龙门品牌 学子至爱

龙门书局 1930-2010

状元笔记

教材详解

取状元学习之精华
架成功积累之天梯

高中数学

选修2-3(人教A版+北京师大版+江苏版)

丛书组编：龙门书局教育研究中心
学科主编：傅荣强
本册主编：傅荣强 张继忠 刘艳萍

龍門書局
www.longmenbooks.com

龙门品牌 学子至爱

龍門書局 1930-2010

状元笔记

教材详解

学科主编：傅荣强

本册主编：傅荣强　张继忠　刘艳萍

龍門書局

北　京

读者意见调查表

亲爱的读者朋友：

您好！为了更好地满足您的需求，请留下您的宝贵意见，并寄回编辑部，您将有机会免费获得龙门书局出版的其他图书。

1. 您认为本书：讲解得当（　　）　重难点突出（　　）　错误较多（　　）　错误较少（　　）
   题目陈旧（　　）　题目新颖（　　）　其他＿＿＿＿＿＿
2. 最喜欢本书中哪个栏目＿＿＿＿不喜欢本书中哪个栏目＿＿＿＿理由＿＿＿＿＿＿
3. 您对本书的意见和建议。＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
4. 您最喜欢的 3 本讲解类图书＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

邮寄地址：北京市东黄城根北街 16 号龙门编辑部　王美容（收）

邮　　编：100717　　**电　　话**：010－64034323　　**电子邮箱**：xiangjie99@126.com

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解：人教 A 版＋北京师大版＋江苏版课标本．高中数学．选修 2－3/龙门书局教育研究中心丛书组编；傅荣强学科主编；傅荣强，张继忠，刘艳萍本册主编．—北京：龙门书局，2010

ISBN 978-7-5088-1909-9

Ⅰ．状…　Ⅱ．①龙…　②傅…　③傅…　④张…　⑤刘…　Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134777 号

策划编辑：田　旭　刘　娜　责任编辑：刘　娜　赵瑞云　封面设计：耕者

龍　門　書　局出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

www.longmenbooks.com

明辉印装有限公司　印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2009 年 8 月第　一　版　　开本：890×1240　A5

2010 年 10 月修　订　版　　印张：7 1/2

2010 年 10 月第三次印刷　　字数：253 000

定　价：　15.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

目录

第一章 计数原理

第二章 随机变量及其分布（概率）

第三章 统计案例

知识点索引

第三章　统计案例

第一章　计数原理

章前概述

本章内容

计数，它就是对一类事物的量化. 儿时，计算自己拥有的东西，一个一个地去数；上了小学，量化一类事物，先学加法后学乘法，加法、乘法就是最简单的计数原理.

在我们的日常学习、工作、生活、生产和科学实践中，需要计数的问题太多太多了. 在本章的学习中，我们将对加法、乘法加以推广，把它们提升到原理的高度来认识，而后探究有顺序、无顺序问题的计数规律，直至用这些原理和规律解析$(a+b)^n$收尾.

高考目标

主题	考试内容	考试要求								
		知识与技能			过程与方法			情感、态度与价值观		
		了解	理解	掌握	经历	模仿	探索	认同	反应	领悟
计数原理	分类加法计数原理与分步乘法计数原理			√			√	√		
	排列与组合			√			√			√
	二项式定理			√			√			√

考情考法

这几年的高考中，对本章内容的考查，在全国卷、各省(市，自治区)卷上几乎都能见到考题，一般都是选择题或填空题，难度均处在中偏下水平.

1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

芝麻开门

分类计数、分步计数都不是陌生的事. 例如，某班有男生 24 人、女生 23 人，这个班共有 $24+23=47$(人)，这就是分类计数；又如，从 A 地去 B 地，乘火车去有 3 种方法，乘飞机去有 2 种方法，从 A 地去 B 地共有 $3+2=5$(种)方法，这还是分类计数. 再如，解一道数学题，需要经过从 P 到 Q 再从 Q 到 R 两个步骤来完成，从 P 到 Q、从 Q 到 R 分别有 2

种方法、3 种方法，解这道题的方法共有 $2\times3=6$(种)，这仍是分步计数.

本节我们以加法、乘法为起点，给出分类计数、分步计数的一般原理.

基础知识全解

★★★知识点一　分类加法计数原理

[掌握]　完成一件事有两类不同方案，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

〈点拨〉　在分类加法计数原理中，第 1 类方案与第 2 类方案之间彼此是相互独立的，互不影响；每一类方案中的若干种方法也是相互独立的.

【例 1】 (原创题)每接触一个新的知识点，都要认真地研读其中的条件、结论，并以实例来拟合知识点，这是一种较好的学习方法.

自命一题，并用分类加法计数原理给出解答.

思路分析：按个位上的数字是 2 或 4 分类.

规范解答：用 1,2,4 三个数字可以组成多少个没有重复数字的两位偶数？

用 1,2,4 组成两位偶数，个位上的数字必须是 2 或 4，如图 1-1-1 所示.

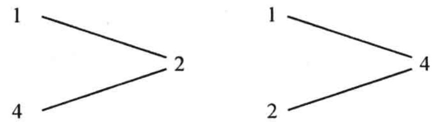


图 1-1-1

从图中可以看出，个位上的数字是 2 或 4 的两位偶数各有 2 个.

用 1,2,4 三个数字可以组成没有重复数字的两位偶数 $2+2=4$(个).

反思　使用分类加法计数原理计算完成某件事的方法数，第一步是对这件事按方案分类，第二步是确定各类的方法数，第三步是取和.本例就是这样做的，第一步，把两位偶数按个位上的数字分成两类；第二步，确定每一类的方法数；第三步，求和.

【变式 1】　图示分类加法计数原理.

规范解答：由 A 到 B 算完成一件事，直线型流程线表示第 1 类方案中包括的方法数，折线型流程线表示第 2 类方案中包括的方法数.

对分类加法计数原理的图示见图 1-1-2.

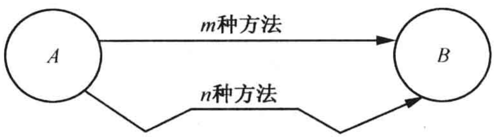


图 1-1-2

从图中可以看出，完成由 A 到 B 这件事，共有方法 $m+n$ 种.

反思 用分类加法计数原理计算完成某件事的方法数，“类”要一竿子到底，它的起点、终点就是完成这件事的开始与结束，图示分类加法计数原理，用意就在其中.

【变式 2】 给出下列函数：

①$y=x^3$；②$y=\ln x$；③$y=3^{-x}$；④$y=\sin x$；⑤$y=1$.

这些函数中，在各自的定义域内是增函数或是减函数的共有多少个？

规范解答：已知给出的 5 个函数中，在其定义域内是增函数的有①和②，小计 2 个；在其定义域内是减函数的有③，只有这 1 个.

已知给出的 5 个函数中，在各自的定义域内是增函数或是减函数的共有 $2+1=3$(个).

反思 从完成一件事的角度讲，本例中，找出增函数、找出减函数都算完成了这件事，共分两类，增函数一类，减函数一类.

要注意，$y=\sin x$ 与 $y=1$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，它们都不是单调函数.

★★★知识点二　分步乘法计数原理

[掌握]　完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

〈点拨〉　在分类乘法计数原理中，第 1 步、第 2 步都是必要的，缺一不可，这两步之间是连续的；每一步中的若干种方法是相互独立的，互不影响.

【例 2】 (原创题)画流程图描述分步乘法计数原理.

思路分析：描述分步乘法计数原理，要体现出完成一件事的两个步骤，在每一步中要体现出完成该步骤的方法数.

规范解答：设完成一件事的两个步骤为从 A 到 B、从 B 到 C.

用流程图描述分步乘法计数原理，见图 1-1-3.

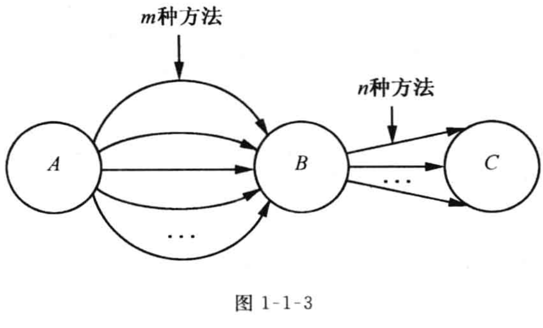


图 1-1-3

反思 本例中，从 A 到 C 算作完成一件事，A 是起点，C 是终点，点 B 是中间单元，从 A 到 B 是第 1 步，从 B 到 C 是第 2 步. 用分步乘法计数原理解题，按着这个模式施行就可以了，可简单地理解为：$A\to B$，有 m 种方法；$B\to C$，有 n 种方法；$A\to C$，有 mn 种方法.

【变式1】 数学试卷A中共有21道题,数学试卷B中共有22道题.

(1)从A卷或B卷中选1道题,共有多少种不同的选法?

(2)从A卷、B卷中各选1道题,共有多少种不同的选法?

规范解答:(1)从A卷中选1道题,有21种选法;从B卷中选1道题,有22种选法.

从A卷或B卷中选1道题,共有不同的选法$21+22=43$(种).

(2)从A卷、B卷中各选1道题,分两步来完成.第1步,从A卷中选1道题;第2步,从B卷中选1道题.

从A卷、B卷中各选1道题,共有不同的选法$21\times22=462$(种).

反思 第(1)小题是分类问题,类与类是独立的.第(2)小题是分步问题,步与步是连续的.用分类加法计数原理、分步乘法计数原理计数,必须确保类的独立、步的连续,离开了它们,就等于违背了客观规律.

【变式2】 用数字1,2,3,4组成两位数:

(1)允许数字重复,最多可组成多少个这样的两位数?

(2)不允许数字重复,最多可组成多少个这样的两位数?

(3)不允许数字重复,并且两位数必须是奇数,最多可组成多少个这样的两位数?

规范解答:(1)选个位上的数字,有4种方法;选十位上的数字,仍有4种方法.

最多可组成两位数$4\times4=16$(个).

(2)选个位上的数字,有4种方法;选十位上的数字时,还剩下3个数字了,有3种方法.

最多可组成两位数$4\times3=12$(个).

(3)选个位上的数字,从1或3中选,选中1时,十位上的数字要从2,3,4中产生,有3种方法,这种情况对应3种方法.同理,3作个位数字,也对应3种方法.

最多可组成两位数$3+3=6$(个).

反思 本例中,第(1)、(2)、(3)小题彼此是有联系的.第(1)小题的结果是16,第(2)小题在此基础上去掉了"11,22,33,44",所以结果为12,第(3)小题以第(2)小题的结果12为基础,奇数、偶数各占一半,所以结果为6.

模糊点·易错点·障碍点

本节的核心是探究计数.

前面我们就分两类、分两步讨论了计数原理.在实际问题中,分类只限于两类,分步仅限定两步,这远远满足不了需要,现将两个原理推广如下:

(1)分类加法计数原理

做一件事,完成它可以有n类办法,在第一类办法中有m_1种不同的方法,在第二类办法中有m_2种不同的方法,……,在第n类办法中有m_n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

(2)分步乘法计数原理

做一件事,完成它需要分成n个步骤,做第一步有m_1种不同的方法,做第二步有m_2种不同的方法,……,做第n步有m_n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种不同的方法.

继两个原理得到推广之后,讨论计数问题,我们就可以放开手脚了.这里借谈模糊

点、易错点、障碍点这个平台，再和大家谈一谈类与步的从属关系.

1.类中有步

用流程图描述计数问题，类中有步的情形见图 1-1-4.

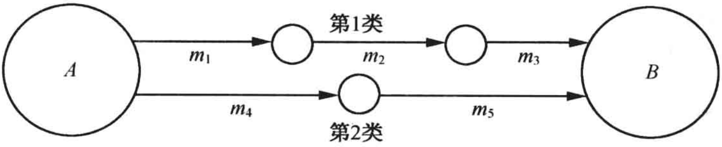


图 1-1-4

具体意义如下：

从 A 到 B 算作一件事的完成，完成这件事有两类办法，在第 1 类办法中有 3 步，在第 2 类办法中有 2 步，每步的方法数见箭线下面的 m_i，$i=1,2,3,4,5$.

完成这件事的方法数为

$$m_1m_2m_3+m_4m_5.$$

对"类"与"步"的理解，要再上一个层次，可进一步地理解为：

"类"用"+"号连结，"步"用"×"号连结，"类"独立，"步"连续，"类"标志一件事的完成，"步"缺一不可.

【例 1】 研发抗甲型 H1N1 病毒疫苗需要征集志愿者，先将疫苗注入志愿者体内，然后再将病毒注入志愿者体内，以此来鉴定疫苗的抗病毒能力. 某研发中心已征集了志愿者 37 人，其中，老年组 12 人、中年组 14 人、青年组 11 人. 该中心决定从这 37 人中选出 2 人进行疫苗检测，要求这 2 人不能出自同一组，共有多少种不同的选法？

分析与解答

分三类，每类分两步.

老年组选 1 人，中年组选 1 人，有选法 12×14 种；老年组选 1 人，青年组选 1 人，有选法 12×11 种；中年组选 1 人，青年组选 1 人，有选法 14×11 种.

共有不同的选法

$$12\times14+12\times11+14\times11=454(\text{种}).$$

反思 从类中有步这个角度讲，本例就是三类问题，每一类又是两步问题，用流程图加以描述，见图 1-1-5. 图中，上下看是类，左右看是步.

在计数原理这个阶段的学习中，善于使用流程图是件好事，它能帮助你分析问题、解决问题，期间思路清晰，层次分明，有助于拓展你的思维，丰富你的思想.

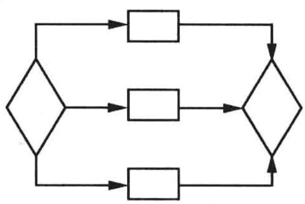


图 1-1-5

【例 2】 现有 5 幅不同的国画，2 幅不同的油画，7 幅不同的水彩画.

(1)从中任选 1 幅画布置房间，有几种不同的选法？

(2)从这些国画、油画、水彩画中各选 1 幅布置房间，有几种不同的选法？

(3)从这些画中选出 2 幅不同种类的画布置房间，有几种不同的选法？

分析与解答

(1)分为三类.

从国画中选，有 5 种不同的选法；从油画中选，有 2 种不同的选法；从水彩画中选，有 7 种不同的选法.

根据分类加法计数原理，共有 $5+2+7=14$(种)不同的选法.

(2)分为三步.

国画、油画、水彩画分别有 5 种、2 种、7 种不同的选法.

根据分步乘法计数原理，共有 $5\times2\times7=70$(种)不同的选法.

(3)分为三类.

第一类，1 幅选自国画，1 幅选自油画，有 $5\times2=10$(种)不同的选法.

第二类，1 幅选自国画，1 幅选自水彩画，有 $5\times7=35$(种)不同的选法.

第三类，1 幅选自油画，1 幅选自水彩画，有 $2\times7=14$(种)不同的选法.

综上，共有 $10+35+14=59$(种)不同的选法.

反思 从分类、分步的角度看本例，第(1)、(2)、(3)小题分别是分类问题、分步问题、类中有步问题. 学习计数原理，分类、分步是基础中的基础，不了解这些常识，你就学不下去了.

【例 3】 某旅行社有翻译人员 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语. 从中选出会英语和日语的各 1 人，有多少种不同的选法？

分析与解答

如图 1-1-6 所示，只会英语的有 6 人，只会日语的有 2 人，英语、日语都会的有 1 人.

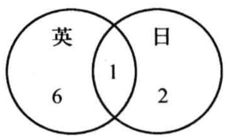


图 1-1-6

方法 1：按会英语的人分类.

第一类，只会英语的选 1 人，有 6 种选法，这时，会日语的人有 3 种选法，小计 $6\times3=18$(种)选法.

第二类，英语、日语都会的选 1 人，只有 1 种选法，这时，会日语的人有 2 种选法，小计 $1\times2=2$(种)选法.

共有不同的选法 $18+2=20$(种).

方法 2：按会日语的人分类.

第一类，选只会日语的人 1 人，此种情况有方法 $2\times7=14$(种).

第二类，选日语、英语都会的人 1 人，此种情况有方法 $1\times6=6$(种).

共有不同的选法 $14+6=20$(种).

反思 使用计数原理解题，大部分离不开分类. 分类时，要按一个标准来分，最忌采用双重或多重标准分类. 本例中，方法 1 是按会英语的人分类的，方法 2 是按会日语的人分类的，这两种分类都是在一个标准下施行的，这才符合常规.

【例 4】 用三个盒子装球，三个盒子中分别装有红、黄、蓝色的球 10、9、8 个. 从这三个盒子中取出 2 个不同颜色的球，共有多少种不同的取法？

分析与解答

分三类，每类分两步.

第 1 类，取红球 1 个，黄球 1 个，取法有 10×9 种；

第 2 类，取红球 1 个，蓝球 1 个，取法有 10×8 种；

第 3 类，取黄球 1 个，蓝球 1 个，取法有 9×8 种.

共有不同的取法

$$10\times9+10\times8+9\times8=242(\text{种}).$$

反思 很多数学题的数学本质是一样的，只是问题的实际背景有些差异. 例如，对本例来说，把"用三个盒子装球"改为"用三个皮包装钞票"，本质上讲，它们是一样的，道理就是换汤不换药.

学习数学，同一类题练上几例就可以了，不可过多纠缠.

【例 5】 现有高一四个班学生 34 人，其中一、二、三、四班分别 7 人、8 人、9 人、10 人，他们自愿组成数学课外小组. 推选 2 人作中心发言，这 2 人需来自不同的班级，有多少种不同的选法？

分析与解答

分六类，每类又分两步. 从一、二班学生中各选 1 人，有 7×8 种不同的选法；从一、三班学生中各选 1 人，有 7×9 种不同的选法；从一、四班学生中各选 1 人，有 7×10 种不同的选法；从二、三班学生中各选 1 人，有 8×9 种不同的选法；从二、四班学生中各选 1 人，有 8×10 种不同的选法；从三、四班学生中各选 1 人，有 9×10 种不同的选法.

共有不同的选法

$$N=7\times8+7\times9+7\times10+8\times9+8\times10+9\times10=431(\text{种}).$$

反思 图示分类，往往会收到好效果. 对本例中分类的图示，见图 1-1-7.

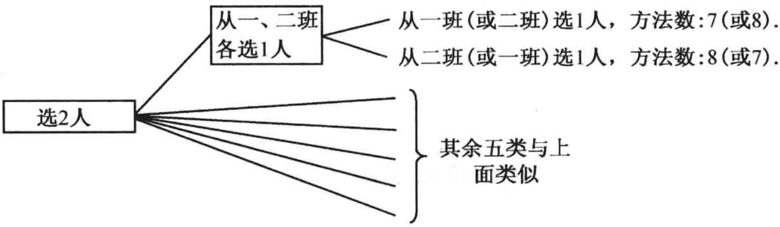


图 1-1-7

从图中看分类，结构非常清楚，也有助于找到解题思路，方法确实值得借鉴.

2. 步中有类

观察图 1-1-8，从计数的角度认识它，你有怎样的体会？

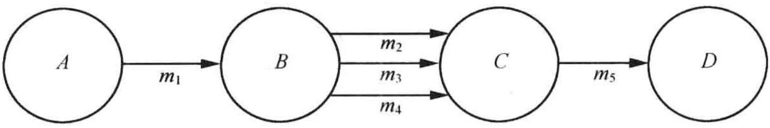


图 1-1-8

从计数的角度看，由 A 到 D 算作完成一件事，可简单地记为 $A \to D$.

完成 $A \to D$ 这件事，需要经历三步，即 $A \to B, B \to C, C \to D$. 其中 $B \to C$ 这步又分为三类，这就是步中有类.

箭线下面的 $m_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示相应步的方法数.

完成 $A \to D$ 这件事，共有方法(种)

$$m_1(m_2+m_3+m_4)m_5.$$

以上探究，实际上是给出了处理步中有类问题的一般方法.

【例 6】 远程旅游时，交通工具一般为火车、轮船和飞机. 某人拟从家乡 M_1 启程，途经 M_2、M_3 两地，最后到 M_4 地旅游. 从 M_1 到 M_2，交通工具只有火车，共有 3 个班次；从 M_2 到 M_3，交通工具有轮船和飞机两种，其中，轮船有 2 个班次，飞机有 4 个班次；从 M_3 到 M_4，交通工具只有飞机，共 3 个班次. 该人从 M_1 到 M_4，交通工具的选择共有多少种不同的方案？

分析与解答

画出流程图，见图 1-1-9.

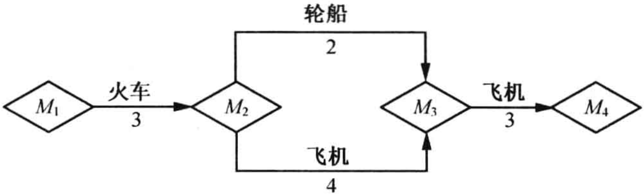


图 1-1-9

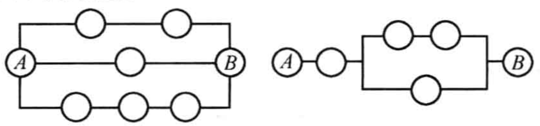
该人从 M_1 到 M_4，交通工具的选择共有不同的方案

$$3\times(2+4)\times3=54(\text{种}).$$

反思 从大的趋势看，本例是分步问题，即 $M_1 \to M_2 \to M_3 \to M_4$，共三步. 从细节上看，由 M_2 到 M_3 又是分类问题. 把两者结合起来看，本例就是步中有类问题.

方法能力探究

学习计数原理，分类、分步是关键环节，类与步的关系是辩证的，有些问题需要先分类后分步，有些问题需要先分步后分类，到底采用何种顺序分类、分步，要看类的趋势和步的趋势谁大谁小. 例如，图 1-1-10 是描述完成从 A 到 B 这件事的流程图，从图中可以看出，图(1)是先分类后分步问题，图(2)是先分步后分类问题，前者类的趋势大于步的趋势，后者步的趋势大于类的趋势.



(1) (2)

图 1-1-10

这里我们借谈方法、技巧、能力这个平台，再和大家谈一谈分类、分步的顺序问题.

1. 先分类后分步

【例 1】 某公司的内设机构划分为系列 1、系列 2，系列 1 包括 3 个部门，每个部门设置 5 个岗位；系列 2 包括 4 个部门，每个部门设置 6 个岗位.

(1)画流程图描述这家公司的岗位设置情况；

(2)在这家公司选择一个岗位，共有多少种不同的选择方案？

互动探究

学生 安排本例，目的、意义是什么？

状元 让你练习分类、分步.

分析与解答

(1)用 P 表示该公司的所有岗位，用 $Q_i(i=1,2)$ 表示系列，用 $R_j(j=1,2,\cdots,7)$ 表示部门，用 $S_k(k=1,2,\cdots,11)$ 表示岗位.

这家公司的岗位设置情况见图 1-1-11.

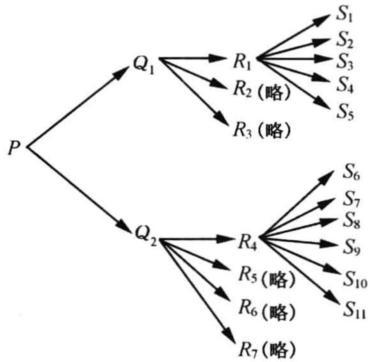


图 1-1-11

(2)在系列 1 中选岗位，有选择方案 $3\times5=15$(种)；在系列 2 中选岗位，有选择方案 $4\times6=24$(种).

共有不同的选择方案 $15+24=39$(种).

反思 本例中，系列 1、系列 2 可以看成类，从系列到部门、从部门到岗位都是步，这就是先分类后分步.

【例 2】 用 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的数.

(1)可组成多少个两位偶数？

(2)可组成多少个能被 5 整除的三位数？

互动探究

学生 从哪入手呀？

状元 要据偶数、能被 5 整除的数的特点先分类后分步.

分析与解答

(1)偶数的个位上的数字是偶数.

如图 1-1-12,分三类,即个位上的数字是 0,2,4;每类分两步,即选个位上的数字,选十位上的数字.

从 1～5 中选 1 个	0	从 1,3,4,5 中选 1 个	2	从 1,2,3,5 中选 1 个	4

图 1-1-12

可组成两位偶数

$$1\times5+1\times4+1\times4=13(\text{个}).$$

(2)分两类,即个位上的数字是 0 或 5;每类分三步,即选个位上的数字,选百位上的数字,选十位上的数字.

第一类,个位上的数字是 0,只有 1 种方法,百位上的数字从 1～5 中选 1 个,有 5 种方法,从剩下的 4 个数字中选 1 个作为十位上的数字,有 4 种方法.此种情况小计方法数为 $1\times5\times4=20$.

第二类,个位上的数字是 5,百位上的数字从 1～4 中产生,十位上的数字从剩下的 4 个数字中产生.此种情况小计方法数为 $1\times4\times4=16$.

可组成能被 5 整除的三位数

$$20+16=36(\text{个}).$$

反思 用数字组成数,0 是最敏感的数字,它不能作为首位数.第(1)小题中,0 不能作为十位上的数字;第(2)小题中,0 不能作为百位上的数字.你明白为什么先选个位次选百位再选十位了吗?

从分类、分步的角度讲,本例的两道小题都是先分类后分步问题.

【例 3】 从 1 到 200 的正整数中,各个数位上都不含有数字 8 的正整数有多少个?

互动探究

学生 怎样分类呀?

状元 分三类,即一位数、两位数、三位数.

分析与解答

分三类来解决这个问题.第一类:一位数中除 8 以外符合要求的数有 8 个;第二类:两位数中,十位数字除 0 和 8 以外有 8 种选法,个位数字除 8 以外有 9 种选法,所以两位数中有 $8\times9=72$(个)数符合要求;第三类:三位数中,百位数字为 1,十位数字和个位数字除 8 以外均有 9 种情形符合要求,所以百位数字为 1 的三位数中有 $9\times9=81$(个)数符合要求;另外,200 也是符合要求的数.

根据分类加法计数原理,从 1 到 200 的正整数中不含有数字 8 的有

$$N=8+72+81+1=162(\text{个}).$$

反思 使用计数原理计数时,对特殊元素要优先思考.本例中,8 就是特殊元素,0 也是特殊元素,8 的特殊性源于已知,0 的特殊性取决于它不能作为首位数字.