群论及其在信息领域中的应用

Group Theory and Its Applications to Information

杨伯君 杨丽华 编著

化学工业出版社

群论及其在信息领域中的应用

Group Theory and Its Applications to Information

杨伯君 杨丽华 编著

化学工业出版社

·北京·

本书首先介绍有限群及其表示论的基本概念和理论，其次介绍点群和转动群，并介绍群论在通信理论中的某些应用。然后介绍李群与李代数，最后介绍李群与李代数在量子调控中的应用。

本书可以作为电子、信息和通信类学校理学院开设群论课程的参考教材，也可以供对群论应用感兴趣的人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

群论及其在信息领域中的应用/杨伯君，杨丽华编著．—北京：化学工业出版社，2012.9

ISBN 978-7-122-15027-1

Ⅰ．①群…　Ⅱ．①杨…②杨…　Ⅲ．①群论-应用-通信理论-研究　Ⅳ．①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 176583 号

责任编辑：赵兰江　　　　装帧设计：史利平

责任校对：顾淑云

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京永鑫印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 8½　字数 205 千字　　2013 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：38.00 元

前　言

物理学理论总的来说分为动力学理论和对称性理论，动力学理论的数学基础是数学物理方法，对称性理论的数学基础是群论。

群论是近世代数的一个分支，近来越来越多地引起人们的关注，这是由于自 20 世纪 60 年代以来，对称性的研究在物理学、化学等多个学科中显示出了其重要性。一方面是它提供一种理论，可以统一解释一些实验事实，特别对那些动力学理论还不完善的领域，例如在基本粒子中，另一方面是它的简明性与严格性，给出某些理论结果是动力学理论所不及的，而且还对动力学理论的发展有指导意义。另外，对称性还与守恒定理有密切的联系。正因为如此，对称性的研究在近代物理、化学和信息科学中起重要作用。什么是对称性？对宏观物体来说，对称性就是在一定的变换下物体不变，称对称变换；对一个量子系统来说，对称变换就是在变换中系统的哈密顿量不变。

对称变换有一定的数学性质，称为群性质。一定性质变换元素的集合常形成一个群，因此对称性质的研究与群的数学理论直接相联系，要很好地研究系统的对称性质就必须熟悉群论。

群论在通信理论中有重要的应用，目前从文献上看到的主要是在两个方面：编码与网络。用群论来编码，可以使编码数学结构更清楚，具有群性质的码称为群码，可以是线性码和循环码。从数学上看网络就是一个图，在图中有一类是对称图，对应于对称网络，它具有群的性质。特别值得指出的是李群与李代数在量子调控中有重要的应用，而量子调控在今后的量子计算和量子通信中起关键作用。

本书首先介绍有限群及其表示论的基本概念和理论，其次介绍点群和转动群，并介绍群论在通信理论中的某些应用；然后介绍李群与李代数，李群与李代数是群论中研究最多、物理学中应用最广泛的群，它在原子分子物理、核物理和粒子物理以及结构化学中广泛应用，最后介绍李群与李代数在量子调控中的应用。

群论及其在物理学和化学中的应用，已有不少的教材和专著，而本书增加了群论在量子调控和通信理论中的应用，这是其他群论教材中没有的，也是本书的特点之一，故将书名定为《群论及其在信息领域中的应用》。

本书是编者在北京邮电大学为研究生讲授“群论”课的讲稿的基础上适当修改而成。本书可以作为电子、信息和通信类学校理学院开设群论课程的参考教材，也可以供对群论应用感兴趣的人员参考。

在本书的编写过程中，研究生唐娅荔和吴张斌给予了一定的帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，不妥与错误之处在所难免，欢迎读者与同行批评指正。

编者

2012 年 5 月

目　录

绪　论
（Introdution）

“群论”是“近世代数”的一个重要内容，近世代数还有环、域等内容。它们都是一定代数结构数学元素的集合。

群概念最早是在 1771 年，Lagrange 在求代数方程的根时引入的。他发现二次、三次和四次代数方程的解与二元素、三元素与四元素的置换变换有直接联系。后来 Gauss、Abel 和 Galois 等进一步发展了该理论。Galois 建立了代数方程群的一般理论，他根据代数方程根的置换对称性，证明五次和五次以上代数方程不能通过有限消元法求解方程根的精确解，第一次显示群论方法在研究系统对称性中的巨大潜力，他还引入了子群和单纯群的概念；后来 Klein 和 Lie 将群概念用于数学其他领域，如将群论方法和微分方程的研究结合，把有限群概念扩充到无限群，并建立连续群的理论。19 世纪末 20 世纪初，由 Frobenius 和 Burnside 独自开创了用线性变换群（或等价的矩阵群）来描述群的理论（即群的表示论），群论才形成一个完整的理论体系。

Federov 和 Schoenflies 将群论方法用于物理学中的晶体分类，显示晶体点群只有 32 种，这是群论方法在物理学中第一次成功应用。

本书除了介绍群论的抽象群外，还介绍群的表示理论，而群的表示理论在物理学中有广泛的应用。群论已成为物理专业研究生的必修课之一。近代物理有两个重要基础，一是动力学理论，其数学基础是数学物理方程，在电动力学、量子力学、固体物理中都有应用；另一个是对称性理论，其数学基础就是群论。对称性研究也深入到物理学的各个分支，包括分子物理、固体物理、核物理和粒子物理都利用群论研究其中的对称性质。对称性分析不仅帮助人们求得某些问题的解，也能帮助人们去寻找新的运动规律。

群论在核物理中的应用最早是 1937 年，Wigner 利用 4 维幺模幺正群 SU（4）去讨论核力的自旋-同位旋的无关性。1949 年 Racah 引入辛群 Sp（n），用它研究核中对称效应，1958 年 Elliatt 利用 SU（3）群去讨论核的转动性质。1975 年 Arima 等人提出了原子核振转谱的 U（6）模型。在粒子物理中，1959 年 Sakata 等人利用 SU（3）群讨论基本粒子的结构模型，1961 年 Gell-Man 和 Neuman 提出了强作用粒子幺正对称性的八重态模型，并在此基础上提出基本粒子的 Quark 模型。20 世纪 80 年代，Iachello 和作者的科研团队提出了分子振转谱的 U（4）和 U（5）模型，并用来讨论了双原子与三原子分子中的受激 Ramam 散射。

现在，群论已逐步在信息理论中应用。

群论用来编码可以使编码数学结构更清楚。线性码可以用有限交换群来讨论，循环码可以用循环群代数的理论来表示。编码理论伴随信息论诞生于 20 世纪 40 年代，编码理论和技术的目的是把信息编为符号序列，以使它在传送中具有较好的纠错能力。群论用于编码理论始于 20 世纪 50 年代，在 70 年代有较大的发展。利用群论研究对称性网络，包括无线网、光网和 Intel 网，目前查到最早的文章是 1989 年，Akers 等人提出对称性互联网的一个群理论模型，后面工作基本上是在这工作基础上的发展。群论在网络优化中的应用是一个值得研究的课题。另外，群论在量子通信和量子调控中也有很好的应用前景。

第1章 物理学中的对称性
(Symmetry in Physics)

前面提到群论是研究对称性的数学工具，要了解学习群论的意义，应该对物理系统的对称性有所了解，知道对称性的研究对研究物理系统的重要性。

对称性是自然界的一个重要特性，它给人们一个和谐优美的感受，如人长得就比较对称，谁要是少一只胳膊或一条腿，就失去对称，失去优美，生活也不方便。

对称性使物理规律具有和谐优美的形式，对称性常常对物理过程带来某些限制，该限制对解复杂的物理方程带来简化，如多体 Schrödinger 方程。另一方面，对了解很少的物理系统，如基本粒子，可以从有限的测量数据推测它应有的对称性质。因此对称性分析——群论方法在近代物理的多个分支中起重要作用。

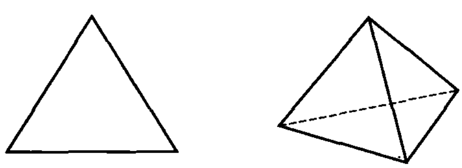
本章分以下几节：①对称性的意义；②对称性与群；③对称性的分类。

1.1 对称性的意义

1.1.1 几何对称性与物理系统对称性

对称性是一个广泛应用的概念，最简单的几何对称性，即一定的几何图形在某些变动下能够复原。这种变动可以是平移、转动或反演，使某一图形复原的变动，称为这图形的对称操作或对称变换。

为了描绘一个图形的对称性，一个简单方法是列出它的全部对称操作。



(a) 平面等边三角形　　(b) 正四面体

图 1.1

例如，对平面等边三角形，其全部对称操作是绕三角形的中心转 0°、120°和 240°，以及对每个角分线的反演［图 1.1 (a)］。对正四面体，在其相应对称操作有 12 个，它有四个正三角形表面和六条棱边，从每个角顶到相对表面中心连线是一个三阶轴；两个相对棱边中点连线是一个二阶轴；三阶轴对应两种变换，二阶轴对应一种变换，共 12 种［图 1.1 (b)］。

我们更关心对物理系统的对称性，对物理系统来说，其对称性应与其结构有关，例如，原子具有球对称性，分子具有与其几何形状相应的对称性，晶体具有空间点阵对称性等。但必须指出许多物理对称性并不具有直接的几何意义，例如全同粒子对称性，质子和中子在核力方面表现出来的对称性等。

物理系统具有某种对称性的含义是什么？它是指系统的运动方程在某种变换下的不变性，这些变换称为该系统或运动方程的对称变换。

物体系统运动方程通常是描述某个物理量在外场作用下的时空变化，体系的对称性，即相互作用的对称性，相互作用在某些变换下的不变性。这些变换包括时空变换、粒子的置换变换、正反粒子共轭变换、幺正变换等。

在非相对论量子力学中，经常使用外场的概念，外场存在使系统对称性降为外场的几何对称性，而全同粒子的置换对称性对多体问题是重要的。因此，这两种对称性对于原子、原子核、分子和固体系统的理论，具有重要的意义。

1.1.2 对称变换

在量子力学中，一个系统的状态用波函数 $\psi(r)$ 来描述，现考查在空间变换和粒子的置换变换下波函数的导出形式，以及对称变换的条件。

用 f 表示坐标空间的一个变化，它使 r 变成 r' 记为

$$r'=fr$$

f 可以是平移 a、绕 z 轴转 θ 角或对原点的反演，具体表示为

$$x'=x+a_x, y'=y+a_y, z'=z+a_z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

和
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

当坐标空间发生变化时，系统的状态波函数 ψ 也会发生变化，变为 ψ'，ψ' 在 $r'=fr$ 处的值即为 ψ 在 r 处的值，可写为

$$\psi'(fr)=\psi(r) \tag{1.1.1}$$

若将 fr 记为 r，r 就变为 $f^{-1}r$，上式可以写为

$$\psi'(r)=\psi(f^{-1}r) \tag{1.1.2}$$

波函数 $\psi(r)$ 变为 $\psi'(r)$ 的变换，也可以用一个算符 $\hat{F}$ 来表示，记为

$$\psi'(r)=\hat{F}\psi(r)$$

即

$$\hat{F}\psi(r)=\psi(f^{-1}r)$$

上式可以看成算符 $\hat{F}$ 的定义。

当 f 为空间反演时，$\hat{F}$ 便是宇称算符

$$\hat{F}\psi(r)=\psi(-r)$$

当 f 是空间平移时，$\hat{F}$ 是平移算符。从（1.1.2）式出发，利用泰勒展开可以推出平移算符的显式为

$$\hat{F}(a)=e^{-\frac{i}{\hbar}a\cdot\hat{P}}$$

其中 $\hat{P}$ 是动量算符。

当 f 为空间转动时，取转动矢量为 $\vec{\theta}$，方向为转轴方向，θ 是转角的大小，$\hat{F}$ 为转动算符。其显式为

$$\hat{F}(\theta)=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\hat{L}}$$

其中 $\hat{L}$ 为角动量算符。

对给定系统，变换是否为对称变换要由系统的运动方程在 $\hat{F}$ 作用下是否改变来决定，即要看 ψ 和 $\hat{F}\psi$ 是否满足同一方程，设 ψ 满足 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \tag{1.1.3}$$

$\hat{H}$ 是系统的 Hamilton 算符。假定 $\hat{F}$ 是一个与 t 无关的算符，将其作用在方程（1.1.3）的两边，得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\hat{F}\psi) = \hat{F}\hat{H}\hat{F}^{-1}(\hat{F}\psi) \tag{1.1.4}$$

从式（1.1.3）和式（1.1.4）两式看出，ψ 和 $\hat{F}\psi$ 要满足同一方程，则要求

$$\hat{H} = \hat{F}\hat{H}\hat{F}^{-1} \quad \text{或} \quad \hat{H}\hat{F} = \hat{F}\hat{H} \tag{1.1.5}$$

上式表明，一个变换是对称变换的必要而充分的条件是该变换算符与系统的 Hamilton 算符对易。

在量子力学中，全同粒子是不可区分的，当两个粒子交换时，系统的 Hamilton 量不变，因此，在任何情况下，全同粒子的置换变换是对称变换。

1.1.3 对称性与守恒定律

在物理学的研究中，守恒定律具有非常重要的作用。人们经常观测到某些物理量在变化过程中总是不变的，这些量就是守恒量。守恒定律与对称性之间有密切关系。

关于守恒定律与对称性之间的联系，最早由 Jacobi 在 1842 年所注意，他用拉氏函数描述经典力学系统时，从拉氏函数在平移下不变，导出动量守恒；拉氏函数在转动运动下不变，给出角动量守恒。1887 年 Schatz 从拉氏函数的时间平移不变，得到能量守恒。

现在人们都习惯用 Hamilton 量而不是用拉氏函数讨论对称性与守恒定律的联系，因它在量子力学中应用更为方便。不管是在经典力学还是量子力学中，动量、角动量和能量的守恒都来自 Hamilton 量在平移、转动和时间平移下的对称性。更普遍地说，物理系统的任一个守恒定律都对应哈密顿量在相应变换群下是不变的。但反过来不能说一种对称性一定存在一个守恒定律，例如时间反演对称性就没有相应的守恒定律。Wigner 指出，在量子力学中，对称变换都对应一个幺正算符或反幺正算符；幺正算符则伴随守恒律，而在反幺正变换下就没有明确的守恒律，如时间反演，但会带来其他的限制。

如果描述粒子相互作用的哈密顿量在一个幺正变换下是不变的，则我们能看到系统的散射矩阵在这变换下也不变，即反应截面不变。例如研究两个极化电子束的散射，当极化电子束平行与反平行于束运动方向极化时，相互作用哈密顿量不变，则马上可以推出这两种反应截面相同。当然这结果可以利用量子场论计算给出。

在有些情况下，相互作用性质不清，真实的 Hamilton 量写不出来，但利用对称性也能预言某些结果，例如质子-质子的散射，核力的细节不清，相互作用 Hamilton 量写不出来，但利用对称性仍然能预言极化质子平行与反平行于束运动方向极化，其散射微分截面相等。

对称性的讨论还能给出某些跃迁过程的选择定则，这些选择定则使我们能预言反应是否能发生。例如在任何反应中总电荷守恒，则反应中便有 $\Delta Q=0$ 的选择定则。

1.2　对称性与群

一个几何图形或物理系统的对称性可以用它的对称变换的集合来描述，该对称变换集合具有明显的数学性质：

(1) 任何两个对称变换接连发生（相乘）所得变换仍是一个对称变换；

(2) 当几个对称变换相继连续发生时，在不改变次序的条件下，可以将其随意组合（结合律）；

(3) 恒等变换是对称变换（单位元素）；

(4) 对称变换的逆变换也是对称变换。

具有以上性质的集合，数学中称为群。例如，绕定点的空间转动，它有以下性质：

(1) 一个物体连续进行两次转动，一定相当从开始到末了绕某轴的一次转动；

(2) 如果连续完成三次转动，它可以先完成前一次转动然后完成一个等于后两次的转动，也可以先完成等于前两次转动再完成后一次转动，即转动变换满足结合律；

(3) 转动角度为零为恒等变换，相当于单位元素；

(4) 如果绕某轴转动 θ 角，一定可以绕同轴转动 $-\theta$ 而复原，第二次转动为第一次转动的逆元素。

这样所有的转动，构成一个群，称为转动群，记为 SO(3)。空间转动可以连续变化，它是连续群。如果群元素都可以表示为一组参数的函数，而且函数可微，该群称为李群。李群在物理学中广泛使用。

由几何图形对称变换形成的群通常是不连续的、有限的。例如利用以下六种操作可保持平面正三角形不变，转动轴如图 1.2 所示。

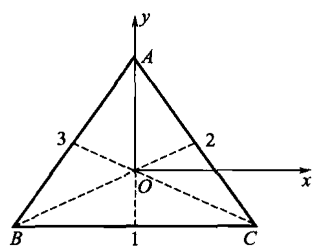


图 1.2　平面正三角形转动轴

上图中 e 是不转，a 为绕轴 1 转 π，b 为绕轴 2 转 π，c 是绕轴 3 转 π，d 为绕垂直轴 z 逆时钟转 $2\pi/3$，f 是绕 z 轴顺时针转 $2\pi/3$。它们构成一个 6 元素的群 D_3。不难证明它满足群的四点要求。

1.3　对称性的分类

在物理学中有多种不同的对称性，根据它们的性质与原因不同，可以分为三类：一种是客观存在的严格对称性，另一种是不严格的近似对称性，还有一种是为了讨论问题而引入的，称为模型对称性。下面分别介绍。

1.3.1　严格对称性

对我们来说最熟悉的严格对称性是空间、时间平移及空间转动对称性，可以证明它们对应动量、能量和角动量守恒。

还有一种对称性是来自相对论的 Lorentz 变换下的不变性，即两个匀速直线运动坐标系之间变换具有不变性，英语中称为 Boost，与 Boost 有关的物理守恒定律不太有用，因一般物理系统角动量守恒，而角动量算符不与 Boost 相联系的算符对易，因此不能从 Boost 联系的守恒定律给出有用的选择定则。

以上四种对称性、十个守恒量（动量、角动量和 Boost 各三个加能量）组合起来称为在非均匀 Lorentz 变换下的对称性，这种对称性目前在物理领域认为是精确的，相应的时空是平滑的。

另一类严格对称性是在总体规范变换下的不变性，或称第一类规范不变性。这种对称性联系着电荷（Q）守恒、重子数（B）守恒与轻子数（L）守恒。

所谓规范变换，在学习电磁场理论时有一个例子，电磁规律具有 Lorentz 规范不变性，就是当利用矢势 $\vec{A}$ 和标势 ϕ 描述电磁场时，$\vec{A}$ 和 ϕ 做以下变换

$$\vec{A}\rightarrow\vec{A}+\nabla\chi,\phi\rightarrow\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

其中χ是任一标量函数。

给出同样的电场强度和磁场强度，即电磁规律在 Lorentz 规范变换下具有不变性。这种规范变换意味着静电势的零点可以任意选取，则在电荷守恒下的能量守恒。

重子数守恒也是一种规范变换下的不变性，即重子数规范变换下具有不变性，即当 $\psi\rightarrow \mathrm{e}^{iB\theta}\psi$ 时系统的性质不变。因系统的相互作用能量是依赖于 $\psi\psi^*$，所以与相因子无关，其中 B 是重子数。即表明不同重子数态的相因子不可区分。

当 $\psi\rightarrow \mathrm{e}^{iB\theta}\psi$ 时，相应系统的 Hamilton 量变换为

$$\mathrm{e}^{-iB\theta}H\mathrm{e}^{iB\theta}=H$$

若方程不变有

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{e}^{-iB\theta}H\mathrm{e}^{iB\theta})=\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$$

$$-i\mathrm{e}^{-iB\theta}[B,H]\mathrm{e}^{iB\theta}=0$$

则有

$$[B,H]=0$$

在量子力学中知道，任何一个力学量，若与 Hamilton 量对易，就为守恒量。因此重子数是守恒量。类似可以证明电荷数和轻子数守恒。重子数、轻子数和电荷数守恒已为大量实验事实所证明。

除总体规范变换下的不变性外，电磁相互作用在定域规范变换下也是不变的。如果假定 Hamilton 量是在总体规范变换下不变，而不是在定域规范变换下不变，则对称性就是不精确的。现在已有一种理论推测重子数、轻子数守恒只是一个近似守恒定律，这理论就是所谓大统一理论。

下面介绍与全同粒子交换有关的对称性。由于全同粒子是不可区分的，因此全同粒子系统的所有可观测量都是相对于全同粒子交换是对称的，否则我们就可以利用这个可观测量来区分全同粒子。量子力学状态常用一组力学量的本征值来表征，因此量子力学状态，在全同粒子交换下应有确定的对称性质。从实验所知，具有整数自旋的全同粒子系统，当两个粒子交换时状态是对称的；而具有半整数自旋的全同粒子系统，当两个粒子交换时，状态是反对称的。全同粒子状态这些性质构成一个定律，称自旋-统计定律。

1.3.2 近似对称性

前面讨论严格对称性是对所有相互作用都成立的，至少对强相互作用、电磁作用和弱相互作用是如此。下面介绍一些对称性只是近似的，或者说只在某些作用下成立，而在另外作

用下不成立。在近代物理中人们对它们具有更大的兴趣。

首先要介绍的是坐标空间的反演对称性，对应的守恒量就是宇称守恒。在 1957 年以前，人们认为空间左右对称性是严格的，直到李政道和杨振宁提出弱相互作用下宇称不守恒，尔后为吴健雄等人实验所证明时，才知道空间反演对称性是近似的，只在强相互作用和电磁相互作用下才成立。

另一种近似对称性，是正反粒子相互替换的对称性，或称电荷共轭变换 C，与这对称性有关的守恒定律就是电荷共轭宇称，或 C 宇称。它也只在强相互作用和电磁相互作用下成立，而在弱相互作用下不成立。至于 CP 联合变换（P 是坐标空间的反演），原来认为 CP 联合变换在弱相互作用下成立，但 1964 年人们从 K^0 介子衰变中发现它在弱相互作用下也不成立，也是一个近似对称性。

下面考虑时间反演（T）下的对称性。在量子力学中，时间反演是一个反幺正变换，因此没有相应的守恒定律。人们从 K^0 介子衰变实验结果分析中给出 T 变换在弱相互作用中不是严格对称的。单独证实 T 违反是困难的，现在都通过 CPT 定律来证明。在量子场论中，可以证明 CPT 联合变换是严格对称的，应有 CPT 定律；若 CP 不变，T 也不变。因 C 和 P 相应幺正变换，T 相应反幺正变换，则 CPT 对称性是反幺正的，所以它没有相应的守恒定律。但 CPT 联合变换下不变性有些重要的推论，例如，一个结果是正反粒子的质量相等。

1.3.3　模型对称性

在近代物理中，常引入一些模型，原子、分子、原子核或基本粒子，在这模型空间中具有某种对称性，对称性质的研究，可以给出这些微观粒子的结构和能谱的某些知识。

例如，基本粒子中的 Quark 模型，认为基本粒子是由 Quark 组成。在粲数粒子没发现之前，认为 Quark 有三种，它们构成 SU（3）群基础表示的基矢，基本粒子可以用 SU（3）群的一维、八维和十维表示来分类。

又如原子核低激发谱的 U（6）模型，对于质子数和中子数均为偶数的核，两个核子耦合成玻色子，用玻色子来模拟费米子对，s 和 d 六种玻色子形成 SU（6）群的基底，利用玻色子相互作用，可给出这类原子核的振动与转动的能谱。

在原子核的相互作用玻色子模型启发下，人们提出了双原子分子的 U（4）模型和三原子分子的 U（5）模型，用其计算分子的低激发谱和受激 Raman 散射，都取得较好的效果，有关具体的结果将在本书的第 7 章介绍。

习　题

1. 考虑一个平面四边形，它存在那几种保持形状不变的对称变换？
2. 构成一个群的对称变换有哪四点要求？
3. 物理学中有那几种对称性？

第 2 章　群的基本知识

(Basic Informations of Group)

本章首先介绍群的基本知识，包括群的概念、子群、同态与同构、共轭类、不变子群与商群以及群的直积，最后介绍几个简单的群例。

本章分为以下几节：①群的概念；②子群、同态与同构；③共轭类、不变子群与商群；④群的直积与外直积；⑤某些简单的群。

2.1　群的概念

群是数学元素的一种特殊的集合，它要求集合中的元素满足某些组合规则，并具有代数结构；组合规则（常称为乘法）可以是普通乘法的推广，也可以是矩阵相乘或两元素的置换等。

2.1.1　群的定义

定义 2.1.1　群是一种具有代数结构的数学元素 $a,b,c\cdots$ 的集合。它的组合规则（乘法）满足以下四条：

（1）封闭性：集合中任意两个元素的乘积（包括自乘）所得元素，都在此集合内，取集合为 G。

$$a,b\in G \quad c=a\cdot b=ab \quad c\in G$$

（2）满足结合律：即 $(ab)c=a(bc)$。

（3）存在单位元素：集合中存在一个单位元素或称恒等元素，而且只存在一个单位元素 e，使

$$e\in G \quad a\in G \quad ae=ea=a$$

（4）集合中任何元素的逆元素在集合中，a 的逆元素为 a^{-1}，有

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e \quad a^{-1}\in G \quad a^{-1}\text{是唯一的}$$

在一定组合规则（乘法）下满足以上四条并具有代数结构的集合称为群。在以上四条中没有要求乘法满足交换律，如果一个群，其元素的乘法满足交换律称为交换群或 Abel 群。群元素的数目称为群的阶，记为 g。g 为有限称则为有限群；g 为无限称则为无限阶群。群元素可数的无限群为离散无限群，而群元素不可数的称为连续群。

2.1.2　乘法表与群示例

如果知道群中任两个元素的乘积，则群结构就确定了。该乘积可以排列成一个乘法表，例如 G 中有元素 $e,a,b,c,d\cdots$，其乘法表见表 2.1。

显然只有群元素比较少时乘法表才排得出来。在乘法表中每列与每行中包含每个元素，且每个元素仅出现一次，这称为乘法表的重排定理。若群是 Abel 群（交换群），群元素在乘法表中相对于主对角线是对称的。

表 2.1　群 G 的乘法表

—	e	a	b	c	d	—
e	$ee=e$	$ea=a$	b	c	d	…
a	$ae=a$	aa	ab	ac	ad	…
b	b	ba	bb	bc	ba	…
c	c	ca	cb	cc	cd	…
d	d	da	db	dc	dd	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	—

例 2.1.1　$G=\{1,-1\}$，乘法为普通数乘法，单位元素为 $1=e$，$-1=a$，a 逆元素为自己；其乘法定律 $ee=e$，$aa=e$，$ea=ae=a$。

该群在量子力学中很重要，其与空间反演相对应。三维空间对矢量 $\vec{r}$ 作用

$$e\vec{r}=\vec{r},\quad a\vec{r}=-\vec{r}$$

e 是保持 $\vec{r}$ 不变的恒等变换，a 是使 $\vec{r}$ 反演的反演变换，则 $\{e,a\}$ 构成反演群。称群 G 与反演群同构。

例 2.1.2　$G_4=\{1,i,-1,-i\}$，利用普通乘法构成群，其乘法表见表 2.2。

表 2.2　G_4 群的乘法表

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

从上表中看出，元素相对主对角线是对称的，因此它是一个 Abel 群。另外可以看到这群的元素可以用一个元素多次幂得到，该元素为 i，即

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1 \tag{2.1.1}$$

这样由一个元素多次幂组成群称循环群 C，G 为四阶循环群。对元素 a 形成 n 阶循环群为

$$a^0=e,\qquad a^1,a^2,\cdots,a^n=e \tag{2.1.2}$$

由 $a^m a^{n-m}=a^n=e$，可知 a^m 的逆元素为 a^{n-m}。

定理 2.1.1　重排定理：设群 $G=\{g_a\}$ $b\in G$ 当 g_a 取遍所有的元素时，bg_a 给出并仅一次给出 G 中的所有元素。

重排定理是关于群乘法的重要定理，它指出每一个群元素在乘法表的每一行（或每一列）中被引出一次且仅一次。

例 2.1.3　所有的整数 $G=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，当乘法取为普通加法时，构成一个群，这群也是一个 Abel 群，其单位元素为 0，n 的逆元素为 $-n$。

但全部正整数就不构成一个群，因为它没有逆元素。

例 2.1.4　三客体的置换群 S_3，它是简单的非 Abel 群。

三客体编号为 1，2，3 排成一列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，排列次序作一个变化，其中 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ 与

$\begin{pmatrix}2&1&3\\2&1&3\end{pmatrix}$看成同一种置换，即置换主要取决上下元素对应变化，不在排列次序。三客体置换群有以下六个元素：

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};\quad a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix};$$
$$c=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix};\quad d=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix};\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad(2.1.3)$$

元素个数为 3! =6，它是一个 6 阶置换群，表示为 S_3，也称三客体对称群。n 个客体的置换群元素个数为 $n!$，表示为 S_n，也称 n 客体的对称群。

两置换乘积 ba，表示先实行 a 置换，再实行 b 置换。

$$ba=b\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=d\qquad(2.1.4)$$

表 2.3 S_3群的乘法表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

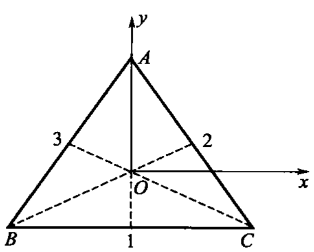


图 2.1 平面正三角形对称变换

从乘法表 2.3 看出，群元素对主对角线是不对称的，所以 S_3是非 Abel 群。

例 2.1.5 平面正三角形对称群 D_3，又称 6 阶二面体群，它是保持正三角形不变的空间转动操作所形成的群。

利用以下六种操作可保持平面正三角形不变：

如图 2.1 所示，e 是不转，a 为绕轴 1 转 π，b 为绕轴 2 转 π，c 是绕轴 3 转 π，d 为绕垂直轴 z 逆时针转 $2\pi/3$，f 是绕 z 轴顺时针转 $2\pi/3$。

D_3群的乘法表如表 2.4 所示；从表 2.4 中看出，群中任一个元素 u 乘积 g_a，给出并且仅一次给出 D_3的所有元素，满足重排定理。

表 2.4 D_3群的乘法表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

后面会看到重排定理大大限制了互相不同构有限群的数目。还可以证明，阶数为相同素数的有限群都同构。三客体置换群 S_3 与平面正三角形对称群 D_3 同构。

2.2　子群、同态和同构

2.2.1　子群与陪集

定义 2.2.1　群 G 集合中一部分元素组成的子集合 H，若在原群乘法规则下满足群的四点要求，H 称为 G 的子群。

例 2.2.1　取 $G=\{1,i,-1,-i\}$，则 $H=\{1,-1\}$ 就是 G 的二阶子群。

例 2.2.2　在定义群乘法为数的加法时，整数全体构成群是实数全体构成群的子群。

定理 2.2.1　子群定理：群 G 的非空子集 H 是群的一个子群，其充分与必要条件是：h 与 h' 满足 $h^{-1}h'\in H$。

证明：由于 H 是 G 的子集，满足结合律；取 $h=h'$，得 $h^{-1}h'=e\in H$，H 中有逆元素；另外取 $h'=e$，则 $h^{-1}e=h^{-1}\in H$，则 H 中保持单位元素；最后取 h 为 h^{-1}，有 $(h^{-1})^{-1}h'=hh'\in H$，满足乘法规则下的闭合性；因此 H 为一个子群。

换言之，G 的一个子集 H，在其乘法下是闭合的，则 H 为 G 的一个子群。任意一个群的单位元素 e 和群本身都是 G 的子群，称平庸子群或显然子群；其他子群称真实子群。

为了证明一个重要定理—Lagrange 定理，要引入一个重要的概念，称子群的陪集。

定义 2.2.2　若 H 是群 G 的真实子群，其元素为 h_i，则 G 中一定存在至少一个元素 a 不属于 H 的，则用 a 乘 H 所有元素 $ah_i\ h_i\in H$ 形成一个子集称由 a 产生 H 的左陪集，可表示 aH。

注意，aH 不是一个群，因其中没有单位元素，相似也有右陪集 Ha，一般情况左陪集与右陪集是不完全一样的。

定理 2.2.2　陪集定理：子群 H 的两个陪集 aH 和 bH，如果它们两个中有一个共同元素，则这两个陪集完全相同。

证明：让 $ah_i=bh_k$，则

$$a=bh_kh_i^{-1}=b(h_kh_i^{-1})=bh_j\in bH。$$

再让 a 乘 bH 中任何元素：

$$ah_l=bh_jh_l=bh_m\in bH$$

因此 aH 中任何元素在 bH 中，反过来 bH 中任何元素也在 aH 中，因此 aH 与 bH 是完全一样的。

定理 2.2.3　Lagrange 定理：有限群 G 的任何子群的阶数是有限群阶的乘因子。若有限群阶为 N，子群阶为 m，则有 $N/m=k$（k 为整数）。

证明：从陪集定理看出子群的任何两个陪集是不相交的，要么完全相同，要么完全不同；若子群的阶为 m，则陪集的阶也为 m。则若有限群的阶为 N，则子群外形成陪集的个数为 $k-1$，陪集的元素加子群元素即得到 G 中所有元素，k 称为子群 H 在群 G 中的指数，定理得证。

由定理可知，若群 G 的阶数为素数，G 就没有任何真实子群，若群的阶为 6，从定理得到，其真实子群阶只有 2 和 3，∵$2\times3=6$。