



高等教育“十二五”规划教材

数学建模方法引论

SHUXUE JIANMO FANGFA YINLUN

■ 李彦刚 祁忠斌 主 编
■ 魏 杰 马维元 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



高等教育“十二五”规划教材

数学建模方法引论

主 编 李彦刚 祁忠斌
副主编 魏 杰 马维元

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本教材共分 10 章:绪论,初等数学建模方法,微分方程建模方法,差分和代数建模方法,数据插值与拟合方法,计算机仿真建模方法,线性最优化建模方法,非线性最优化建模方法,层次分析建模方法,图论建模方法;通过大量的例子阐述了建立模型的思想和方法,旨在循序渐进、由浅入深培养学生观察问题、分析问题、解决问题的能力。

本教材适合高等院校学生教学和培训之用,也适合于有兴趣的读者自学。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法引论/李彦刚,祁忠斌主编. —北京:北京理工大学出版社,2012. 4

ISBN 978 - 7 - 5640 - 5794 - 7

I. ①数… II. ①李… ②祁… III. ①数学模型-高等教育-教材
IV. ①O141. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 069741 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / [http:// www. bitpress. com. cn](http://www.bitpress.com.cn)

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京市通州富达印刷厂

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 16. 5

字 数 / 290 千字

版 次 / 2012 年 4 月 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑 / 陈莉华

印 数 / 1~1500 册

责任校对 / 周瑞红

定 价 / 42. 00 元

责任印制 / 王美丽

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识,更重要的是培养学生应用数学的意识、兴趣和能力,让学生学会用数学的思维方式观察周围事物,用数学的思维方法分析、解决实际问题.

当然,数学教育在整个人才培养过程中的重要性是人所共知的.从小学到大学,数学一直是一门主课,其中讲的、练的、考的主要是定义定理、公式计算和逻辑推理,将其称之为“算数学”.其实,对于以数学为工具解决各种实际问题的学生来说,准确、快捷的计算和严密的逻辑推理是必要的,即要学好“算数学”.但是,面临一个实际问题,在计算、推理之前首先要用数学语言描述它,建立问题的数学模型,在得到数学模型之后,结合实际进行分析、检验、修正,从而解决实际问题的思维和做法的培养是重要的,对研究实际现象,揭示宇宙和从事科学研究也是必要的,将这一类的工作称之为“用数学”.传统的数学教学体系内容侧重于前者,对于后者的训练远远不够.十几年来许多学校相继开设的数学建模课程和目前蓬勃开展的全国大学生数学建模竞赛,是培养学生“用数学”能力的有益尝试,深受同学们的热烈欢迎和教育界的充分肯定.

毋庸讳言,从知识的学习到知识的应用不是一件简单的、自然而然就能实现的事情,没有充分地、有意识地培养、训练和实践,没有表达应用的教学用书,学生的应用意识、兴趣和能力是不会形成的,为了尽快建立学生应用数学的意识,积极组织和参与全国大学生数学建模竞赛,应广大师生的强烈要求编写了此教材,旨在学习《高等数学》和《工程数学》之后,对所学知识和知识的应用之间架起一座桥梁.

本教材主要着重于以下几点:

(1)培养学生动手、动脑、动眼为主,借助计算机的运算、图形功能和方便的数学软件为辅,通过数值的、几何的观察、联想、类比,去发现线索,探讨规律,学习解决实际问题常用的数学方法.

(2)分析、解决经过简化的实际问题,亲身感受“用数学”的酸甜苦辣,提高学数学、用数学的兴趣、意识和能力,促成数学教学的良性循环.

(3)实例编排了思路与启发,有利于在解决问题中重视常规思维方式和办法,脚踏实地地去解决问题.

(4)全书实例安排上很少涉猎复杂的大型问题,旨在使本书通俗易懂,使读者重点了解解决问题的方法,培养其敢于接触实际问题、分析实际问题、进而解

决实际问题的能力,而不至于被复杂问题吓倒。

(5)借助于计算机解决实际问题也是一种能力,教材中桥梁作用也有所体现。

(6)实例细致入微的分析,使读者感受解决问题的同时学会严谨的书面表达及方法的体现。

教材共分 10 章,其中前 6 章内容为基础篇,只要具备高等数学和工程数学的基本知识就可以阅读或讲解,本篇从基础入手,明确什么是数学建模,怎样进行建模,从浅显易懂的例子出发,逐步培养建立模型的思维和方法。第 7 章至第 10 章为强化提高篇,有针对性地对某些应用较为广泛的学科和专题进行入门式的讨论和介绍,拓宽知识视野,培养学生对相关学科和领域的兴趣,强化其短期知识的学习能力和应用新知识建立模型的能力。附录 I 介绍了线性/非线性最优化问题的求解软件 Lingo,借助于已有软件可以避免烦琐的计算过程,为更好地解决问题节省了大量的时间。附录 II 摘录网络文摘,对全国大学生建模竞赛中有关内容作了粗略介绍,让建模竞赛者对竞赛过程有所了解。

本教材第 1、第 7、第 9 章由李彦刚编写,第 2、第 3、第 4 章由魏杰编写,第 5、第 6、第 8 章及附录 I 由马维元编写,第 10 章由祁忠斌编写,全书由李彦刚统筹安排。兰州大学王海明教授担任主审,给全书内容的编排提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢。

本教材旨在为数学建模爱好者提供一本循序渐进、由浅入深的入门教材。由于时间仓促,加之编者水平有限,难免有不妥、错误之处,编者诚恳地希望读者予以批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 数学模型与数学建模	1
1.2 传染病模型	5
1.3 数学建模的常用方法	7
1.4 几个简单的数学模型	11
练习题 1	16
第 2 章 初等数学建模方法	18
2.1 有关自然数的几个模型	18
2.2 状态转移问题	22
2.3 量纲分析法	27
2.4 类比建模方法	33
练习题 2	40
第 3 章 微分方程建模方法	42
3.1 微分方程建模原理和方法	42
3.2 Newton 冷却(加热)定律及应用	44
3.3 车间空气清洁问题	45
3.4 古物年代测定法	46
3.5 掷铅球问题	52
3.6 森林救火的数学模型	53
3.7 肿瘤生长模型	56
3.8 放射性废物的处理问题	62
3.9 人口增长预测模型	65
3.10 经济模型	70
练习题 3	73
第 4 章 差分和代数建模方法	76
4.1 Malthus 人口模型	76
4.2 借款问题	77
4.3 交战问题	79
4.4 线性差分方程的解法	81
4.5 离散变量与连续变量	84

4.6 差分方程在经济学中的应用	86
4.7 线性代数模型	91
练习题 4	100
第 5 章 数据插值与拟合方法	104
5.1 拉格朗日(Lagrange)插值法	104
5.2 分段线性插值	112
5.3 三次样条函数	112
5.4 最小二乘法	114
5.5 应用举例	119
练习题 5	122
第 6 章 计算机仿真建模方法	124
6.1 计算机仿真及优缺点	124
6.2 离散时序问题的计算机仿真	127
6.3 蒙特卡洛(Monte Carlo)方法	130
6.4 随机性问题的计算机仿真	132
练习题 6	139
第 7 章 线性最优化建模方法	141
7.1 线性规划及其标准化	141
7.2 线性规划问题的基本概念	145
7.3 线性规划的对偶问题	147
7.4 指派问题	149
7.5 线性规划建模实例	152
练习题 7	154
第 8 章 非线性最优化建模方法	157
8.1 最优化简介	157
8.2 非线性规划	160
练习题 8	171
第 9 章 层次分析建模方法	172
9.1 层次分析法的基本原理与步骤	172
9.2 层次分析法的应用	177
练习题 9	181
第 10 章 图论建模方法	182
10.1 图的基本概念和简单图论模型	182
10.2 图的矩阵表示	187
10.3 图的生成树及应用	189

10.4 最短路问题及其算法	192
10.5 欧拉图与中国邮递员问题	199
10.6 哈密顿图与推销员问题	202
10.7 匹配与覆盖问题	205
10.8 网络流问题	212
练习题 10	221
附录 I Lingo 软件在最优化问题中的应用	226
附录 II 全国大学生数学建模竞赛指南	246
参考文献	254

第 1 章

绪 论

随着科技进步和计算机的飞速发展,在生活实践中,运用数学的理论与方法解决各类实际问题已不仅仅局限于自然科学领域,而已遍及经济、生态、人口、社会、政治等各个领域.通常,运用数学的理论和方法解决任何一个实际问题,必须先根据有关条件建立相应的数学模型,然后根据数学模型进行求解、分析及编程计算,进而反映实际问题,求解实际问题.诚然,在上述一系列的过程中,建立问题的数学模型是解决实际问题的核心,那么,如何建立实际问题的数学模型成为本课程研究的重点.本课程将从不同角度浅显易懂地逐步培养读者接触实际问题、分析实际问题和建立实际问题数学模型的基本能力.

1.1 数学模型与数学建模

1.1.1 数学模型

一般来说,在现实中,依照实物的形状和结构按比例制成的物品,我们称之为实物模型,如汽车模型、飞机模型、某单位建筑分布立体模型等;而用一种不同于表达对象的元素代替所要表达事物的模型称为模拟模型,如组织系统图表、需求曲线(图1.1)、算法流程图等;还有一类重要且常见的模型是文字模型,它是用文字或符号去描述实际情况或管理者思想的一系列语言,如产品说明书等.

数学模型是用文字或数学符号去描述实际问题,因而是一种文字模型.通常,数学模型是指关于部分现实世界为某种目的而作的一种抽象的、简化的数学结构.这种结构由数学语言(包括符号)确定一组变量之间的关系,从而解释或描述某一系统或过程.数学模型对我们其实并不陌生.如牛顿第二定律 $F=ma$ 就是一个典型的数学模型;欧姆电路定律 $I=U/R$ 也是一个数学模型;历史

上著名的七桥问题的答案更是一个巧妙的数学模型。

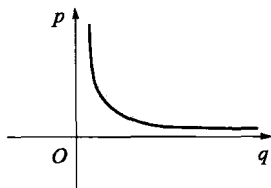


图 1.1 需求曲线图

七桥问题 18 世纪东普鲁士哥尼斯堡被普列格尔河分为四块，它们通过七座桥相互连接(图 1.2)。当时，城里的市民热衷于这样一个游戏：“一个散步者怎样才能从某块陆地出发，经每座桥一次且仅一次回到出发点？”

思想和启发 问题似乎不难，谁都想试一试，但是没人找到答案。后来，有人写信告诉了当时的著名数学家欧拉，千百人的失败使欧拉猜想，也许，那样的走法根本不可能。

解题过程 1736 年，他证明了自己的猜想。

欧拉把南北两岸和两个岛抽象成 4 个点，将连接这些陆地的桥用连接相应两点的一条线来表示，于是将图 1.2 问题转化为：在图 1.3 中，是否存在从某点(称为顶点)出发经过每条线(称为边)一次且仅一次最终回到出发点的路线。

欧拉指出：一个图中存在通过每边一次且仅一次回到出发点的路线的充要条件是：

- (1) 图要是连通的(即任意两点可由图中的一些边连接起来)；
- (2) 与图中每一顶点相连的边必须是偶数条。

于是得出结论：七桥问题无解。

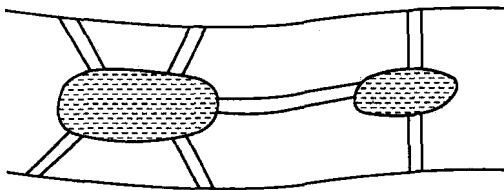


图 1.2 七桥问题示意图

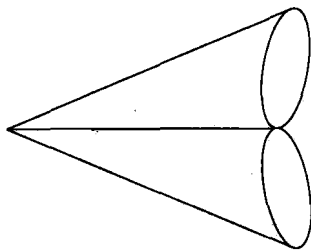


图 1.3 七桥问题的数学模型

1.1.2 数学建模的组建

数学建模是指用数学的理论和方法建立反映实际问题的数学模型，如何组建数学模型？这是数学模型课的核心。一般遵循的基本原则是：抓住问题的主要因素，忽略次要因素，建立粗糙模型，再根据实际问题不断去修正，完善，最后

达到尽可能接近现实原形.

抓住主要因素即抓住了反映问题变化规律最本质的东西,而忽略次要因素的作用是为问题的理解及模型求解、计算带来很大的方便. 这样,建立的模型基本能够反映问题的本质变化规律,又不会过分陷入复杂的附加次要因素分析中,可大幅度简化对问题的理解及解决. 如投掷铅球问题中,如果在整个铅球飞行过程中只考虑重力作用,而忽略空气阻力对投掷距离的影响,那么整个过程的数学模型很容易用牛顿第二定律表示为

$$\begin{cases} mx''=0 \\ my''=-mg \end{cases}$$

初始状态满足: $x(0)=0, y(0)=h, x'(0)=v_0 \cos\theta, y'(0)=v_0 \sin\theta$. 但如果考虑空气阻力,问题的理解似乎并不那么简单,比如:空气阻力和什么因素有关? 关系如何? 阻力对投掷距离的影响怎样? 如果考虑这些附加问题会对建立模型带来一定的困难.

那么,为什么还要再根据实际问题不断去修正、完善数学模型呢? 实际中,建立问题的模型不一定一次就能成功,不成功时自然需要根据实际问题对模型加以改进、调整,最终让模型接近现实原形,否则,建立不能反映实际状况的模型又有什么用呢? 然而,模型只能近似描述实际问题,不能苛求与真实事物完全吻合.

另外,在数学建模过程中,及个人能力培养上,还需要有意识地强化以下的潜在能力,以提高建模水平.

- (1) 体会数学的应用价值,培养数学的应用意识,强化“学以致用”的能力;
- (2) 通过知识应用,增强学习数学的兴趣,提高分析和解决问题的能力;
- (3) 从最原始的实际问题出发,了解数学知识的发生过程,培养数学创造能力.

1.1.3 数学建模的基本步骤

通常,在数学建模过程中本不需要遵循固定的步骤,只是在长期的建模工作中,为了使解决问题过程条理化,对建模初学者有个明确的指导方向,大体分了以下7个基本过程:

I 模型准备 本阶段需要了解问题的实际背景,明确建模的目的,然后搜集必需的各种信息,如数据、图像、参量值等,尽量弄清问题对象的特征,初步确定用哪一类数学方法,当然,为了不走弯路,对问题了解越充分,对建模工作越有帮助. 因此,精心做好本环节是建模工作的重点,不能忽视,碰到问题也可虚心向他人请教.

II 模型假设 为便于建立模型,根据对象的特征和建模的目的,对问题进

行必要的、合理的简化,简化常常用确切的假设形式给出,假设的合理性是建模型成败的关键,不同的简化假设会得到不同的模型. 假设作得不合理或过分简单,会导致模型失败或部分失败;假设作得过分详细,试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去,可能使你很难甚至无法继续下一步的工作. 通常,假设的依据是多方面的,如对问题内在规律的认识,对数据或现象的分析,也可根据实际问题涉及的生产或生活实际经验来确定模型假设. 基本原则是抓住主要因素,忽略次要因素.

III 建立模型 根据所作的假设分析对象的因果关系,利用对象的内在规律和适当的数学工具,构造各个量(常量和变量)之间的等式(或不等式)关系或其他数学结构,这种结构通常成为数学模型的主体. 本环节是将实际问题转化为理论的关键,对知识的要求较高,除需要一些相关学科的专门知识外,还常常需要较广阔的应用数学方面的知识,以开拓思路.

IV 模型求解 本环节对建立的模型可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和近代的数学方法,特别是计算机技术进行求解,确定模型所涉及关键参量的结果.

V 模型分析 对模型结果及算法进行理论上的分析,有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况,有时是根据所得结果给出相关预测,有时则可能要给出最优决策或控制,不论哪种情况还常常需要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等.

VI 模型检验 把理论分析的结果反馈到实际问题,并用实际的现象、数据与之比较,检验模型的合理性和适用性. 模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际,问题通常出在模型假设上,应修改、补充假设,重新建模,再检验新模型的合理性,以此类推,直至模型较真实地反映实际问题.

VII 模型应用 对于成功的模型,类比所用到的方法及实际问题的产生方式,进一步考虑模型是否可应用于其他有关领域,或求解方法是否可解决其他某些领域的计算难题等.

综合上述过程,建模的基本步骤用简明流程图表示,如图 1.4 所示.

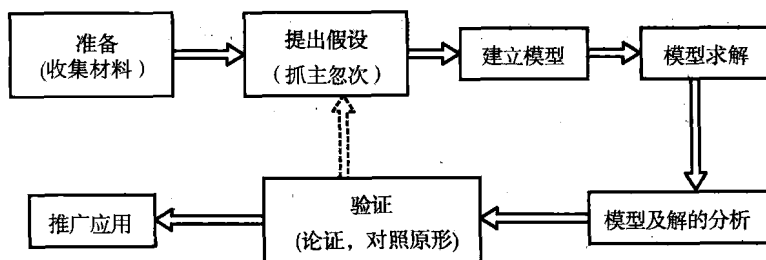


图 1.4 建模的一般步骤框图

应当指出,并不是所有建模过程都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明.建模时不应拘泥于形式上的按部就班.

1.2 传染病模型

实际问题 20世纪初,瘟疫经常在世界上的某些地区流行.被传染的人数与哪些因素有关系呢?如何预报某次传染病高潮的到来呢?为什么同一地区一种传染病每次流行时,被传染的人数大致相同?

思想和启发 问题是研究疾病的传播过程,也就是研究在一段时间内,健康人数和病人人数之间的数量变化问题.那么,在疾病传播中,病人的增加与哪些因素有关呢?自然想到,当健康人数越多时,疾病越容易传播,病人的增加就越多.试想,如果大家都是病人,疾病还如何传播呢?因此,我们提出下列假设:

问题假设

(1)某地区总人数为 n , t 时刻患病人数为 $I(t)$,健康人数为 $H(t)$,则 $n = H(t) + I(t)$, $I(0) = i_0$;

(2) t 时刻单位时间内每个患病者可传染的人数与健康人数成正比,比例系数为 $k(k > 0)$,称为传染系数).

建立模型 由上述两条假设,得到问题的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{I'(t)}{I(t)} = kH(t) \\ I(0) = i_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I'(t) = kH(t)I(t) \\ I(0) = i_0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

注意到 $n = H(t) + I(t)$,则得式(1.2.1)等价模型为

$$\begin{cases} I'(t) = kI(t)[n - I(t)] \\ I(0) = i_0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

求解与分析 采用分离变量法解微分方程模型(1.2.2),易得

$$I(t) = \frac{n}{1 - \left(1 - \frac{n}{i_0}\right)e^{-kt}} \quad (1.2.3)$$

式(1.2.3)中,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(t) \rightarrow n$. 此极限式说明:随着时间的流逝,该地区所有的人将都被传染处于生病状态.事实上,传染病人经过治疗,或者痊愈,因此具有免疫力;或者死亡.故随着时间无限延长,最终患病人数 $I(t)$ 应趋于零,即 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(t) \rightarrow 0$. 由此观之,模型(1.2.2)与实际情况不相吻合.

模型再假设 考虑到 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(t) \rightarrow 0$. 若设 t 时刻具有免疫力的人数(含

死亡人数)为 $R(t)$, 作如下假设:

$$(1) n = H(t) + I(t) + R(t);$$

$$(2) \frac{dI}{dt} \propto H(t);$$

(3) t 时刻单位时间内具有免疫力的人数 $R(t)$ 与病人人数 $I(t)$ 成正比, 比例系数为 $l(l > 0$, 称为恢复系数);

$$(4) H(0) = h_0, I(0) = i_0, \text{ 则 } h_0 + i_0 = n.$$

再建数学模型 由上述假设(1)~(4), 建立如下模型

$$\begin{cases} R'(t) = l \cdot I(t) \\ I'(t) = k \cdot H(t)I(t) - R'(t) \\ H'(t) = -I'(t) - R'(t) \\ I(0) = i_0, H(0) = h_0 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

将模型(1.2.4)化简整理后, 得如下模型

$$\begin{cases} I' = k \cdot HI - l \cdot I \\ H' = -k \cdot HI \\ I(0) = i_0, H(0) = h_0 \end{cases} \quad (1.2.5)$$

其中 $I = I(t), H = H(t), I' = \frac{dI}{dt}, H' = \frac{dH}{dt}$.

模型(1.2.5)是非线性非齐次微分方程组, 难以求出精确的解析解. 根据方程的特点, 先确定患病人数 $I(t)$ 和健康人数 $H(t)$ 之间的关系, 然后利用二者的关系来确定 $I(t)$.

将模型(1.2.5)中两个微分方程左右分别相除, 得

$$\begin{cases} \frac{dI}{dH} = \frac{\rho}{H} - 1 \\ I(h_0) = i_0 = n - h_0 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

其中 $\rho = \frac{l}{k}$, 称为特征指数, 对同一地区、同一传染病而言, ρ 是常数.

解式(1.2.6), 得

$$I = \rho \ln \frac{H}{h_0} - H + n \quad (1.2.7)$$

由式(1.2.6)可知, 当 $H = \rho$ 时, $\frac{dI}{dH} = 0$, 容易检验 $\left. \frac{dI}{dH} \right|_{\rho^-} > 0, \left. \frac{dI}{dH} \right|_{\rho^+} < 0$, 故当 $H = \rho$ 时, I 取极大值.

函数(1.2.7)过点 $P_0(h_0, i_0)$ 的图像如图 1.5 所示. 由于 $I(t) \geq 0$, 所以在

图 1.5 中只有 $I(t) \geq 0$ 的部分具有实际意义.

又 $I(t) \geq 0, H(t) \geq 0$, 由模型(1.2.5)第二式可知, 当时间 t 增大时, 健康人数 $H(t)$ 逐渐减少; 模型(1.2.5)第一式可化为: $I'(t) = kI(t)[H(t) - \rho]$, 于是由单调性分析知:

- (1) 当 $H(t) > \rho$ 时, $I'(t) \geq 0$, 这时 t 增大, $I(t)$ 增大;
- (2) 当 $H(t) = \rho$ 时, $I'(t) = 0$, 这时 $I(t)$ 可能取极值;
- (3) 当 $H(t) < \rho$ 时, $I'(t) \leq 0$, 这时 t 增大, $I(t)$ 减少, 且 $I(t) \geq 0$.

所以, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(t) \rightarrow 0$. 由 $I(t)$ 的上述 3 种变化情形, 可作出大致图形, 如图 1.6 所示. 因此, 当健康人数 $H(t) > \rho$ 时, 传染病才会蔓延, 使患病人数呈增加趋势, 而对同一地区同一传染病而言, ρ 是常数, 由此可确定 $H(t) = \rho$ 时的时间 t^* , 从而预测传染病在时刻 t^* 时达到高潮.

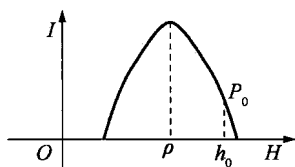


图 1.5 $I-H$ 示意图



图 1.6 $I(t)$ 曲线图

通常 $I(0) = i_0$ 很小, 可以认为 $H(0) \approx n$, 在总人数 n 不发生变化的情况下, 提高 ρ 值对限制传染病蔓延是有利的, 这是因为 ρ 值增大时, 健康人数 $H(t)$ 可以较快地减少到 ρ , 从而可以使传染病高潮到来的时间 t^* 缩小, 使传染病人数亦相应减少.

而提高 $\rho = \frac{l}{k}$ 值, 将意味着增大恢复系数 l , 或减小传染系数 k . 在实际中, 通常可以通过提高医疗水平和保健水平来达到增大恢复系数 l , 或采用隔离措施减小传染系数 k 都可以起到对传染病传播的控制. 因此模型(1.2.5)从上述角度衡量或检验是与实际相吻合的, 因而是成功的模型.

本例旨在说明建模的基本步骤, 若具备相应知识, 可详细阅读, 否则, 略过或浏览即可, 并不影响后面知识的学习.

1.3 数学建模的常用方法

现实的世界变化万千, 用一些固定的条条框框和套用现成的模式去解决所有问题是不可能的, 但在事物的变化过程中, 也有一些事物会存在许多的相似或相近的规律, 存在某些共同的本质东西, 因而也就会形成建模的一些常用方法.

1.3.1 理论分析法

理论分析法是指应用自然科学中已被证明是正确的理论、原理和定律,对被研究对象的有关因素进行分析、演绎、归纳,从而建立有关问题数学模型的方法. 理论分析法是一切科学研究中广泛使用的方法,在工艺比较成熟,对变化机理比较清楚时尤其适用.

下面通过实例来说明.

实际问题 (抛射体的运动)

真空中的抛射体以初速度 v_0 做抛射运动,试建立抛射体运动的数学模型,并预测运动规律:

- (1) 飞行曲线方程;
- (2) 落地时间;
- (3) 水平射程;
- (4) 飞行最大高度.

思路 and 启发 任何质点若受到一般力的作用,或者初速度与作用力方向不一致时,质点都将做曲线运动. 真空中的抛射体(忽略空气阻力)只受重力的作用,若初速度与重力方向不一致时,抛射物体将在重力的作用下做曲线运动. 解决运动与受力关系时,最熟悉、也是最有效的方法是牛顿第二定律,因此,在建模时,牛顿第二定律将是基本依据.

解题过程 为使问题明确化,作如下必要假设:

- [1] 抛射体可以看做是一质点,质量为 m ;
- [2] 初始速度 v_0 位于平面 xOy 内,且与水平方向成 θ 角,如图 1.7 所示.

建立模型 取如图 1.7 所示坐标系, $x(t)$ 表示 t 时刻抛射体的水平位移, $y(t)$ 表示 t 时刻抛射体的竖直位移. 由牛顿第二定律,可得抛射体运动的数学模型

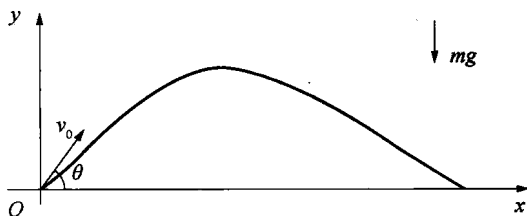


图 1.7 抛射体运动示意图

$$\begin{cases} mx''=0 \\ my''=-mg \end{cases} \quad (1.3.1)$$

初始条件为: $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos\theta$, $y'(0) = v_0 \sin\theta$. 解方程组 (1.3.1), 结合初始条件, 可得

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

由式(1.3.2)可预测抛射体运动的规律:

(1) 飞行曲线方程: 消去式(1.3.2)中的参数 t , 得

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \quad (1.3.3)$$

由于 $-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} < 0$, 所以由式(1.3.3)所确定的曲线是位于 xOy 面内, 通过坐标原点且开口向下的抛物线.

(2) 落地时间: 为了得到抛射体的落地时间, 在式(1.3.2)中令 $y(t) = 0$, 解出时间 t^* 为

$$t^* = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

则 t^* 为抛射体的落地时间.

(3) 水平射程: 当 $t = t^*$ 时, 水平射程为

$$x(t^*) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (1.3.4)$$

对式(1.3.4)关于 θ 微分, 可得当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 水平最远射程 $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

(4) 抛射体所能达到的最大高度: 令 $y'(t) = 0$, 得驻点 $t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$, 于是最大高度为

$$h_{\max} = y(t_m) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

模型分析 上述模型(1.3.2)是在做了一定简化的基础上得到的, 它近似地描述了抛射体的运动状况, 若要构造精确模型, 还应考虑抛射体所受的阻力和抛射体的大小. 其实, 重力加速度 g 也会随着地域的变化而变化, 但是如果一个模型要求太过于精确化, 会给建模带来一定的困难, 因此, 在实际建模工作中, 许多的模型都只能近似接近实际原形, 而不必苛求与实际问题完全吻合.