

上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 8



非线性整数规划问题的 若干新算法

- 作者：王芬兰
- 专业：运筹学与控制论
- 导师：孙小玲



上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 8



非线性整数规划问题的 若干新算法

- 作者：王 芬 兰
- 专业：运筹学与 控制 论
- 导师：孙 小 玲



图书在版编目(CIP)数据

2006 年上海大学博士学位论文. 第 1 辑/博士学位论文编辑部编. —上海: 上海大学出版社, 2009. 12

ISBN 978 - 7 - 81118 - 511 - 9

I. 2... II. 博... III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2006 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162521 号

2006 年上海大学博士学位论文

——第 1 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人: 姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890 × 1240 1/32 印张 264.75 字数 7 376 千

2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—400

ISBN 978 - 7 - 81118 - 511 - 9/G · 513 定价: 1000.00 元(50 册)

上海大学

本论文经答辩委员会全体成员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单:

主任:	唐国春	教授,上海第二工业大学	201209
委员:	张连生	教授,上海大学	200444
	徐以凡	教授,复旦大学	200433
	鲁习文	教授,华东理工大学	200237
	朱德通	教授,上海师范大学	200234
导师:	孙小玲	教授,上海大学	200444

评阅人名单:

濮定国	教授, 同济大学应用数学系	200092
唐国春	教授, 上海第二工业大学管理学院	201209
高 岩	教授, 上海理工大学管理学院	200093
梁治安	教授, 上海财经大学应用数学系	200433
朱德通	教授, 上海师范大学数学系	200234

答辩委员会对论文的评语

本论文研究了三类重要的非线性整数规划问题：凹背包问题，二次目标函数的可分离整数规划问题和不可分离凸整数规划问题。论文对这三类问题分别提出了基于对偶和对偶分解方法的新算法，并进行了大规模的数值试验和比较。

论文对凹规划问题的算法基于线性下逼近和区域分割，计算技巧强，算法可解决具有上千个变量的凹整数规划问题。对二次目标函数的问题采用了等值面切割和对偶搜索方法，充分利用了二次函数的几何特征，在算法理论上具有创造性，并推广处理了不定的情形，数值试验表明该算法可解决高达 2 000 个变量的问题。论文还对不可分离整数规划的对偶分解算法进行了研究和探索，结果表明，结合区域分割的对偶算法是可行的，算法思想具有前沿性。

总之，我们认为作者对该领域的文献有全面的掌握，具有独立研究能力和很强的计算能力，算法设计新颖，数值结果全面。这是一篇优秀的博士学位论文。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决,一致通过博士学位论文答辩,建议授予理学博士学位。

答辩委员会主席：**唐国春**

2006年2月25日

摘 要

整数规划问题是指在一些等式约束、不等式约束和整数变量的限制下,最小化或最大化一个目标函数的优化问题。如果问题中的所有函数都是线性的,那就是线性整数规划问题。否则,就称之为非线性整数规划问题。研究整数规划的主要任务就是要设计一些有效算法来解决各种涉及整数变量的实际问题。随着解决线性整数规划问题的一系列高效算法和软件的发展,再加上高速计算机的发明,线性整数规划已经成为解决各个领域实际问题的一个重要工具。然而,由于目标函数的非线性性或者约束函数的非线性性,使得应用领域中的许多实际问题,不能用一个线性整数规划问题来表示,甚至也不能用一个线性整数规划问题来充分逼近。近三十年来,人们在求解非线性整数规划问题方面作出了很大努力,并且取得了很大进展。与线性整数规划和非线性连续优化不同的是,非线性整数规划几乎没有一种能应用广泛的有效算法,针对不同结构和特性的问题所设计的算法有时差异会很大。在这一点非线性整数规划与组合优化很类似。本文就三类不同的非线性整数规划问题给出了几种有效的精确算法。

全文共分五章,每章都有详细的数值例子和图形说明,而且还包含大量的计算实验,并且以表格的形式给出数值计算结果。

第一章介绍了非线性整数规划问题的发展背景,并且给出

几个非线性整数规划问题在不同应用领域的实际模型,问题涉及分层抽样的最优样本配置问题和制造业中的容量计划问题等。

第二章研究了一类带有单个线性约束的凹背包问题。我们对这类问题提出了一种有效的精确算法。该算法利用线性函数来逼近目标函数,通过求解松弛后的线性规划问题得到问题的下界和上界。然后运用区域分割来消除对偶间隙。对每个子问题重复上述过程,下界在迭代过程中不断更新。该算法经过有限步迭代即可找到原问题的最优解。数值结果表明该算法可以计算大规模的凹背包问题,变量个数可达 1 200 个整数变量。我们还将算法与现有的其他算法进行了比较,比较结果表明我们所提出的算法能更有效地解决凹背包问题。

第三章针对二次目标函数的可分离非线性整数规划问题,提出了一种收敛的拉格朗日和等值面切割法。该算法把拉格朗日对偶方法和一种新颖的等值面切割法有效地结合起来。在算法的迭代过程中,拉格朗日对偶法用来产生问题的下界和上界,等值面切割法用来减小对偶间隙。我们首先给出单约束问题的算法,然后将其推广到多约束情形和目标函数是不定二次函数的情况。计算结果表明该算法是非常有效的,可以求解含有 2 000 个整数变量的大规模二次可分离整数规划问题。与其他算法的比较结果也表明我们的算法是令人满意的。

第四章提出了一种拉格朗日和区域分割法用来求解多个线性约束、有界变量的不可分离凸背包问题。该算法利用拉格朗日分解对偶法产生问题的一个上界、一个下界、一个可行解和一个不可行解。得到的可行解和不可行解用来进行区域分

割,这样可以逐步减小对偶间隙。上界和下界可以用来去掉一些不存在最优解的子问题。该算法经过有限步迭代可以找到问题的最优解。初步计算结果也在文中给出。

第五章总结了前面几章提出的算法。这些算法本质上都属于分枝定界法的框架。算法的创新性在于针对不同的非线性整数规划问题的特殊结构,导出了不同的有效界估计方法。与求解整数规划问题的传统分枝定界法相比较,本文提出的算法是用区域分割或等值面切割来产生子问题的,同时产生的子问题可能不止两个,而传统的分枝定界法在每个结点同时只产生两个子问题。

关键词 非线性整数规划,区域分割,凹背包问题,分枝定界,二次非线性整数规划,可分离非线性整数规划,不可分离整数规划,拉格朗日松弛,拉格朗日分解,等值面切割。

Abstract

Integer programming deals with the problem of optimizing an objective function subjected to equality and/or inequality constraints and integer variables. If all the functions are linear, the problem is of a *linear integer program*. Otherwise, the problem is called a *nonlinear integer program*. The ultimate goal in integer optimization study is to develop efficient implementable algorithms for solving problems with integer variables. The development of efficient and robust algorithms and softwares for linear integer programming and the advent of high-speed computers have made linear integer programming an important tool for solving many real-world problems. However, many real-world problems cannot be modelled or approximated adequately by linear integer program problems, due to the nature of the nonlinearity of the objective function and/or the nonlinearity of the constraints. Rapid progress has been made in designing efficient solution methods for nonlinear integer programming during the past three decades. This thesis is devoted to develop efficient and robust algorithms for three classes of nonlinear integer programming problems.

The thesis consists of five chapters. The motivations of the algorithms are presented in each chapter. The algorithms

are then described with detailed numerical examples and graphical illustrations. Extensive computational experiments and numerical results are presented for each algorithm.

Chapter 1 discusses the background of nonlinear integer programming and gives several examples of nonlinear integer programming problems from different application fields, such as stratified sampling and capital planning in manufacturing, etc.

Chapter 2 presents an algorithm for a class of concave knapsack problem with a single linear constraint. The algorithm is of branch-and-bound method where lower bounds and upper bounds of the problem are computed by linearly underestimating the objective function. Domain cut-partition scheme is adopted to eliminate the duality gap. The lower bound can be improved during the iteration process. The algorithm finds an optimal solution of the primal problem in a finite number of iterations. Promising computational results are reported for large-scale concave knapsack problems with up to 1 200 integer variables. Comparison results with other existing methods in the literature are also presented.

Chapter 3 presents a convergent Lagrangian and contour-cut method for separable integer programming with a quadratic objective function. The proposed method combines the Lagrangian dual method with a novel contour-cut scheme. In the iterative process, the Lagrangian dual search is used to produce lower and upper bounds of the problem and the contour-cut technique is used to reduce the duality gap. The method is first motivated and described for singly constrained

problems, then extended to multiply constrained cases and problems with an indefinite objective function. Computational results are reported for problems with up to 2 000 integer variables. Comparison results with other methods are also presented.

Chapter 4 investigates nonseparable convex knapsack problems. A Lagrangian decomposition and domain-cut algorithm is proposed for this class of problems. The algorithm exploits the Lagrangian decomposition dual method in order to produce an upper bound, a lower bound of the problem, a feasible solution and an infeasible solution. The feasible solution and the infeasible solution are used in domain-cut scheme to partition the integer domain, thus reducing the duality gap. The algorithm can find an optimal solution in a finite number of iterations. Preliminary computational results are reported.

Chapter 5 summarizes the main results of the thesis and gives some concluding remarks. The algorithms proposed in the thesis are of branch-and-bound framework. In contrast to the branching rule in the conventional branch-and-bound procedure for integer programming where two new subproblems are generated at each node, the proposed algorithms adopt domain-cut scheme or contour-cut scheme to partition the subproblems at each node. Some future research topics are also suggested in this chapter.

Key words Nonlinear integer programming, domain-cut,

concave knapsack problem, branch and bound method, quadratic nonlinear integer programming, separable nonlinear integer programming, nonseparable integer programming, Lagrangian relaxation, Lagrangian decomposition, contour cut.

目 录

第一章 绪论	1
1.1 非线性整数规划的发展背景	1
1.2 非线性整数规划模型	3
1.2.1 分层抽样中的最优样本配置	3
1.2.2 制造业中容量计划问题	4
1.2.3 投资组合问题	6
1.3 非线性整数规划问题的一般形式及常用解法	7
1.4 可分离的非线性整数规划问题	9
1.4.1 混合算法	11
1.5 非线性背包问题	14
1.5.1 一般形式及应用	15
1.5.2 非线性背包问题的现有解法	16
1.5.3 非凸背包问题的现状及本文所做的相关工作	17
1.6 目标函数是二次函数的可分离整数规划问题	19
1.6.1 二次可分离整数规划问题的应用及现有的 解法	19
1.6.2 拉格朗日对偶方法及本文所做的相关工作	20
1.7 不可分离凸背包问题	22
1.7.1 不可分离凸背包问题的现有解法	22
1.7.2 拉格朗日分解方法及本文所做的相关工作	23
第二章 凹背包问题的一种精确算法	26
2.1 用线性下逼近求原问题的界	26
2.2 区域分割	30
2.3 求精确解的算法	33

2.4	数值结果	38
2.5	结论	40
 第三章 具有二次目标函数的可分离整数规划问题的一种收敛的拉格朗日等值面切割算法		
41		
3.1	拉格朗日对偶及对偶搜索	42
3.1.1	对偶搜索	47
3.2	二次目标函数的等值面切割法	49
3.2.1	椭球体等值面	49
3.2.2	等值面切割	51
3.3	单约束问题的收敛拉格朗日等值面切割法	54
3.3.1	算法提出的动机	54
3.3.2	主要算法	59
3.4	多个约束的情况	61
3.5	目标函数为不定二次函数的情况	67
3.6	数值结果	72
3.6.1	测试问题	73
3.6.2	数值实验	74
3.6.3	与其他方法的比较	77
3.7	结论	79
 第四章 不可分离凸背包问题的拉格朗日分解和域分割法		
80		
4.1	拉格朗日分解法	80
4.2	求解最优解的算法	83
4.3	数值结果	87
4.4	结论	88
 第五章 总结		
89		
参考文献		91
致谢		102

第一章 绪 论

1.1 非线性整数规划的发展背景

最优化理论与算法是一个重要的运筹学分支,它所研究的问题是如何在众多方案中找出最优的可行方案。这类问题在经济、管理和工程应用中普遍存在。例如,工程设计中怎样选择设计参数,使得设计方案既满足设计要求又能降低成本;资源分配中,如何分配有限资源,使得分配方案既能满足预算要求,又能获得好的经济效益;生产计划安排中,选择怎样的计划方案才能提高产值和利润;原料配比问题中,怎样确定各种成分的比例,才能提高质量,降低成本;域建规划中,如何安排工厂、机关、学校、商店、医院、住户和其他单位的合理布局,才能保持高产、稳产,发挥地区优势;在人类活动的各个领域,诸如此类的问题,不胜枚举。最优化这一运筹学分支,正是为这些问题的解决,提供理论基础和求解方法。由于生产和科学研究突飞猛进地发展,特别是电子计算机日益广泛的应用,使最优化问题的研究不仅成为一种迫切需要,而且成了求解问题的有力工具。因此最优化理论和算法迅速发展起来,形成一个新的学科。三十多年来,至今已出现线性规划、整数规划、非线性规划、几何规划、多目标规划、动态规划、随机规划、组合优化等许多分支。

在实际中,有许多量具有不可分割的性质,如人数、机器数、元件数等。另外利用0-1变量,可以数量化地描述开与关、取与弃、有与无等现象。所以在很多领域中,如线路设址、工厂选址、人员安排(分配)、代码选取等,常常出现整数变量的问题。变量要求是整数的规划问题就是整数规划问题。如果问题中的变量一些要求是整数,而