大学文科高等数学

DAXUEWENKE GAODENGSHUXUE

主 编 金元泽 金昌录
副主编 张玉峰 郑玉兰

黑龙江朝鲜民族出版社

大学文科高等数学

金元泽　金昌录　　主　编
张玉峰　郑玉兰　　副主编

黑龙江朝鲜民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科高等数学/金元泽等编.—牡丹江:黑龙江朝鲜民族出版社,2001.11

ISBN 7-5389-1007-7

Ⅰ.大... Ⅱ.金... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078562 号

书　　名/ **大学文科高等数学**

编　　者/ 金元泽　金昌录　张玉峰　郑玉兰

责任编辑/ 金斗弼

责任校对/ 宋纪文

封面设计/ 尹　豪

出版发行/ 黑龙江朝鲜民族出版社

印　　刷/ 牡丹江书刊印刷厂印刷

开　　本/ 850×1168 毫米·1/32·12.5 印张·300 千字

版　　次/ 2001 年 11 月第 1 版　2001 年 11 月第 1 次印刷

印　　数/ 1-3 000 册

书　　号/ ISBN 7-5389-1007-7/G·265

定　　价/ 16.00 元

前　言

目前,越来越多的人们已经清楚地认识到,数学对于现在和未来的社会科学工作者来说,既是一种强有力的研究工具,也是一种不可缺少的思维方式。为了适应文科类专业的需求,从九七级开始我们延边大学同国内许多大学一样,在文科各专业开设了高等数学课。文科高等数学教学是一个新生事物,有许多新的特点。既要学习有用的数学知识,又要领略理性思维的挑战。由于学时不多,学生的基础不同,各专业的需求也不同,因此简单地理工科教材删繁就简不能解决问题。多年来我们从事文科高等数学的教学和建设工作,积累了一些经验和有关资料,在我们多年来所用的讲议——微积分——的基础上编写了本书。

由于数学自身的特点和人类社会的进步,数学在现代文化发展中扮演着中心角色。当代文化发展的重要特征之一就是数学化,数学的方法、思想与精神不仅在自然科学和工程技术领域中起着重要的作用,而且正在以越来越快的速度渗透到社会科学的各个领域,显示出巨大的推动作用。在许多场合,它已经不单纯是一种辅助性的工具,而是解决许多重大问题的关键性的思想与方法。马克思曾经指出:"一门科学只有在成功地应用数学时,才算达到了真正完善的地步。"当代社会科学的发展已经开始进入这个阶段了。数学方法的运用正在极大地影响着社会科学工作者观察问题的角度,思考问题的方式以及运用文献资料的方法,影响着他们对原始资料的收集和整理,以及分析这些资料的方向、内容和着眼点。数学方法的运用不仅使研究课题、基本论点、论证过程以及研究结果的表达更加清晰、准确、严谨,而且对于研究结果的检验也有重要意义,尤其是运用数学方法有可能解决那些使用传统的研

究方法所无法解决的难题。

人们早已习惯于把数学看作科学的工具和语言，却往往忘记了数学也是一种十分重要的思维方式和文化精神。对于21世纪的文科大学生，这种思维方式不仅是十分重要的，而且是无法通过其他途径获得的。

针对我们学校文科专业学生的实际需要及知识结构和思维特点，本教材在内容选取上作了较为周密的考虑。本教材的主要内容为函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数和常微分方程简介等八章，章末有习题，书末有习题答案。

综上所述，数学不仅是一种重要的工具，也是一种基本的思维方式。我们在编写过程中努力兼顾了这两个方面。即在介绍数学知识的同时，强调培养学生的数学思维方式。教材中不仅渗透了一些数学的思想方法，又介绍了数学方法论以及数学在现代社会中的应用，力图使学生对数学的基本特点、方法、思想及在社会中的应用与地位有大致的认识，获得合理的、适应未来发展需要的知识结构，进而增强对科学的文化内涵与社会价值的理解，为他们将来对数学的进一步了解与实际应用打下基础，为现代化社会培养具有新型知识结构与文化观念的人材。

延边大学数学系文松龙教授仔细审阅了全部书稿，并提出了宝贵意见。在本书的编写过程中，得到了延边大学数学系领导和老师们的关心和帮助，在此一并致谢。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中的错误及不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　者

2001年6月28日

目　录

第一章　函数

在中学我们已经学习过函数的概念，函数概念是高等数学的重要概念之一，而函数是微积分学研究的对象．本章将对函数的有关概念较系统的讨论之前先介绍集合论的一些基本概念．

1.1　集合

（一）集合的概念

“集合”是数学中一个重要的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用．

一般说来，集合是按照某种规定能够识别的一些具体对象或事物的全体．构成集合的每一个对象或事物，称为集合的元素．

下面举几个集合的例子：

【例 1】　延边大学在校生的全体为一集合．

【例 2】　方程 $x^2+5x-6=0$ 的根的全体为一集合．

【例 3】　所有自然数为一集合．

【例 4】　直线 $y-2x+1=0$ 上的所有点为一集合．

在上述例 1 和例 2 中，每一个集合只有有限多个元素，这种集合称为有限集．而后两个例 3 和例 4 中所给出的集合是由无限多个元素构成，这种集合称为无限集．

通常集合用大写字母 A、B、C、…… 等表示，其元素用小写字母 a、b、c、…… 等表示．

设 A 是一个集合，如果 a 是A 的元素，记作 $a \in A$，读作 a 属于 A 或a 在A 中；如果 a 不是A 的元素，记作 $a \overline{\in} A$(或 $a \notin A$)，读作 a 不属于A 或a 不在A 中.

例如 如果 F 表示全体有理数的集合，则$\frac{3}{4} \in F$,$\sqrt{2} \overline{\in} F$.

(二) 集合的表示法

集合一般有两种表示法：列举法和描述法.所谓列举法就是按任意顺序列出集合的所有元素，并用大括号$\{\ \}$括起来.

【例 1】 由 a、b、c、d、e 五个元素组成的集合A，可表示为

$A = \{a, b, c, d, e\}$.

【例 2】 由 $x^2 + 5x - 6 = 0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$A = \{1, -6\}$.

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复.

所谓描述法就是给出集合元素的特性，设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足$P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为

$A = \{a \mid P(a)\}$

【例 3】 设 A 为$x^2 + 5x - 6 = 0$ 的根构成的集合，可表示为

$A = \{x \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$

【例 4】 设 A 为全体奇数的集合，可表示为

$A = \{x \mid x = 2n + 1, n \text{ 为整数}\}$

由此可见，同一个集合可以有不同的表示法，也就是说，一个集合的表示法不是唯一的.

只含有一个元素 a 的集合称为单元集合，记为$\{a\}$.例如常数 c 的变化域就是单元集合$\{c\}$.

不含有任何元素的集合称为空集，记为Φ.

例如方程 $x^2 + 1 = 0$的实数解的解集合就是空集.又如平面上两条平行线的交点集合也是空集.把空集也视为集合，正如我们把 O 也看作数一样，在数学上是方便的.但要注意单元集合$\{0\}$ 及$\{\Phi\}$

都不是空集，前者含有元素“0”，后者对空集“Φ”为其元素.

（三）全集与子集

由所研究对象的全体构成的集合称为全集，记作 U.例如当讨论一元线性方程

$ax+b=0$ （$a\neq 0$ 且 $a\in N, b\in Q$）的有理解集合时，有理数集 Q 是一个全集，需要指出的是全集是相对的.在一种条件下是全集的集合，在另一种条件下可能就不是全集.前例中，如果在实数范围内讨论一元线性方程 $ax+b=0((a\neq 0)$ 的解集合时，那么 Q 不是全集了.

设 A、B 是两个集合.如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元系，即如果 $a\in A$，则必有 $a\in B$，那么称 A 为 B 的子集，记作

$A\subset B$ 或 $B\supset A$，

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

【例 1】 设 $A=\{1,3,5\}$，则集合 A 的所有子集是 Φ, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{3,5\}$, $\{1,3,5\}$.注意，在考虑集合 A 的所有子集时，不要把空集 Φ 和它本身忘掉.

设 A，B 是两个集合.如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

很明显，含有相同元素的两个集合相等.

【例 2】 设 $A=\{x\mid x^3-5x^2+6x=0\}$，$B=\{0,2,3\}$ 则

$A=B$

关于子集有下列结论：

(1) $A\subset A$，即“集合 A 是其自己的子集”；

(2) 对任意集合 A，有 $\Phi\subset A$，即“空集是任意集合的子集”；

(3) 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即“集合的包含关系有传递性”.例如 $N\subset Q$，$Q\subset R$，于是有 $N\subset R$.

（四）集合的运算

前面我们给出了集合的概念，下面给出集合运算的定义.

定义 1.1 设 A，B 是两个集合，由 A 和 B 的所有元素构成的

集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

并集具有以下的简单性质：

(1) $(A \cup B) \supset A, (A \cup B) \supset B$;

(2) 对任何集合 A，有

$$A \cup \Phi = A, A \cup U = U, A \cup A = A$$

定义 1.2　设 A, B 是两个集合，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in a \text{ 且 } x \in B\}$$

交集具有以下的简单性质：

(1) $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$;

(2) 对任何集合 A，有

$$A \cap \Phi = \Phi, A \cap U = A, A \cap A = A$$

【例 1】　设 $A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{1,3,5,7,9\}$

则　$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$

$A \cap B = \{1,3,5\}$

【例 2】　设 $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$

则　$A \cup B = \{a, b, c\}, A \cap B = \{a, b\}$

【例 3】　设 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

$B = \{x \mid x > 0\}$.

则　$A \cup B = \{x \mid x \geqslant -2\}$.

$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqslant 2\}$

【例 4】　设 $A = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$

$B = \{x \mid x = 2n + 1, n \in N\}$

则　$A \cup B = \{x \mid x = n, n \in N\}$

$A \cap B = \Phi$

如果 $A \cap B = \Phi$，则称 A, B 是分离的.

定义 1.3　设 A, B 是两个集合.属于 A 而不属于 B 的所有元

素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

【例 5】 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$

$B=\{1,3,5,7\}$,

则 $A-B=\{2,4\}$

定义 1.4 全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 A',即

$$A'=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$$

补集具有以下的简单性质:

$$A\cup A'=U,A\cap A'=\Phi$$

【例 6】 设 $U=\{x\mid x=n,n\in N\}$

$A=\{x\mid x=2n,n\in N\}$

则 $A'=\{x\mid x=2n+1,n\in N\}$

【例 7】 设参加考试的学生为全集 U,如果 A 表示及格的学生集合,则 A' 表示不及格的学生集合.

1.2 实数集

(一) 实数与数轴

人们对数的认识是逐步发展的.首先是自然数0,1,2,3,…,全体自然数的集合称为自然数集,记为 N.在 N 中我们可以定义加法和乘法运算.其后发展到有理数,它包括一切整数(整数的集合用 Z 表示)与分数,每一个有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$(其中 $p,q\in Z$,且 $q\neq 0$).

我们把全体有理数的集合称为有理数集,记为 Q.在 Q 中我们可以定义四则运算.再进一步发展到无理数(例如$\sqrt{2}$,π 等都是无理数),无理数不能表示为 $\frac{p}{q}$(其中 $p,q\in Z,q\neq 0$).分数可以

用有穷小数或无穷循环小数表示;反之,有穷小数或无穷循环小数亦可用分数表示.因此,有理数可以表示为有穷小数或无穷循环小数,而无理数为无穷不循环小数.

设有一条水平直线,在这条直线上取定一点 O,称为原点,规定一个正方向(一般规定由原点向右的方向为正方向),再规定一个长度,称为单位长度.这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴,如图 1-1.

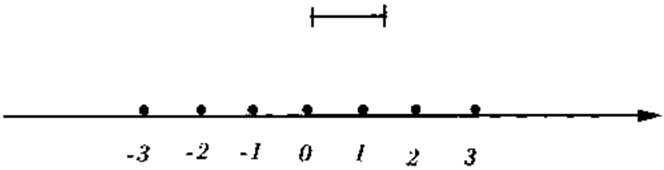

图 1-1

任何一个有理数$\frac{p}{q}$,都可以在数轴上找到一个点与之对应,使得由原点到这点的长度与单位长度之比等于$\frac{p}{q}$,这样得到的点称为有理点,它是有理数$\frac{p}{q}$的几何表示,而$\frac{p}{q}$称为有理点的坐标.反之,数轴上任何一个有理点必对应于一个有理数.

任给两个有理数 a, $b(a<b)$,在 a,b 之间至少可以找到一个有理数 C,使得 $a<c<b$,例如 $c=\frac{a+b}{2}$.同样地,在 a,c 之间也至少可以找到一个有理数 d,使得 $a<d<c$.依次

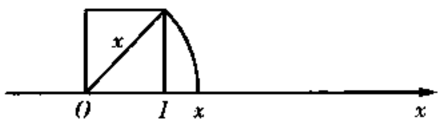

图 1-2

类推，可知不论有理数 a,b 相差多么小，在 a,b 之间总可以有无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的.

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它并没有充满整个数轴.例如边长为1的正方形，其对角线的长度为 x（见图1-2），由勾股定理可知 $x^2=2$.设在数轴上的点 x 代表的数为$\sqrt{2}$，可以证明$\sqrt{2}$ 不是有理数，因此数轴上坐标为$\sqrt{2}$ 的点不是有理点，这种点也有无穷多个，而且在数轴上也是处处稠密的.例如，坐标为$\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}+0.2$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}+1$，$\sqrt{3}+0.2$，$\pi+1$ 等的点都不是有理点，因此，数轴上除有理点外还有无穷多个空隙，这些空隙处的点称为无理点，与无理点相对应的数称为无理数.

有理数与无理数统称为实数.全体实数构成的集合称为实数集，记为 R.与有理数集 Q 一样，实数集 R 中也可以定义四则运算.实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连续性.由此可见，每一个实数，数轴上就有唯一的点与它对应；反之，数轴上的每一个点也对应着唯一的实数，这就是说全体实数与数轴上的全体点建立一一对应的关系.今后我们所研究的数都是实数，为了简单起见，常常把实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示，如点 a 和实数 a 是相同的意思.

（二）区间

在 R 的子集中，我们今后经常遇到各种各样的区间.设 a,b 为实数，且 $a<b$

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数x 的集合，称为以 a,b 为端点的开区间，记作(a,b)，见图 1－3.即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的闭区间，记作$[a,b]$，见图 1－4.即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

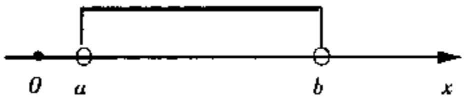

图 1-3

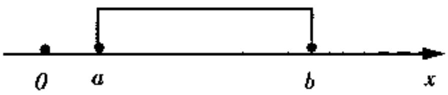

图 1-4

(3) 满足不等式 $a < x \leqslant b$(或 $a \leqslant x < b$) 的所有实数 x 的集合,称为以 a,b 为端点的半开区间,记作$(a,b]$(或$[a,b)$),分别见图 1-5 和图 1-6,即

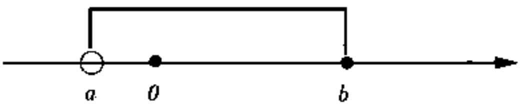

图 1-5

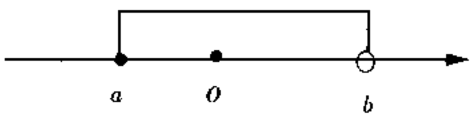

图 1-6

$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$

$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$

以上三类区间为有限区间.有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$,称为区间的长度.这些有限区间是区间的长度为有限的线段.

还有下面几类无限区间:

(4) $(a,+\infty) = \{x \mid a < x\}$

$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$

(5) $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$

$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$

(6) $(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$

即全体实数的集合 R.

(三) 绝对值

我们今后常常要用到实数绝对值的概念,下面介绍一下绝对值的定义及性质.

定义 1.4　设 $x \in R$,x 的绝对值是一个非负实数,记为 $|x|$,其定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义:$|x|$ 表示数轴上点 x(不论 x 在原点左边还是在右边)与原点之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

因为　$x > 0$ 时　　$-|x| < x = |x|$

$x < 0$ 时　　$-|x| = x < |x|$

$x = 0$ 时　　$-|x| = x = |x|$