

命题专家亲解历年真题



2013

历年考研数学 真题名家解析与指导

主编 / 李恒沛 高文森

✓ 以知识点为纲，基本方法和基本理论

★ 全书按照考试大纲规定内容编写，每章分为内容导读和考题选析两部分：内容导读概述内容，引领复习，帮助考生系统掌握；考题选析精选历年试题，一题多解，开拓思路，并指出典型错误。



 中国人民大学出版社



历年考研数学真题 名家解析与指导

主 编 李恒沛 高文森
副主编 徐 兵 郝志峰 陆淑珍

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题名家解析与指导/李恒沛, 高文森主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2012. 5
ISBN 978-7-300-15690-3

I. ①历… II. ①李… ②高… III. ①高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 083199 号

历年考研数学真题名家解析与指导

主编 李恒沛 高文森

Linian Kaoyan Shuxue Zhenti Mingjia Jiexi yu Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.lkao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京七色印务有限公司	版 次	2012 年 5 月第 1 版
规 格	210 mm×285 mm 16 开本	印 次	2012 年 5 月第 1 次印刷
印 张	24.5	定 价	46.00 元
字 数	730 000		

前言

从1987年开始,全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试,至今二十余年.对于数学考试而言,具有相对的稳定性.为了更好地帮助考生备考,我们从历年考题中精选出一部分,从中归纳出考试内容的重点、难点及经常考的题型,以便了解试题的特点,把握命题的方向.全国硕士研究生入学数学统考试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,是一份十分宝贵的资料,本书就是在此基础上,结合多年命题、授课及辅导体会精心编写而成的,相信对广大考生从容应考,十分有益.

从已往的数学试题来看,主要着重于对基本概念、基本方法和基本理论的测试.无论考试的形式如何,题目的类型怎样,考生只要掌握了以上“三基”,就能运用自如,在考试中考出好的成绩.全书正文按照《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》规定的内容,主要包括高等数学、线性代数和概率统计等三章,各章由两部分组成,一为内容导学,概括这一章全部内容,并举例说明,引领考生复习,达到系统掌握的目的;二为考题选析,从历年的试卷中挑选出一定数量的考题,逐题进行分析、解答(或证明)与注释,力求简明扼要,一题多解,开拓思路,使考生做到举一反三,触类旁通.同时指出考生在解题过程中出现的典型错误,提醒考生注意并引以为戒.为了提高广大考生的复习效率,建议考生开始阅读本书之前,先参阅《数学考试大纲》,明确考试内容及要求,接下来要仔细阅读有关教材和参考书(推荐考生阅读由中国人民大学出版社出版、李恒沛、侯书会、高文森等主编的《考研数学新编考试参考书》),这些做完之后,再认真阅读本书,最后为了考量复习效果,建议用该出版社出版的《考研数学模拟冲刺试卷》来检验,考生不妨亲自动手做一做,孰对孰错,再与书中答案对照一下,这样就会达到更好的应试效果.

本书习题按填空题、选择题和解答题(含证明题)题型分类.每道题前用数码表明试题使用的年份及卷种.例如,某题号后括号内的数码为(96,1),表明该题为1996年数学一试卷中的一道题,数码(00,2)表明该题为2000年数学二试卷中的一道题,余下类推.在长期的教学、辅导及阅卷过程中,发现不少考生对选择题、填空题及证明题采取“蒙”的办法,十分没有把握,原因是对基本概念理解有误,基本定理、公式记的不牢,因而失分较多.为了帮助考生提高判断及推理能力,本书已将如何正确处理上述三类题的方法和技巧,作一简要阐述、归纳,辟为单独一章,以备考生复习参考.

本书的编者都是长期在高等院校中从事教学、科研的教授,大多数是教育部考试中心原数学命题组成员,多年参加考研命题、辅导,他们都具备丰富的命题、辅导经验.

本书在编写、编辑和出版过程中,得到中国人民大学出版社有关编辑的大力支持,在此一并表示谢意.鉴于时间仓促,编写水平有限,书中如有不妥之处,敬请广大考生和教师指正.预祝考生一帆风顺,考研成功!

目 录

第零章	选择题、填空题与证明题	1
	一、关于选择题	1
	二、关于填空题	4
	三、关于证明题	7
第一章	高等数学	10
	一、内容导读	10
	二、考题选析	31
第二章	线性代数	217
	一、内容导读	217
	二、考题选析	248
第三章	概率论与数理统计	297
	一、内容导读	297
	二、考题选析	308

选择题、填空题与证明题

历年考研数学试题都设有选择题、填空题与证明题,这三类题在试卷结构中占有相当重要的位置,特别是选择题和填空题的分值是相对固定的,大体上占总分五分之二.从阅卷的情况来看,这部分的得分率较低,加上证明题的失分,因而卷面总分不易上去.究其原因不外乎两方面,一方面是考生对基本概念和基本理论把握得不牢,运算的失误率较高;另一方面是考生处理这三类题的方法比较欠缺.对待选择题,采取“蒙”的方式;对待填空题,粗枝大叶,计算不仔细;至于证明题,思路不明,难以下手.诚然,上述几种情形,只是出现在部分考生部分试卷上,但不可忽视.本章旨在通过一些典型例题,提出一些应对方法,以期提高考生求解(证)这类考题的效率和能力.

一、关于选择题

选择题主要考查基本概念和基本理论.方法得当,可以做到事半功倍,快捷有效,提高答对率.考研数学试卷的选择题是单项选择题,即四个选项中有唯一的一个选项是正确的.下面介绍几种常用的解题方法.

1. 观察法

观察法就是应用基本概念或理论,直接选出正确的答案.

例 1 考虑二元函数的下面 4 条性质:

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续;
- ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续;
- ③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微;
- ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有

- A. $② \Rightarrow ③ \Rightarrow ①$ B. $③ \Rightarrow ② \Rightarrow ①$ C. $③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ①$ D. $③ \Rightarrow ① \Rightarrow ④$

分析 由基本定理知选项 A 正确.

(这是 2002 年数学一试卷中的一道试题.)

解 应选 A.

例 2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

- A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

分析 因

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0,$$

故向量组 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

解 应选 A.

(这是 2007 年数学一试卷中的一道试题.)

例 3 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有

A. $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$

B. $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$

C. $P(AB) = P(A)P(B)$

D. $P(AB) \neq P(A)P(B)$

分析 因当 $0 < P(A) < 1$ 时, $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充要条件.

解 应选 C.

(这是 1998 年数学一试卷中的一道试题.)

2. 演绎法

由已掌握的概念或定理, 经过简单推导就可得到正确答案.

例 4 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面

的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

A. α, β, γ

B. α, γ, β

C. β, α, γ

D. β, γ, α

分析 将 α, β, γ 与 x^k 比较:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}} \xrightarrow{\text{取 } k=1} 1,$$

即 α 是 x 的 1 阶无穷小;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{k} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{x^{k-3}} \xrightarrow{\text{取 } k=3} \frac{2}{3},$$

即 β 是 x 的 3 阶无穷小;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2k} \cdot \frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{x^{k-2}} \xrightarrow{\text{取 } k=2} \frac{1}{4},$$

即 γ 是 x 的 2 阶无穷小.

解 应选 B.

(这是 2004 年数学一试卷中的一道试题.)

例 5 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$, 则

A. $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆

B. $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆

C. $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆

D. $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆

分析 因 $(E-A)(E+A+A^2) = E-A^3 = E$,

$$(E+A)(E-A+A^2) = E+A^3 = E,$$

故 $E-A, E+A$ 皆可逆.

解 应选 C.

(这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.)

例 6 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2, 则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

A. 8

B. 16

C. 28

D. 44

分析 一般地, 若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则数学期望

$$E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y).$$

方差 $D(aX+bY) = a^2D(X) + b^2D(Y).$

对于本题 $a=3, b=-2, D(X)=4, D(Y)=2$.

故 $D(3X-2Y)=44$.

解 应选 D.

(这是 1997 年数学一试卷中的一道试题.)

3. 排除法

排除法就是否定四个选项中的三个, 余下的一个必为正确的选项. 使用这种方法时, 举反例是快捷有效的.

例 7 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

- A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数
- B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数
- C. 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数
- D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

分析 B. 的反例: 令 $f(x)=x^2$, 取 $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$;

C. 的反例: 令 $f(x)=\cos x+1$, 取 $F(x)=\sin x+x$;

D. 的反例: 令 $f(x)=x$, 取 $F(x)=\frac{x^2}{2}$.

解 应选 A.

(这是 1999 年数学一~四试卷中的一道试题.)

例 8 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则

- A. 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$
- B. 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$
- C. 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$
- D. 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

分析 A. 的反例: 令 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [3, 4]$,

则有 $|AB| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$;

C. 的反例: 令 $A = [1 \ 2]$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

则有 $|AB| = 0$;

D. 的反例: 令 $A = [1 \ 2]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则有 $|AB| = 3 \neq 0$.

故选项 B 正确.

事实上, 因 AB 是 m 阶矩阵, $|AB| = 0$ 的充要条件是 $r(AB) < m$. 由

$$r(AB) \leq r(B) \leq \min(m, n),$$

知当 $m > n$ 时, 必有 $r(AB) \leq n < m$.

解 应选 B.

(这是 1999 年数学一试卷中的一道试题.)

例 9 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

A. $X+Y$ 服从正态分布

B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布

D. X^2/Y^2 服从 F 分布

分析 当随机变量 X 和 Y 都服从正态分布, 且二者相互独立时, A、B、C、D 四选项均成立. 当未给出 X 、 Y 相互独立这一条件, A、B、D 均不一定成立.

解 应选 C.

(这是 2002 年数学三试卷中的一道试题.)

二、关于填空题

从历年考研试题来看, 填空题基本上是计算题 (计算量不大), 用来考查考生基本概念与基本运算的能力. 因为只看答案, 没有过程, 所以不允许出一点错, 否则不得分.

1. 推算法

直接利用概念、公式计算.

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 利用 L'Hospital 法则, 求 “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式极限.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \cdot \sin x}{\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} e^{\cos x} \cdot \sqrt[3]{(1+x^2)^2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{3}{2} e.$$

解 应填 $\frac{3}{2}e$.

(这是 2009 年数学三试卷中的一道试题.)

例 2 曲线

$$\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du, \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

分析 曲线上点 $(0, 0)$ 对应 $t=1$, 切线的斜率

$$k = \frac{dy}{dx} \bigg|_{t=1} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \bigg|_{t=1} = \frac{2t \ln(2-t^2) - \frac{t^2 \cdot 2t}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}} \bigg|_{t=1} = 2$$

于是所求切线方程为 $y=2x$.

解 应填 $y=2x$.

(这是 2009 年数学二试卷中的一道试题.)

例 3 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

分析 由 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$,

$$A(2\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2,$$

于是由定义知 A 的特征值为 1 和 0. 从而 A 的非零特征值为 1.

解 应填 1.

(这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.)

例 4 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X=E(X^2)\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 由题设, 知 $E(X)=D(X)=\lambda=1$. 又 $E(X^2)=D(X^2)+(E(X))^2=2$, 从而有

$$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\frac{e^{-1}}{2}=\frac{1}{2e}.$$

解 应填 $\frac{1}{2e}$.

(这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.)

2. 图示法

由题意画出图形, 从几何图形直观寻求答案.

例 5 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$ _____.

分析 令 $y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$, 显见这是圆心在点 $(1, 0)$ 、半径为 1 的圆的方程, 该圆的面积 $S=\pi \cdot 1^2=\pi$, 由定积分的几何意义, 如图 0-2-1, 知

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{S}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

解 应填 $\frac{\pi}{4}$.

本题采用配方、置换的方法也可做, 但计算量偏大.

(本题是 2000 年数学一试卷中的一道试题.)

例 6 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$, $x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$ _____.

分析 先画草图, 如图 0-2-2 所示.

$$S = \int_1^2 \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 \right] dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x - 2x \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

解 应填 $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

(这是 1996 年数学二试卷中的一道试题.)

3. 对称法

利用函数的奇偶性、区域对称性, 使计算简化.

例 7 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx =$ _____.

分析 注意到被积函数的奇偶性及积分区间的对称性, 知

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

解 应填 $\frac{\pi}{8}$.

(这是 2001 年数学二试卷中的一道试题.)

例 8 设曲面 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x+|y|) dS =$ _____.

分析 如图 0-2-3, 因 Σ 关于 yz 平面对称, x 关于 x 为奇函数, 故有

$$\iint_{\Sigma} x dS = 0.$$

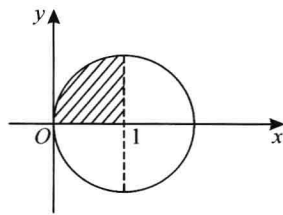


图 0-2-1

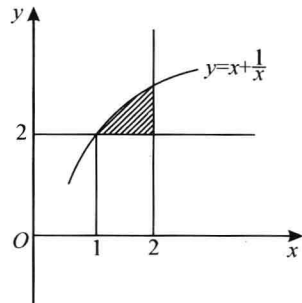


图 0-2-2

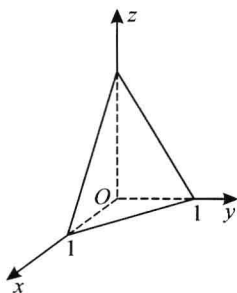


图 0-2-3

由变量的轮换对称性, 知

$$\iint_{\Sigma} |y| dS = \iint_{\Sigma} |x| dS = \iint_{\Sigma} |z| dS,$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + |y|) dS &= \iint_{\Sigma} |y| dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} 1 \cdot dS = \frac{1}{3} (\text{曲面 } \Sigma \text{ 的面积}) \end{aligned}$$

用 σ 表示 Σ 在第一卦限部分的面积, $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而

$$\text{原式} = \frac{1}{3} (8\sigma) = \frac{4}{3} \sqrt{3}.$$

解 应填 $\frac{4}{3} \sqrt{3}$.

(这是 2007 年数学一试卷中的一道试题.)

例 9 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 因 L 关于 x 轴 (y 轴) 对称, $2xy$ 关于 y (关于 x) 为奇函数, 故 $\oint_L 2xy ds = 0$.

又 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12,$

于是 $\oint_L (3x^2 + 4y^2) ds = \oint_L 12 ds = 12a.$

解 应填 $12a$.

(这是 1998 年数学一试卷中的一道试题.)

例 10 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 因积分域 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$, 关于 x 轴、 y 轴对称, 由 x 和 y 的轮换对称性, 有

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \end{aligned}$$

或直接利用极坐标计算也较方便.

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) r^3 dr = \frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

解 应填 $\frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$.

(这是 1994 年数学一、二试卷中的一道试题.)

三、关于证明题

证明题就是依据已有的概念、定理、公式, 用逻辑推理的方法证明给定的命题结论. 一般比较抽象, 考生感到困难, 难以下手. 下面针对考题, 给出常见的一些方法.

1. 数学归纳法

设 P 是与正整数 n 有关的数学命题.

1° 当 $n=1$, 命题 P 成立;

2° 设 $n=k$, 命题 P 成立, 能推出 $n=k+1$ 命题也成立, 则命题 P 对一切正整数 n 成立.

例 1 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ ($n=1, 2, \dots$), 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

分析 利用归纳法.

证 由 $x_1=10$, $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$, 则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知, 对一切正整数 n , 都有 $x_n>x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 为单减数列. 又显见 $x_n>0$ ($n=1, 2, \dots$), 即 $\{x_n\}$ 有下界, 故根据极限存在准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $a = \sqrt{6+a}$ 成立, 于是得 $a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$ ($a = -2$ 舍去), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

(这是 1996 年数学一、二试卷中的一道试题.)

2. 辅助函数法

由欲证命题的结论, 适当地构造一个辅助函数, 利用已知的定理、公式, 问题就解决了.

例 2 设 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 证明对任何 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

分析 构造辅助函数, 利用函数单调性或利用 Lagrange 中值定理.

证法 1 令 $\varphi(x) = f(x + x_2) - f(x)$, 则

$$\varphi'(x) = f'(x + x_2) - f'(x) = x_2 f''(x + \theta x_2) < 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

从而 $\varphi(x)$ 单减, 又 $x_1 > 0$, 有 $\varphi(x_1) < \varphi(0)$, 即 $f(x_1 + x_2) - f(x_1) < f(x_2) - f(0)$, 亦即

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

证法 2 不妨设 $x_1 \leq x_2$ ($x_2 \leq x_1$ 类似可证), 则由 Lagrange 中值定理得

$$f(x_1) - f(0) = x_1 f'(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < x_1,$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = x_1 f'(\xi_2), \quad x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2,$$

由题设 $f''(x) < 0$, 又 $\xi_1 < \xi_2$, 知 $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$,

即有 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) < f(x_1) - f(0)$,

故得 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

(这是 1992 年数学一~三试卷中的一道试题.)

3. 反证法

若命题结论不成立, 则由此导出矛盾, 即与已知命题假设相抵触. 说明“命题结论不成立”的假设不对, 从而肯定命题是成立的.

例 3 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$ 及 $f''(\eta) = 0$.

分析 先用反证法证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$. 再证存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

证 若不存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$, 则在 (a, b) 内恒有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$, 不妨设 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$, 类似可证), 则

$$\begin{aligned} f'(b) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \leq 0, \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \geq 0, \end{aligned}$$

从而 $f'(a)f'(b) \leq 0$, 此与题设矛盾. 故在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

由 $f(a) = f(b) = f(\xi)$ 及 Rolle 定理, 知存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$, $\eta_2 \in (\xi, b)$, 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$, 再由 Rolle 定理知存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

(这是 1996 年数学三试卷中的一道试题.)

例 4 设 $A = I - \xi\xi^T$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置. 证明

(1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi = 1$;

(2) 当 $\xi^T\xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

分析 由题设导出 (1); 用反证法证明 (2).

$$\begin{aligned} \text{证 (1)} \quad A^2 &= (I - \xi\xi^T)(I - \xi\xi^T) \\ &= I - 2\xi\xi^T + \xi\xi^T\xi\xi^T \\ &= I - \xi(2 - \xi^T\xi)\xi^T \\ &= I - (2 - \xi^T\xi)\xi\xi^T. \end{aligned}$$

$A^2 = A$ 即 $I - (2 - \xi^T\xi)\xi\xi^T = I - \xi\xi^T$, 亦即

$$(\xi^T\xi - 1)\xi\xi^T = 0,$$

因为 ξ 是非零列向量, $\xi\xi^T \neq 0$,

故 $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi - 1 = 0$, 即 $\xi^T\xi = 1$.

(2) 用反证法. 当 $\xi^T\xi = 1$ 时 $A^2 = A$, 若 A 可逆, 则有 $A^{-1}A^2 = A^{-1}A = I$, 从而 $I = (A^{-1}A)A = A$, 这与 $A = I - \xi\xi^T \neq I$ 矛盾, 故 A 是不可逆矩阵.

(这是 1996 年数学一、二试卷中的一道试题.)

4. 综合法

利用已知定义、定理及不等式证明一些命题, 上述三种方法往往不是单独使用的, 而是相互关联、综合使用的.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$. 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

分析 $f(x)$ 有两个零点, 相当于其原函数 $F(x)$ 有三个零点, 往下证明, 综合利用反证法及微分中值定理 (或定积分中值定理) 证得.

$$\text{证法 1} \quad \text{令 } F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

则有 $F(0) = 0, F(\pi) = 0$. 又因为

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x)\cos x dx = \int_0^\pi \cos x dF(x) = F(x)\cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x dx \\ &= \int_0^\pi F(x)\sin x dx, \end{aligned}$$

所以存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $F(\xi)\sin\xi = 0$. 因若不然, 则在 $(0, \pi)$ 内或 $F(x)\sin x$ 恒为正或 $F(x)\sin x$ 恒为负, 均与 $\int_0^\pi F(x)\sin x dx = 0$ 矛盾. 但当 $\xi \in (0, \pi)$ 时, $\sin\xi \neq 0$, 故 $f(\xi) = 0$.

由上证得 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0$ ($0<\xi<\pi$).

再对 $F(x)$ 在区间 $[0, \xi]$, $[\xi, \pi]$ 上分别用罗尔定理, 知至少存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证法 2 由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 知, 存在 $\xi_1 \in (0, \pi)$, 使 $f(\xi_1)=0$. 因若不然, 则在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 恒为正, 或 $f(x)$ 恒为负, 均与 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 矛盾.

若在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\xi_1$, 则由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 推知, $f(x)$ 在 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内异号, 不妨设在 $(0, \xi_1)$ 内 $f(x)>0$, 在 (ξ_1, π) 内 $f(x)<0$. 于是再由 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$ 与 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 及 $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调性知:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx > 0, \end{aligned}$$

得出矛盾.

从而推知, 在 $(0, \pi)$ 内除 ξ_1 外, $f(x)=0$ 至少还有另一实根 ξ_2 , 故知存在 $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

注: 证法 1 中的 ξ 和证法 2 中的 ξ_1 也可用积分中值定理得到.

(这是 2000 年数学一~四试卷中的一道试题.)

例 6 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

分析 由设证 (1); 利用 (1) 及夹逼定理得 (2).

解 (1) 因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数, 在每个周期上积分值相等, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} |\cos x| dx &= n \int_0^\pi |\cos x| dx = 2n, \\ \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx &= 2(n+1). \end{aligned}$$

因此当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$2n \leq S(x) < 2(n+1).$$

(2) 由 (1) 知, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 由夹逼准则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

(这是 2000 年数学二试卷中的一道试题.)

高等数学

一、内容导读

高等数学是研究生入学数学考试最重要的内容.《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》)规定,无论是数学试卷一、试卷二(工学类),还是数学试卷三(经济学类、管理学类),都要求考高等数学,其在数学试卷一中约占 56%,数学试卷二中约占 78%,数学试卷三中约占 56%.因此,如何复习高等数学,考生非常关注.为了帮助考生有效地进行复习,下面按照考试大纲规定的考试内容的顺序一一阐述.

(一) 函数、极限、连续

函数是高等数学的研究对象,极限是研究的方法,而且贯穿于微积分的始终.连续是用极限研究函数的一种性态,可以说是由极限派生而来的.连续函数是重要的一类函数.本单元考查重点,是函数(含表示方法)、极限(含左极限与右极限)、连续(含左连续与右连续)的概念及性质,函数间断点类型的判断,函数的表示(用变量替换转换其表达形式),求极限的若干方法,运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题.本单元试题类型包括:① 函数记号的转换;② 分段函数的运算;③ 简单反函数的定义域及其表示;④ 考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件;⑤ 判断函数间断点及其类型;⑥ 无穷小的比较;⑦ 判断函数的性质(有界性,单调性,奇偶性,周期性);⑧ 利用闭区间上连续函数性质证明一类题;⑨ 求极限(包括用极限的定义,等价无穷小,极限的运算法则,极限存在准则,两个重要极限,函数的连续性, L'Hospital 法则,导数定义,定积分定义以及级数收敛的必要条件等方法).

下面仅就几种重点题型,举例加以说明.

例 1 试证函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x \rightarrow 0$ 时不成为无穷大.

分析 在点 $x=0$ 的某邻域内,函数无界与当 $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow \infty$ 是两个容易混淆的概念,函数无界未必就是无穷大(无穷大显见是无界的).

证 对于无论多大的正数 G ,总有充分接近于 $x=0$ 的点,使得 $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| > G$. 例如,若取 $x = \frac{1}{n\pi}$,则 $\left| \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| = n\pi$. 所以,若 $n\pi > G$,即 $n > \frac{G}{\pi}$,则存在点 $x = \frac{1}{n\pi}$,有 $\left| \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| > G$,即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的.

又如,若取 $x = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$,则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x \rightarrow 0$,但此时 $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \rightarrow 0$,因此函数 $f(x)$ 并不趋于无

穷大.

例2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$, 试证在 $[0, a]$ 上至少存在一点 x , 使 $f(x)=f(x+a)$.

分析 引入辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$, 欲证存在一点 $x \in [0, a]$, 使 $f(x)=f(x+a)$, 即要证 $F(x)=0$, 而要达到这一点, 只需对函数 $F(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上引用零点存在定理.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$, 由题设, 易知 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续. 又

$$F(0)=f(0)-f(a),$$

$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0).$$

若 $f(0)-f(a)=0$, 则 $f(0)=f(a)=f(2a)$, 即当 $x=0, a$ 时, 有 $f(x)=f(x+a)$;

若 $f(0)-f(a) \neq 0$, 则 $F(0) \cdot F(a) < 0$, 由零点存在定理, 知必有一点 $\xi \in (0, a)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

例3 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1+\frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

分析 由题设, 知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right]}{x} &= 3 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right] &= 0 \quad (\text{否则上述极限不存在}) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[x+\frac{f(x)}{x} \right] &= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 = f(0) \quad (f(x) \text{ 连续}) \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

下面求 $f''(0)$, 或用 L'Hospital 法则, 或用 Taylor 展式, 最后利用重要极限求出欲求之极限.

$$\text{解法 1} \quad \text{由题设, 有} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 3,$$

从而有 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ (连续性, 导数定义),

因当 $x \rightarrow 0$, 有 $\ln \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right] \sim x+\frac{f(x)}{x}$,

$$\text{故知} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x} = 3,$$

$$\text{即有} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 4,$$

$$\text{即} \quad f''(0) = 4,$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[1+\frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1+\frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{x}{f(x)}} \right]^{\frac{f(x)}{x^2}} = e^2.$$

$$\text{解法 2} \quad \text{由题设, 有} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1+x+\frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 3, \quad \text{①}$$

推知 $f(0)=0, f'(0)=0$, 而由 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

可得 $\frac{f(x)}{x}=\frac{f''(0)}{2}x+o(x)$, 代入①, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left[1+x\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)\right]}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right) = 3 \Rightarrow f''(0)=4.\end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+2x+o(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+2x+o(x)]^{\frac{1}{2x+o(x)} \cdot \frac{2x+o(x)}{x}} = e^2.$$

注: ① 例 1 说明函数无界与无穷大是两个不同的概念, 不能混为一谈. 无穷大必无界, 而无界却未必无穷大. 函数无界相对函数有界而言, 从函数有界的定义可以立即得出函数无界的定义. 函数有界的定义: $\exists M>0, \forall x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$; 于是有函数无界的定义: $\forall G>0, \exists x_0 \in I$, 有 $|f(x_0)| > G$. (其中 I 表示某区间). 从某种意义上来说, 函数“有界”与“无界”可以认为是一对孪生的概念, 这样就容易理解, 也便于记忆.

② 例 2 是一道证明题, 用的是常规方法, 但却是很重要的方法, 那就是“辅助函数”法. 引入什么样的函数, 至关重要, 通常是从结论出发, 由已知条件, 寻找理论根据 (定理、公式), 这样作出的辅助函数即可达到证明的目的.

③ 例 3 是一道关于极限的综合题, 在解题过程中, 涉及极限概念, 等价无穷小, 连续性, L'Hospital 法则, 导数定义, Taylor 公式, 重要极限等, 知识点较多, 但只要充分理解题设条件, 把

据住极限存在性这一主体思路, 还是容易入手的. 事实上, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x} = 3$ 立知 $f(0)=0$

(因 $f(x)$ 连续, 若 $f(0) \neq 0$, 则上述极限不存在) 进而由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 知 $f'(0)=0$. 注意到, 在涉及与二阶导数或二阶以上导数有关的命题时, 应用 Taylor 公式往往是有效的, 本题在求 $f''(0)$ 时, 用了 Taylor 公式比较方便. 解法 2 比解法 1 更直接一些.

(二) 一元函数微分学

本单元考查重点是导数 (微分) 的概念, 导数的几何意义, 会求平面曲线的切线方程与法线方程, 可导 (可微) 与连续; 微分运算 (按定义求导数, 各种函数形式的导数, 分段函数求导数, 高阶导数等); 微分中值定理 (含 Rolle 定理, Lagrange 定理, Cauchy 定理以及 Taylor 定理) 并用之于证明某些函数不等式, 函数方程及其相关命题; 导数应用 (函数单调性、极值判别法, 函数图形凹凸性、拐点判别法, 求曲率) 并用之于绘图 (会求渐近线); 会用 L'Hospital 法则求极限. 本单元的试题类型包括: ① 求已知函数 (包括显式、隐式、参数式以及变上限积分所确定的函数等) 的导数 (微分, 高阶导数); ② 判定函数在一点的可导性 (包含连续性、极限存在性); ③ 利用导数确定函数性态 (单调性, 极值, 凹凸性, 拐点), 描绘函数图形 (含渐近线); ④ 利用导数方法, 求实际问题中的最大值、最小值问题; ⑤ 利用微分中值定理, 证明函数属性的命题; ⑥ 证明函数不等式 (利用函数单调性, 微分中值定理). 如果说上一单元的证明题主要用到闭区间上连续函数的性质, 那么本单元的证明题几乎都要用到微分中值定理了, 就这方面的问题举例以说明之.

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上具有二阶导数, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$, 试证: 至少存在一点 $\xi \in (-2, 2)$, 使 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.