而且也同樣有益於其他方面的課程。

(1) 要用充分的時間來瞭解教材，確知自己已有效地利用了時間。一個好的讀書環境幫助也很大。

(2) 學習書中的方法及原則，不要強記，雖然有些事實靠記憶能快速奏效，但仍應儘量避免。

(3) 要跟上進度，不要讓自己在進度上落後太多，以致很難找時間跟上進度，這時間通常是無法安排的。考前抱佛腳是個很要不得也通常是無效的學習方法。

(4) 考試時，在解題目以前一定要把每一題小心看清楚。先解你認為容易的。每一題都不要花太多時間。同時，要充分利用所有的時間。假如提早做完，應利用剩下的時間核驗。

## 0-3 問題分析

做練習式題目需要先懂得表述的方法。通常這一類的問題並不需要分析便能解答。另一方面，敘述性的問題在能寫成求解的形式以前需要適當的解釋。以下提供一些解答敘述性問題的技巧。

在解這類題目之前必須把它們寫成符號的形式。這是絕大多數學生感到困難的一步。由於這類問題除了一些計算以外，尚需要學生作進一步的分析因此就顯得更“困難”了。發生困難的幾點原因包括：

- (1) 以前做這類題目曾遭失敗，就誤以為所有敘述性題目都“不可能”解出來；
- (2) 沒有仔細閱讀題目；
- (3) 不能把解題步驟組織好；
- (4) 對題意的解釋不恰當或不完全。

這些毛病都只需要抱以正確的態度並加以小心就能克服了。

本書中有很多完全做好的敘述性題目（及許多其他指示分析的問題），都有合宜的解釋及解法步驟的說明。因此，在這裏就不再另外舉例。但，以下列舉了敘述性問題的分析方法。它們通常是如下的步驟：

- (1) 仔細閱讀問題。
- (2) 分辨清楚已知量與未知量。
- (3) 需要時作一圖形（通常有此必要）。
- (4) 用符號寫出敘述中所給的關係。
- (5) 解出所要求的未知量。

如果你能一步步照着做，並把解答整齊地寫出，就會感到解敘述性問題比以前要容易得多了。

# 第一章 平面解析幾何

## 1-1 引言

自從文藝復興時期到十七世紀，人們對其所生活的世界及宇宙作了許多發明。哥白尼 (Copernicus 1473-1543) 之新天文學的創始及開普勒 (Kepler 1571-1630) 之地球及其他天體運行的新觀念。伽利略 (Galileo 1564-1642)、斐瑪 (Fermat 1601-1665)及巴斯噶 (Pascal 1623-1662)在基本物理科學的高深學識裏也作了非常重要的工作。對這些發現極為有用的數學方法為笛卡爾 (Descartes 1596-1650)及另一些人所創。

物理科學進一步的知識中有許多未能解決的問題，如各種星球的運行及地球上物體之運動(例如拋射體)。由這些問題又導得數學的問題，如變率，曲線的方向及曲線所圍成的面積。

在十七世紀後期，牛頓 (Sir Isaac Newton 1642-1727)與萊布尼茲 (Gottfried Leibnitz 1646-1716) 把前人所作的加以推廣，兩人不約而同創立了微積分。利用這一支數學，運動、面積及許多問題均得以解決。

基本概念建立後，另有一些數學家，如奧伊勒 (Euler 1707-1783)、拉格蘭奇 (Lagrange 1736-1813) 及柯希 (Cauchy 1789-1857)，繼續把微積分學發揚光大。因而微積分在科學上特別是在物理學上產生了鉅大的影響。由於微積分用於力學之研究，使能正確地描述並預測行星及其他天體之運行。光學也成為有高度發展的科學。在十九世紀由於電學的數學基礎之建立，使之利用電作為非常重要的能源，而對人類文化發生了影響。微積分的到來在哲學、宗教及文學中人類思想的正確方法亦有戲劇性的影響。

到了二十世紀，其前三個世紀的數學進展，特別是微積分，推動了

文化的發展。在二十世紀中科學特別加速的進步當然是由於近幾百年數學的進展。

數學中有許多分枝，有些在過去幾年中看來於應用方面似不重要；另一些在 25 到 50 年前是尚無所知的，現今在應用方面都非常重要。數學，包括微積分在內，於生物學、商學及社會科學之重要性也遠超過往昔。電子計算機於此些方面的知識其影響也是無可比擬的。

用微積分可以解出許多不能用代數與三角方法來解的問題。本書將在第二章開始講述的微分方法可解出一量對於另一量的變率之問題，速度（距離對於時間的變率）就是一個重要的例。其他的應用可在本書的例題及習題中找到。

能用微積分解出之問題的另一主要類型為已知一函數的變率時求此函數。此為積分，在第四章中開始研討。其重要應用之一為當已知出生率可決定人口數。由積分可解出許多其他的問題如平面面積及幾何圖形的體積等。

在開始研習微積分之前，本章中首先闡述解析幾何的一些基本觀念。解析幾何為處理代數與幾何間關係之數學。以下所述的定義與方法對於研習微積分頗有助益。解析幾何本身的許多實際應用亦加說明。

## 1-2 直角坐標

在代數學中，變數係在一已知討論中可採取所許取之值的一量，常數則為保持不變之量。通常用最後幾個英文字母表變數，用最前幾個字母表常數。

藉方程式圖形以表兩個變數的方程式為最有價值方法之一。利用圖形可得方程式的“化身”，由此可知道有關此方程式的許多事項。

由於數可用一直線上的點表示，從這一事實就獲致圖形表示法。因為含有兩個變數必須各用一線。最便之法為使兩線互相垂直。

先將一線水平放置標為  $x$  軸，另一線垂直放置標為  $y$  軸。兩線交點稱為原點，以  $O$  表之。稱為直角坐標系。



## 6 應用微積分 (上冊)

由原點開始，沿兩軸標出相等之間隔，將**整數**( $0, 1, 2, 3, \dots$ 各數及其負值)置於這些位置。在  $x$  軸上**正整數**置於原點之右方，**負整數**在原點之左方。在  $y$  軸上，**正整數**置於原點之上方，**負整數**在其下方。平面由兩軸分成的四個部分稱為**象限**。(看圖 1-1)

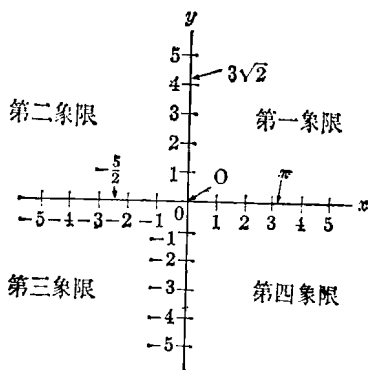


圖 1-1

位於兩整數間之點或代表**有理數**(以一整數被另一整數除所表出之數)或代表**無理數**(不能表為一整數被另一整數除之數;如  $\pi$  及  $\sqrt{2}$ )。用此方法,所有**實數**,包括有理數(整數為有理數)及無理數,均可在坐標軸上以點表出。本書中除另有說明外皆用實數。有時亦講到並用到**虛數**(負數之平方根)。

**例 A.**  $7$  為整數,有理數(因  $7 = \frac{7}{1}$ ),及實數(實數包括所有有理數);  $3\pi$  為無理數及實數;  $\sqrt{5}$  為無理數及實數;  $\frac{1}{8}$  為有理數及實數;  $7\sqrt{-1}$  為虛數;  $\frac{6}{3}$  為有理數及實數(用“2”表示時為一整數);  $\frac{\pi}{6}$  為無理數及實數;  $\sqrt{-3/2}$  為虛數。

平面中一點  $P$  係以**數對**( $x, y$ )表之。 $x$  值,為  $P$  點與  $y$  軸之垂直距離,稱為**橫坐標**。 $y$  值,為  $P$  點與  $x$  軸之垂直距離,稱為**縱坐標**。 $x$  與  $y$