普通高等院校“十二五”规划教材

数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

陆 平 肖亚峰 任建斌 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

数学物理方程

陆平　肖亚峰　任建斌　编著

国防工業出版社

·北京·

内容简介

本书是根据理工科数学物理方程教学大纲的要求及工科各专业发展的需求，在多年教学实践的基础上编写的. 内容包括数学物理方程、特殊函数及非线性方程三部分. 全书共分九章，第一章介绍典型方程的导出、基本概念和一些常见的偏微分方程，第二章、三章、四章、八章、九章介绍常用偏微分方程的解法，特别是线性偏微分方程的各种解法，第五章、六章介绍特殊函数及应用.

全书可作为理工科各专业本科生的学习教材及硕士研究生学习应用数学基础的课程参考，也可供从事本类课程教学的中青年教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/陆平，肖亚峰，任建斌编著. —北京：国防工业出版社，2011. 9

ISBN 978-7-118-07717-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①陆… ②肖… ③任… Ⅲ. ①数学物理方程－高等学校－教材 Ⅳ. ①O175. 24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 184691 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 13½　字数 311 千字

2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 29.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前 言

随着科学技术的发展，数学的应用也越来越广泛. 在许多科技领域中，微积分学及常微分方程已经不够用，数学物理方程理论已成为必须掌握的数学工具. 按国家教委关于高等院校本科必修课现行教学计划的规定，数学物理类各专业均开设这门课程，各工科专业也已开设或即将开设这门课程. 这门课程是理工科类专业学生学习一些后继专业课程以及未来从事科技工作所必需的数学工具.

数学物理方程是理工科类专业中一门应用性较强的基础课程，它对于训练数学思维、应用意识和分析实际问题、解决实际问题的能力有着极为重要的作用. 我们都知道偏微分方程是一门公认的难度较大的课程，其内容深、理解难、课时紧、任务重. 目前国内这方面教材几十年来在体系和内容方面几乎没有变化，使得学生学习和掌握数学物理方程非常吃力. 为使学生在短时间内掌握数学物理方程的基本理论和方法，提高学习效率，增强学生的独立思考能力，有必要编写一本具有学术性、知识性、实用性和启发性的教学用书. 本书从活跃学生思路，启迪学生思维，掌握理论，学会分析和解决问题的方式方法等角度出发，在多年教学丰富素材的基础上，针对现在的教学方式及教材的优缺点，收集了大量的优秀教材，在对学生特点进行深入了解后编写而成. 本书将偏微分方程理论、方法与应用有机结合，既保持了现行教材理论性强的特点，又进一步强调了应用的广泛性及对于典型方程各类问题解法的灵活多样和内在关系. 本教材适用于高校理工科类教学之需，编排以方法为主线，由浅入深、循序渐进、突出重点、分散难点；力求详细和层次分明，理论体系完整，基本理论和推理脉络清晰.

本书主要特点：①加强教学基础理论训练，突出典型方程理论和各种问题的典型处理方法. ②广泛介绍求解各种问题的方法、技巧和思想，如行波法，分离变量法，微分算子法（第一次引入教材），试探函数法等. ③将偏微分方程的理论方法和它们在解决实际问题中的应用紧密结合，根据目前教学改革的特点加强数学应用意识的培训和数学建模过程的训练.

我们力图使本书反映出数学理论的严密性，方法的多样性，应用的广泛性. 但由于作者水平有限，有不妥之处恳请读者批评指正.

目　录

第一章　典型方程与方程的分类

1.1　典型方程

1.1.1　引言

偏微分方程已有很长的历史了，大约在微积分出现后不久，就开始了有关偏微分方程的研究.与常微分方程的情况一样，数学家们并不是自觉地去创立偏微分方程这门学科的，而是当人们掌握了构成某些物理现象的原理，在表达其基本的物理运动规律和建立数学模型的过程中得到了许多偏微分方程，于是偏微分方程这门学科就产生了，尤其是流体动力学、弹性力学、热力学（包括粒子扩散）、电磁学、量子力学等学科的基本定律都是可以用偏微分方程来描述的.这些来自物理的偏微分方程，称为数学物理方程.

本章将从几个不同的物理模型出发，推导出数学物理方程中的三个典型方程——弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯方程.这不仅仅因为它们是简单的偏微分方程，更因为它们代表了三类不同的方程，理解了它们的性质，在研究一般的偏微分方程时，就有了所遵循的方式方法，在后面几章各方程的解法学习中将会进一步理解它的意义所在.

1.1.2　典型方程的导出

1. 弦的微小横振动方程

推导弦振动方程，即为弦振动现象建立数学模型，首先需要了解它所服从的基本物理规律，同时应该作一些简化假设.弦是一个力学系统，是一个质点组（是连续的而非离散的质点组，进一步说它是一个一维的连续统），所以它的运动应符合牛顿运动定律，对它的简化假设如下：

设弦在未受扰动时平衡位置是 x 轴，而其上各点均用该点之横坐标表示.弦上各点的位移均假设发生在某个平面内垂直于 x 轴的方向上.因此弦上一点 x 在时刻 t，弦的形状是曲线 $u=u(x,t)$.现在设：①弦的扰动是小扰动.这并不是说 $u=u(x,t)$ 的数值很小，而是设 u_x 很小，即 $u_x \ll 1$，从而 u_x^2 可以略去不计.②弦是“柔软”的，弦是一个连续体，之所以能维持形状是由于其各个部分相互之间有力的作用，这种力称为内力.如果要使弦的形状改变就必须抵抗其内力而作功.所谓“柔软”，是对其内力性质的一种规定，即规定内力必须为切线方向的张力，所以当把它扭弯即在法向上发生形变时，且无内力抵抗，就称它为柔软.为了导出弦的横振动方程，选择如图 1.1 所示的坐标系，弦的平衡位置为 x 轴，两端分别固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 处.所谓横振动是指运动发生在同一平面内，且弦上各点沿着垂直于 x 轴的方向移动.所谓微小指的是弦振动的幅度及弦上任意点切线的倾角都很小，设 $u(x,t)$ 是弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 的位移.

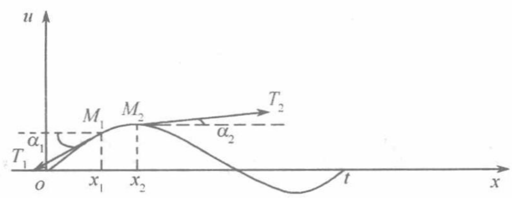

图 1.1　弦振动曲线

我们首先证明张力为常数，为此在弦上任取 M_1M_2 为一小段弧，它的长度假定为 Δs，并且 $\Delta s = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x$ 其中 $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$，由假定，弦只作微小振动，$u_x^2$ 与 1 相比可以忽略不计，从而 $\Delta s \approx x_2 - x_1$. 这样可以认为这段弦在振动过程中并未伸长，因此由胡克(Hooke)定律知道，弦上每一点所受张力在运动过程中均保持不变，即张力与时间 t 无关. 分别把在点 M_1 和 M_2 的张力记做点 T_1 和 T_2，由前所述知它们的方向分别是沿着弦在点 M_1 和 M_2 处的切线方向. 由于假定弦只作横向振动，因此张力在 x 轴方向分量的代数和为零，即有 $T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0$，这里的 α_1 和 α_2 是曲线 $u(x,t)$ 的切线与 x 轴所成之角. 对于微小振动，有 $\alpha_1 \approx 0$ 和 $\alpha_2 \approx 0$，所以 $\cos\alpha_1 \approx 1$ 和 $\cos\alpha_2 \approx 1$，于是上式可写成点 $T_1 = T_2$，这就是说，张力也不随地点的改变而发生变化，综上所述可知张力为常数，以 T_0（即 $T_1 = T_2 = T_0$）记之.

现在导出弦的横振动方程. 张力在 u 轴方向分量的代数和为

$$f_u = T_0\sin\alpha_2 - T_0\sin\alpha_1 = T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

对于微小振动，有 $\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2}$，$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}$，应用微分中值定理上式可化为

$$T_0\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}\right) = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

设弦的线性密度为 ρ，由于弦段 $[x_1, x_2]$ 很小，其上每点的加速度相差也不会太大，因此可用其中任一点 η 处的加速度 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}$ 代替，于是该小段弦的质量与加速度的乘积为

$$\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \eta < x_2)$$

当弦不受外力作用时，应用牛顿第二定律，得

$$\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_2 - x_1) = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1) \tag{1.1.1}$$

消去 $x_2 - x_1$，并令 $x_2 \to x_1$，上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.2}$$

式中：$a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ 这个方程称为弦的自由横振动方程.

若还有外力作用到弦上，其方向垂直于 x 轴，设其力密度为 $F(x,t)$，由于弦段 $[x_1, x_2]$ 很小，其上各点所受的外力近似相等，因此作用在该段上的外力近似地等于 $F(\zeta,t)(x_2-x_1)(x_1<\zeta<x_2)$，这样一来，方程(1.1.1)的右端还应添上这一项，于是得平衡方程 $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_\eta (x_2-x_1)=T_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_\xi (x_2-x_1)+F(\zeta,t)(x_2-x_1)$. 消去 x_2-x_1，并令 $x_2\to x_1$，则得弦的强迫横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{1.1.3}$$

式中：$f(x,t)=F(x,t)/\rho$.

弦振动方程中只含有两个自变量 x 和 t，其中 t 表示时间，x 表示位置，由于它们描述的是弦的振动或波动现象，因而称它为一维波动方程，类似地可导出二维波动方程（例如膜的振动）和三维波动方程（例如电磁波、声波的传播）. 小结如下：

一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad \text{（强迫振动）}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{（自由振动）}$$

二维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \qquad \text{（强迫振动）}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \text{（自由振动）}$$

三维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \qquad \text{（强迫振动）}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \text{（自由振动）}$$

其中三维波动方程的图形如图 1.2 所示.

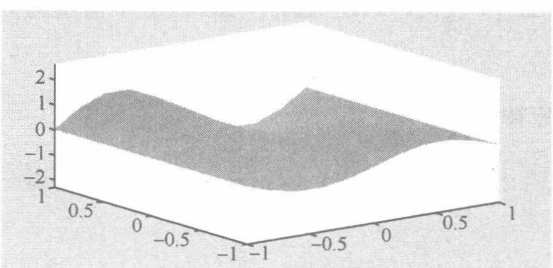

图 1.2　Matlab 绘制的三维波动方程图形

均匀杆的纵振动问题. 有一均匀杆，只要杆中任一小段有纵向位移或速度，必定导致

邻段的压缩或伸长，这种伸缩传开去，就有纵波沿着杆传播了，以 $u(x,t)$ 表杆上各点的纵向位移，则杆的纵振动方程和弦的横振动方程一模一样，即$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$而其物理过程中的现象是完全不同的，用数学表达出来却是一样的，不同的是这里 $a^2=\frac{E}{\rho}$，E 为杨式模量，ρ 为杆的密度.

2. 在固体中的热传导方程

首先研究一维的有热源的热传导，设一内含放射性物质的细杆，细杆中每一点都发出热量，但细杆的侧面是绝热的.

细杆的侧面是绝热的，因此只在沿轴方向有热传导（研究均匀物体中热的传导），设细杆内各点在时刻 t 的温度为 $u(x,t)$，取一小段细杆 $[x,x+\Delta x]$，在时间 $[t,t+\Delta t]$ 内，细杆的截面面积是 S，其密度为 ρ、比热为 c、导热系数为 k，它们均是常数，如图 1.3 所示.

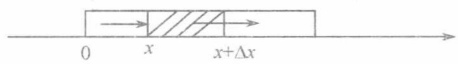

图 1.3　一维热传导示意图

一方面（在 Δt 时间内）由傅里叶热传导定律：

（1）从 x 处流入的热量

$$\Delta Q_1=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x\cdot S\cdot\Delta t$$

（2）从 $x+\Delta x$ 处流出的热量

$$\Delta Q_2=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}\cdot S\cdot\Delta t$$

（3）细杆中自身产生的热量

$$\Delta Q_3=F(\xi_1,T_1)(S\cdot\Delta x)\cdot\Delta t$$

式中：$\xi_1\in[x,x+\Delta x]$，$T_1\in[t,t+\Delta t]$，$F(x,t)$ 为热流密度，得一小段细杆 $[x,x+\Delta x]$ 的总热量增加为

$$\begin{aligned}\Delta Q&=\Delta Q_1-\Delta Q_2+\Delta Q_3=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x\cdot S\cdot\Delta t+k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}\cdot S\cdot\Delta t+F(\xi_1,T_1)(S\cdot\Delta x)\cdot\Delta t\\&=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{\xi_2}\Delta x\cdot S\cdot\Delta t+F(\xi_1,T_1)(S\cdot\Delta x)\cdot\Delta t\text{（微分中值定理）}\end{aligned}$$

式中：$\xi_2\in[x,x+\Delta x]$.

另一方面，由比热定律，得

$$\Delta Q=C(u|_{t+\Delta t}-u|_t)(\rho\cdot S\cdot\Delta x)=C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{T_2}\Delta t\cdot S\cdot\Delta x\text{（微分中值定理）}$$

式中：$T_2\in[t,t+\Delta t]$.

再由热量守恒，得

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{T_2}\Delta t\cdot S\cdot\Delta x=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{\xi_2}\Delta x\cdot S\cdot\Delta t+F(\xi_1,T_1)(S\cdot\Delta x)\cdot\Delta t$$

令 $\Delta x\to 0, \Delta t\to 0$，得 $C\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_t = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x + F(x,t)$，所以所求有热源的一维热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1.1.4}$$

式中：$a^2 = \dfrac{k}{C\rho}$；$f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{C\rho}$.

现在研究均匀物体中（三维）热的传导，设其密度为 ρ、比热为 C、导热系数为 k，它们均是常数. 如果记该物体中一点为 (x,y,z)，时刻 t 该点处的温度为 $u(x,y,z,t)$. 取物体内包含 P 点的小长方体为微元，并讨论这个微元内的热量永恒.

在时刻 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 内，该微元内各点的温度变化，以 $P(x,y,z)$ 点为代表

$$u(P,t+\mathrm{d}t) - u(P,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

使温度升高 $\dfrac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$，所需的热量是 $C\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$（该微元的质量为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$）. 这里消耗的热量应该由物体内部的热源与微元外向微元内的热传导来补充. 现在只考虑传导现象，热传导服从傅里叶热传导定律：通过面积 $\mathrm{d}S$ 在 $\mathrm{d}t$ 时间内沿着法线 $\vec{n}$ 方向传导的热量是 $-k\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$，这里出现的负号是因为热量由高温处流向低温处. 故当 $\dfrac{\partial u}{\partial n}>0$ 时，热量实际上是沿着 $-\vec{n}$ 向方向流去的. 由此在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过微元左右两侧（面积 $\mathrm{d}S$ 均为 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$）流入（在左侧是沿 x 方向流入，在右侧是沿 $-x$ 方向流入）微元的热量为

$$k\mathrm{d}t\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,y,z,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

沿前后两侧和上下两侧方向流入微元的热量，可以用同样的计算. 最后，由热的平衡可得

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t = C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.1.5}$$

式中：$a^2 = \dfrac{k}{C\rho}$，这里 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子（这是一个很重要的算子），方程（1.1.5）可记作 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$. 在以上过程中，基本的物理规律是热量守恒. 这里傅里叶热传导定律是一种简化假设，它只是在一定情况下适用. 当它不适用时，得到的数学模型可能大不相同. 参数 C、k 与 u 无关也是重要的简化假设. 当然参数 C、k 与 ρ 的均匀性也是一种简化，但是这并不重要，去掉这一假设并不会导致比方程（1.1.5）更为复杂的方程出现.

如果在物体内部还有热源，则需要一个物体内部的热源函数来标志其强度. 记这个函数为 $F(x,y,z,t)$，它表示在 $\mathrm{d}t$ 时间内，在该微元中产生的热量是 $F(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$. F 由实验给出或者由其他物理规律导出，则热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.1.6}$$

式中：$a^2=\dfrac{k}{C\rho}$，$f(x,y,z,t)=\dfrac{F(x,y,z,t)}{C\rho}$. 方程(1.1.5)称为无热源的热传导方程，方程(1.1.6)称为有热源的热传导方程.

上述热传导方程中，描述空间坐标的独立变量是 x,y 和 z，所以它们又称为三维热传导方程. 总之我们有以下热传导方程(扩散方程).

一维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad \text{(有热源的)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(无热源的)}$$

二维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \qquad \text{(有热源的)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(无热源的)}$$

三维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \qquad \text{(有热源的)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(无热源的)}$$

其中三维热传导方程图形如图 1.4 所示.

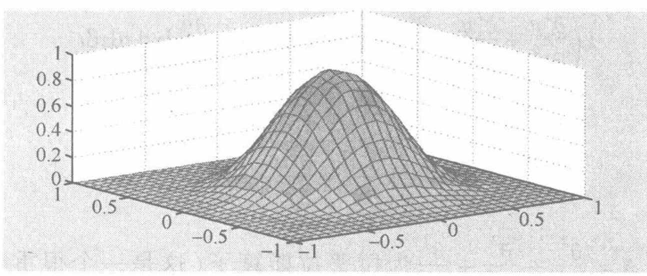

图 1.4　Matlab 绘制的三维热传导方程图形

当考察像气体的扩散、液体的渗透. 半导体材料中杂质扩散等物理过程时，若用 u 表示所扩散物质的浓度，则浓度 u 所满足方程的形式与热传导方程完全一样. 由于它所描述的是物质的扩散现象，所以把这样的方程也叫做扩散方程.

3. 拉普拉斯(Laplace)方程和泊松(Poisson)方程

当研究物理上的各种现象(例如：振动，热传导，扩散等等)的稳定过程时，由于表征该过程的物理量 u 不随时间而变化，因此 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$. 现在考虑静电场中的电位 $u(x,y,z)$，并

设场中有电荷分布，其密度为$\rho(x,y,z)$，设电场为$E(x,y,z)$，则由定义 $E=-\mathrm{grad}u$. 高斯(Gauss)定律告诉我们 $\mathrm{div}E=\rho$. 这里高斯定律采取这样简单的形式是因为采用了特定的单位制. 将 $E=-\mathrm{grad}u$ 代入此式就得到 u 所适合的方程：

$$-\mathrm{divgrad}u=-\Delta u=\rho$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\rho(x,y,z) \tag{1.1.7}$$

方程(1.1.7)称为三维泊松方程.

特别是在自由电场(即$\rho=0$的情况)中，电位适合方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.1.8}$$

方程(1.1.8)称为三维拉普拉斯方程或调和方程，通常表示成 $\Delta u=0$ 或 $\nabla^2 u=0$. 凡具有二阶连续偏导数并满足方程(1.1.8)的连续函数称为调和函数.

这里是从一些物理定律推导出方程的. 如果分析一下这些定律导出的过程，仍然可以看出其中采用了对微元的分析和对一些实验事实的概括. 例如库伦(Coulumb)定律就是一个实验定律，而高斯定律是依据于它的. 凡实验定律都包含了对实际情况的某些简化和理想化，或只是某种近似. 这在性质上和前两个例子中的假设是一样的.

拉普拉斯方程不仅出现在静电场问题中，其它问题中也常出现. 例如设热传导方程(1.1.5)与时间无关——这种温度场称为定常温度场，则方程(1.1.5)成为 $\Delta u=0$. 所以，拉普拉斯方程也可以描写定常温度场. 不但如此，它还可以描写引力场、引力势等. 概括地说，它所描写的自然现象是稳恒的、定常的，即与时间无关的. 拉普拉斯方程和泊松方程不仅描述稳定状态下温度的分布规律，而且也能描述诸如稳定的浓度分布及静电场的电位分布等种种不同的物理现象. 其它方程也是如此：热传导方程可以描述扩散现象，弦振动方程可以描述传输线中的电流或电压(当参数适合一定条件时)，还可以描述轴的扭转、振动等等. 这种情况正是数学物理方程作为描述自然现象的工具的力量所在. 实际上，这三个方程各是一类方程的典型，各反映一类自然规律性. 尤其是，这三类方程的数学性质各取决于一个二次型的性质. 本书将依据这个二次型将方程分类，并逐类进行讨论.

需要说明的是我们从一些物理定律推导出了三类方程，导出的过程中，我们采用了微元的分析和对一些实验事实的简化和概括.

1.2 定解条件与定解问题

1.2.1 定解条件(I)——初始条件(Initial conditions)

对于一个确定的物理过程，仅有表征该过程的物理量 u 所满足的方程还是不够的，还要附加一定的条件，这些条件应该恰恰足以说明系统的初始状态以及边界上的物理情况，而且所提出的具体条件多了不行，少了也不行.

先介绍初始条件. 表征某过程“初始”时刻状态的条件称为初始条件. 对于热传导问题，一个特定的传热过程，仅仅知道温度 u 所满足的方程是远远不够的，还需要知道物体

在“初始”时刻的温度分布和物体在边界上的温度状况(或热交换状况),这样才可以完全确定物体在以后时刻的温度. 初始条件的提法显然为

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \tag{1.2.1}$$

式中:$\varphi(x,y,z)$为已知函数,表示 $t=0$ 时物体内温度的分布.

对于弦振动问题来说,初始条件指的是弦在“初始”时刻的位移和速度. 若以 $\varphi(x)$,$\psi(x)$分别表示弦的初位移和初速度,则初始条件可以表达为

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \tag{1.2.2}$$

1.2.2 定解条件(II)——边界条件

1. 弦振动问题的边界条件

再介绍边界条件,表征某过程的物理量在系统的边界上所满足的物理条件称为边界条件,常见而又比较简单的边界条件有三种基本类型.

对于弦振动问题而言,弦的一端(例如 $x=0$)的运动规律已知,若以$\mu_1(t)$表示其运动规律,则边界条件可以表达为

$$u|_{x=0}=\mu_1(t) \tag{1.2.3}$$

若 $x=0$ 端被固定,则相应的边界条件为 $u|_{x=0}=0$,像(1.2.3)这种类型的边界条件称为第一类边界条件.

若弦的一端(例如 $x=0$)在垂直于 x 轴的直线上自由滑动,且不受到垂直方向的外力,这种边界称为自由边界,根据边界微元右端的张力沿垂直方向的分量是 $T_0\frac{\partial u}{\partial x}$,得出在自由边界时应成立 $T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$.

若边界张力沿垂直方向的分量是 t 的一个已知函数,则相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu_2(t) \tag{1.2.4}$$

这种类型的边界条件称为第二类边界条件.

若将弦的一端(例如 $x=l$)固定在弹性支承上,并且弹性支承的伸缩符合胡克定律,如果支承的位置为 $u=0$,则在端点的值表示支承在该点的伸长. 弦对支承拉力的垂直方向分量为 $-T_0\frac{\partial u}{\partial x}$,由胡克定律得 $-T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=ku|_{x=l}$,因此在弹性支承的情况下,边界条件归结为$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right)\right|_{x=l}=0$. 式中:$\alpha=\frac{k}{T_0}$是已知正数,在数学中也可以考虑更普通的边界条件:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right)\right|_{x=l}=\mu_3(t) \tag{1.2.5}$$

式中:$\mu_3(t)$是 t 的已知函数,这种边界条件称为第三类边界条件.

边界条件与初始条件总称为定解条件.

边界条件(1.2.3)、(1.2.4)、(1.2.5)称为非齐次边界条件,若等式右端的已知函数 $\mu_i(t)(i=1,2,3)$ 恒为零,则称为齐次边界条件.

2. 热传导问题的边界条件

对于热传导问题而言,设所考察的物体 G 的边界曲面为 S. 已知物体表面温度为 $\mu_1(x,y,z,t)$,即

$$u(x,y,z,t)|_S=\mu_1(x,y,z,t) \tag{1.2.6}$$

式中:$\mu_1(x,y,z,t)$ 是定义在 $(x,y,z)\in S, t\geqslant 0$ 上的已知函数. 这种边界条件称为第一边界条件.

已知物体表面上各点的热流量为 q,也就是说在物体表面上,单位时间内流过单位面积的热量是已知的,由傅里叶定律可知 $q=-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$,由此可得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\mu_2(x,y,z,t) \tag{1.2.7}$$

式中:$\mu_2(x,y,z,t)=-\frac{q}{k}$ 是定义 $(x,y,z)\in S, t\geqslant 0$ 上的已知函数. 由此可见,这种边界条件实际上表示温度函数 u 在边界曲面 S 上的外法向导数是已知的. 特别是,如果物体表面上各点的热流量为零,则得绝热性边界条件:$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0$. 这种类型的边界条件称为第二类边界条件.

现今考察将物体置于另一介质中的情形,我们能够测量到的只是和物体接触处的介质温度 u_1,由于 u_1 与物体表面上的温度 u 往往并不相同,这样在物体表面处与周围介质产生热交换. 由热传导中牛顿实验定律可知,物体从一介质流到另一介质的热量与两介质间的温度差成正比,即

$$\mathrm{d}Q=h(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{1.2.8}$$

式中的比例常数 h 称为两介质间的热交换系数,它取正值. 现今在物体内部一无限贴近它的表面 S 的闭曲面 S_1,由于在物体表面热量不能积累,因此在曲面 S_1 上的热流量应等于 S 上的热流量. 流过曲面 S_1 的热量为 $\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$,流过物体表面 S 的热量为 $\mathrm{d}Q=h(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$,因此成立的关系式为 $-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=h(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$,即 $k\frac{\partial u}{\partial n}+hu=hu_1$,由于 h 和 k 都是正数,因此这种边界条件可以写成

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\right|_S=\mu_3(x,y,z,t) \tag{1.2.9}$$

式中:$\mu_3(x,y,z,t)=\frac{h}{k}u_1$ 是定义在 $(x,y,z)\in S, t\geqslant 0$ 上的已知函数,$\alpha=\frac{h}{k}$ 为已知正数. 这种类型的边界条件称为第三类边界条件.

当 $\mu_i(x,y,z,t)\neq 0(i=1,2,3)$ 时,相应的边界条件称为非齐次的边界条件,否则称为齐次边界条件.

1.3 基本概念与定解问题

1.3.1 基本概念

含有自变量未知函数及其偏导数的等式称为偏微分方程. 例如下面的一些等式都是偏微分方程:

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{1.3.1}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{1.3.2}$$

$$u_{xxy}+2xu_{yy}+yu=xy \tag{1.3.3}$$

$$(u_x)^2+u_y=8x^2 \tag{1.3.4}$$

偏微分方程中所含有的未知函数最高阶偏导数的阶数,称为偏微分方程的阶. 例如方程(1.3.1)和方程(1.3.2)为二阶偏微分方程,方程(1.3.3)和方程(1.3.4)分别为三阶偏微分方程与一阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程中各项关于未知函数及其偏导数(包括高阶偏导数)都是一次的,则称这个方程为线性偏微分方程. 例如方程(1.3.1)~方程(1.3.3)都是线性偏微分方程,而方程(1.3.4)则是非线性偏微分方程.

如果一个函数具有某偏微分方程中所需要的各阶连续偏导数,将它代入该方程时能使方程成为恒等式,则称这个函数为该方程的解,或古典解. 例如函数 $u=\sin(x+at)$, $u=(x-at)^3$, $u=e^{2(x+at)}$, $u=f(x+at)+g(x-at)$ 等都是方程(1.3.1)的解,这里 f 和 g 是两个具有二阶连续导数的函数,而函数 $u=e^x\sin y$, $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$(这里 $x^2+y^2\neq0$)等都是方程(1.3.2)的解.

一个偏微分方程中不包含未知函数 u 及其偏导数(包括高阶偏导数)的项称为自由项,这样的方程就称为非齐次偏微分方程(自由项不为零). 例如方程(1.3.3)为非齐次方程,xy 为自由项,方程(1.3.4)中也含有自由项 $8x^2$. 而方程(1.3.1)和方程(1.3.2)就称为齐次偏微分方程(自由项为零). 偏微分方程也叫做泛定方程.

1.3.2 定解问题及其适定性

1. 柯西问题

由泛定方程和定解条件构成的问题称为定解问题. 由于定解条件的不同,定解问题又可分为初始值问题和边值问题两种. 由泛定方程和初始条件构成的问题称为初值问题或柯西问题.

[**例 1.3.1**] 弦振动柯西问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2} \quad (-\infty<x<+\infty, t>0)\\ u(x,0)=\phi(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

［**例 1.3.2**］ 三维热传导柯西问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & ((x,y,z)\in R^3,t>0)\\ u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z)\end{cases}$$

2. 边值问题

泛定方程和边界条件构成的问题称为边值问题. 关于拉普拉斯方程的边值问题，通常最基本有以下三种：

1）第一边值问题. 在空间某一区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上给定了连续函数 f，要求这样一个函数 $u(x,y,z)$，它在闭域 $\Omega+\partial\Omega$（或记作 $\overline{\Omega}$）上连续，在 Ω 内调和，在边界 $\partial\Omega$ 上与给定的函数 f 重合. 如问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\\ u(x,y,z)\mid_{\partial\Omega}=f(x,y,z)\end{cases}$$

称为第一边值问题，又称为 狄利克雷（Dirichlet）问题.

2）第二边值问题. 在某光滑的闭曲面上给定了连续函数 f，要求这样一个函数 $u(x,y,z)$，它在 Ω 内调和，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，在 $\partial\Omega$ 上任一点处法向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ 存在，式中：n 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向. 如问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f(x,y,z)\end{cases}$$

称为第二边值问题，也称为诺伊曼（Neumann）问题.

3）第三边值问题. 如问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\right|_{\partial\Omega}=f(x,y,z,t) & ((x,y,z)\in\partial\Omega)\end{cases}$$

称为第三边值问题也称为洛宾（Robin）问题.

3. 混合问题

由泛定方程、初始条件及边界条件构成的问题称为混合问题.

［**例 1.3.3**］ 一维热传导混合问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=\phi(x)\end{cases}$$