

理论力学习题解

· 第一册 ·

西南石油学院力学教研室编

序

本题解的习题选自哈尔滨工业大学、清华大学、西北工业大学、大连工学院、上海交通大学和天津大学理论力学教研室合编,王 铎教授主编的《理论力学习题集》(高教六四年京版)。例题选自下列六本《理论力学》教材:清华大学理论力学教研组编(人教六二年京版);徐芝纶、吴永祯合编(上海科学技术出版社六三年上海版);西北工业大学理论力学教研室编,季文美、吕茂烈主编(高教六四年修订京2版);郝桐生编(高教六五年京版);浙江大学力学教研组编(人教六一年京版)和陈维新主编(高教六四年京版)。

在编写过程中,我们对习题和例题作了少量技术性的修改,将在本题解“编后”中加以详细说明。

借本题解付印的时候,我们仅向王 铎教授主编的《理论力学习题集》的编者,向我们所选例题的各书的编者,致以深切的谢意。

本题解的成书,与南充报社印刷厂的同志们的大力支持和辛勤劳动是分不开的,借此机会我们一并表示感谢。

由于我们经验不足,水平有限,书中错误和疏漏之处,在所难免,诚恳地希望读者批评指正。

编者

一九八〇年六月

目 录

(一) 静力学	(1)
1. 汇交力系	
提要	(1)
例题	(2)
习题	(28)
2. 平面力系	
提要	(77)
例题	(79)
习题	(126)
3. 摩 擦	
提要	(185)
例题	(186)
习题	(205)
4. 空间力系	
提要	(238)
例题	(240)
习题	(257)
5. 重 心	
提要	(293)
例题	(295)
习题	(303)

(一) 静 力 学

1、汇 交 力 系

提要:

1. 汇交力系的合成。

(1) 几何法 (图解法):

应用力三角形或力多边形法则。合力的作用点就是力系的汇交点; 合力的大小和方向按一定比例尺, 由力三角形或力多边形的封闭边 (第一力矢的始点至最末一力矢的终点的连线) 决定。

$$(2) \text{ 解析法: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2}$$

$$\cos \angle (R, x) = \frac{\sum X}{R}, \quad \cos \angle (R, y) = \frac{\sum Y}{R},$$

$$\cos \angle (R, z) = \frac{\sum Z}{R}.$$

2. 物体在汇交力系作用下的平衡条件。

(1) 平面汇交力系。

几何条件: 力多边形首尾相接, 自行封闭。

解析条件: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$ 。

(2) 空间汇交力系。

几何条件: 力多边形首尾相接, 自行封闭。

解析条件: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum Z = 0$ 。

3. 汇交力系作用下物体的平衡问题, 通常的解题步骤。

(1) 适当地选取平衡物体(研究对象),一般该物体应受有已知力和要求的未知力作用。

(2) 分析研究对象的受力情况,作受力图。

在分析物体受力情况时,按约束的性质画出约束反力。如存在二力构件时,要注意二力构件之力的作用线应沿此二力作用点的连线。在同一平面的三个力作用下的构件中,如已知其中两个力的用线的交点,则第三力的作用线必通过此点(三力平衡汇交定理),通常可由此决定第三个力的作用线。在取两个以上研究对象时,应注意连结点的作用力须满足作用反作用公理。

(3) 根据汇交力系的平衡条件,求出未知量。

图解法:画出力多边形,由其首尾相接条件,定未知力的方向。其大小可从图中量出。为此必须注意作图的精度及比例尺的选定。

解析法:首先要选取适当的坐标系(通常以一坐标轴与某一未知力重合为最好),注意力在坐标轴上投影的符号及数值。然后列出平衡方程式求解。对于未知力的指向,可以先假设,然后从解的正负号来定其正确与否。正号表示此力的实际方向与假设相同,负号表示此力的实际方向与假设相反。

例题:

1—1 用解析法求作用于刚体上某点O的四个力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 的合力。已知 $F_1=20\text{kg}$, $F_2=30\text{kg}$, $F_3=10\text{kg}$, $F_4=25\text{kg}$, 各力的方向如图示。

解 先求各力在x轴及y轴上的投影

$$X_1 = 20 \cos 30^\circ = 17.3,$$

$$X_2 = -30 \cos 60^\circ = -15,$$

$$X_3 = 10 \cos 45^\circ = -7.07,$$

$$X_4 = 25 \cos 45^\circ = 17.7;$$

$$Y_1 = 20 \sin 30^\circ = 10,$$

$$Y_2 = 30 \sin 60^\circ = 26,$$

$$Y_3 = -10 \sin 45^\circ = -7.07,$$

$$Y_4 = -25 \sin 45^\circ = -17.7. \text{合力在x轴及y轴上的投影为}$$

$$R_x = \sum X = 12.9, R_y = \sum Y = 11.2.$$

由此求出合力的大小为

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 17.1 \text{ kg},$$

合力与x轴正向间的夹角为

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 41^\circ.$$

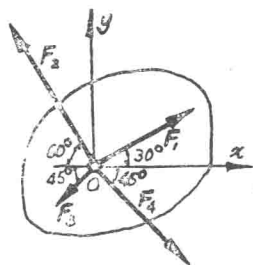
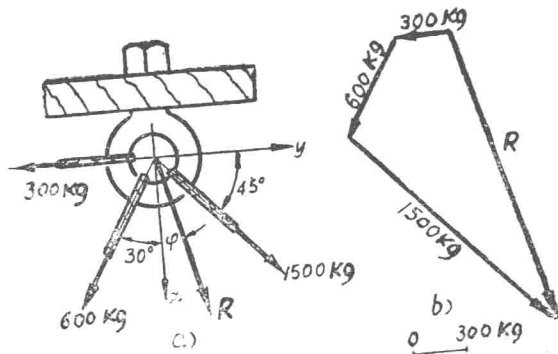


图1—2

1—2 在螺栓的环眼上套有三根软索，它们的位置和受力情况如图示，试用图解法和解析法求螺栓所受合力的大小和方向。



解 (1) 图解法

凡用图解法解题时, 先须定出力的比例尺, 本题中, 定1单位长度=300kg。然后按所定比例尺绘出力多边形(图b)由图量得合力R的长度为5.5单位, 即得

$$R = 5.5 \times 300 = 1650 \text{ (kg)};$$

设以合力的作用线和x轴的正向所成的夹角 φ 表示合力的方向, 由图(a)量得 $\varphi = 16^\circ 10'$

(2) 解析法

合力R在x、y轴上的投影分别为:

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma X = 1500 \sin 45^\circ + 600 \cos 30^\circ = 1060 + 520 \\ &= 1580 \text{ (kg)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \Sigma Y = 1500 \cos 45^\circ - 600 \cos 60^\circ - 300 = 1060 - \\ &300 - 300 = 460 \text{ (kg)}. \end{aligned}$$

合力的大小为

$$R = \sqrt{1580^2 + 460^2} = 1646 \text{ (kg)};$$

合力与x轴正向间所成的夹角 φ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{460}{1580} = 0.2911, \text{ 或 } \varphi = 16^\circ 14'.$$

1—3 设有四个力 F_1, F_2, F_3, F_4 作用于O点, 方向如图所示。已知 $F_1 = 10\text{kg}$, $F_2 = 10\text{kg}$, $F_3 = 15\text{kg}$, $F_4 = 20\text{kg}$ 。试求合力的大小及方向。

解 $X_1 = 10.00(\text{kg})$

$$\begin{aligned} X_2 &= 10 \cos 50^\circ \\ &= 6.43 \text{ (kg)}, \end{aligned}$$

$$X_3 = 15 \cos 120^\circ$$

$$= -7.50(\text{kg}), \quad F_4$$

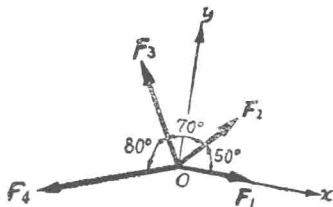


图1—3

$$X_4 = 20 \cos 200^\circ = -18.79 \text{ (kg)},$$

$$X = \sum X = -9.86 \text{ (kg)};$$

$$Y_1 = 0.00 \text{ (kg)},$$

$$Y_2 = 10 \sin 50 = 7.66 \text{ (kg)},$$

$$Y_3 = 15 \sin 120^\circ = 12.99 \text{ (kg)},$$

$$Y_4 = 20 \sin 200^\circ = -6.84 \text{ (kg)},$$

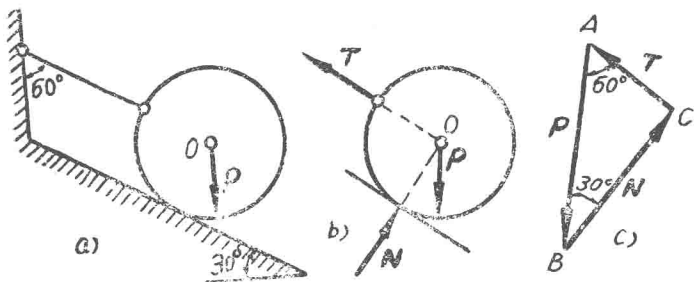
$$Y = \sum Y = 13.81 \text{ (kg)}$$

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 16.79 \text{ kg}.$$

合力 R 与 x 轴所成的角为

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{Y}{X} = \tan^{-1} \left(-\frac{13.81}{9.86} \right) = 125^\circ 30'.$$

1—4 重 $P=20\text{kg}$ 的球置于光滑斜面上，并用无重软绳系在铅直墙面上。已知斜面与水平线成 30° 角，绳与铅直墙面成 60° 角，求绳的拉力及斜面对球的约束反力。



解 取球为研究对象，作球的受力图。作用于球上的力有：重力 P 铅直向下，绳的拉力 T 沿绳的中心线，光滑斜面的约束反力 N 垂直于斜面。这三个力的作用线都通过球的中心，因而构成平面汇交力系。因为球处于平衡状态中，故这三个力所构成的力三角形应自行封闭。

选适当的比例尺，自任意点A作矢量 $\overline{AB}$ ，使其大小等于 20kg ，其方向铅直向下。再通过A、B两点作平行于力 $\overline{T}$ 和 $\overline{N}$ 的两条直线，这两条直线相交于C点，于是得到力三角形ABC。矢量 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CA}$ 即为所求的反力 $\overline{N}$ 和 $\overline{T}$ ，按所选比例尺量得：

$$T = CA = 10\text{kg},$$

$$N = BC = 17.3\text{kg}.$$

在此情形下，此两力亦可用三角公式计算出：

$$T = 20\sin 30^\circ = 10(\text{kg}),$$

$$N = 20\cos 30^\circ = 17.3(\text{kg}).$$

1-5 绳索AB跨过一个圆的滑轮C。设轮轴O通过滑轮轴中心且是光滑的，绳索及滑轮的重力可以不计，试证滑轮两边的绳索拉力大小相等。

解 命滑轮在轮轴O处所受的力为 $\overline{R}$ ，则滑轮及绳索系在三个力的作用下成平衡： $\overline{R}$ 及滑轮两边绳索的拉力 $\overline{T}_1$ 与 $\overline{T}_2$ 。所以这三个力必汇交于

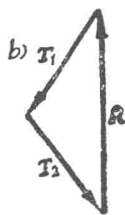
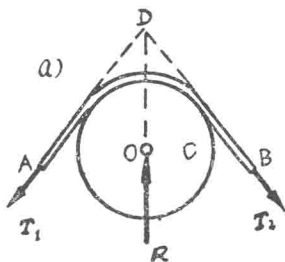


图1-5

一点。拉力 $\overline{T}_1$ 与 $\overline{T}_2$ 的交点即轮边圆周两切线的交点是D，所以力 $\overline{R}$ 必沿OD作用，且与 $\overline{T}_1$ 及 $\overline{T}_2$ 成相等的角。因此，这三个力所成的力多边形是一个等腰三角形，如图b)，而代表 $\overline{T}_1$ 与 $\overline{T}_2$ 的两边应该长度相等，即 $T_1 = T_2$ 。

1-6 试求球A在平衡时给予斜面的压力，以及绳子EH段

对铅直线的偏角。已知球A重为 $P=38\text{kg}$ ，物块B重为 $Q=20\text{kg}$ ，斜面与水平面的仰角 $\alpha=30^\circ$ 。

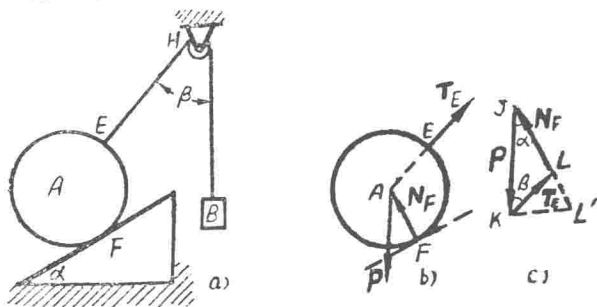


图1—6

解 球A在平衡时受汇交于球心的三个力作用，其受力图如图b)所示。未知量有斜面反力 N 的大小与绳子拉力 T_E 的方向（亦即绳子EH段对铅直线的偏角 β ）。已知后一力的大小等于物块B的重量，即 $T_E=Q$ 。

按比例画出闭合的力三角形。先画已知力 $\vec{P}=\overline{Jk}$ ，然后从点J引出平行于力 N 的直线，并以点K为心、力 T_E 之值 Q 为半径取圆弧。以L代表此直线与圆弧的交点，则三角形JKL就是所求的闭合力三角形。

由正弦定理有

$$\frac{P}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{N_F}{\sin \beta} = \frac{T_E}{\sin \alpha}$$

从而求得

$$\sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \frac{P \sin \alpha}{T_E} = \frac{38 \times 0.5}{20} = 0.95,$$

$$\beta = 41^\circ 48';$$

$$N = \frac{P \sin \beta}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{38 \times 0.6665}{0.95}$$

$$=26.7(\text{kg});$$

球A给予斜面的压力与反力 N 大小相等而方向相反。

(注意) 本例尚有另一解 $\beta=78^{\circ}12'$ (对应于力三角形上点 L')， $N_F=39.2\text{kg}$ 。

1-7 绞车由带有掣子的棘轮与固结在一起的鼓轮所构成。鼓轮上绕有绳子并悬挂重物如图示。已知 $Q=50\text{kg}$ ， $d_1=42\text{cm}$ ， $d_2=24\text{cm}$ ， $a=12\text{cm}$ ， $h=5\text{cm}$ ，求掣子及轴承所受的壓力。

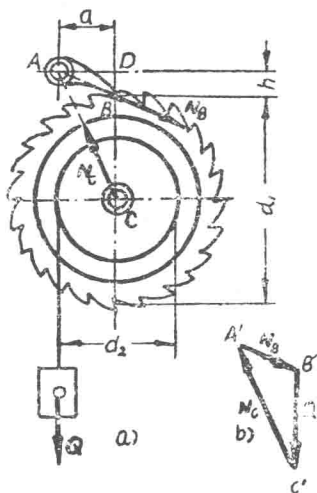


图1-7

解 取整个棘轮系统为研究对象。作用于系统上的力计有：重物的重力 Q ，轴承的反力 N_C 和掣子的反力 N_B 。因为不计掣子的自重，故知作用于掣子上的两个力都沿 AB 线。再根据作用与反作用公理得知，掣子作用于棘轮上的力与棘轮作用于掣子上的力大小相等、方向相反且在同一作用线上。

由图a)可知棘轮系统在汇交力系的作用下处于平衡。

作力三角形 $A'B'C'$ 。从图b)可知此力三角形恰与三角形 ABC 相似。根据相似三角形的关系得：

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{Q}{BC}$$

另一方面由三角形 ABD 求出

$$AC = \sqrt{(AD)^2 + (DC)^2} = \sqrt{12^2 + 26^2} \\ = 28.6 \text{ (cm)}。$$

将 AB 和 AC 的数值代入上式，则得

$$N_B = A'B' = AB \times \frac{Q}{BC} = 31 \text{ kg,}$$

$$N_C = A'C' = AC \times \frac{Q}{BC} = 68 \text{ kg.}$$

1-8 图示为汽车制动机构的一部分。司机脚踏制动蹬的力 $P=21.2\text{kg}$ ，方向与水平成 $\alpha=45^\circ$ 角。平衡时， DA 为铅直， BC 为水平，试求拉杆 BC 所受力。已知 $DA=30\text{cm}$ ， $DE=6\text{cm}$ （点 E 在铅直线 DA 上），又 B ， C ， D 均为光滑铰链。

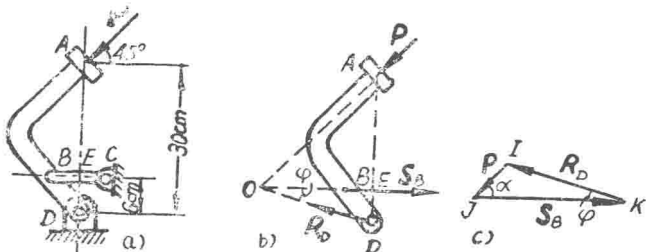


图1-8

解 取制动蹬为研究对象，并画出受力图b)。它在已知力 P 、水平拉杆的约束反力 S_B 以及轴 D 的反作用力 R_D 三个

力作用下处于平衡：

力 S_B 的方向沿着拉杆BC两端铰链中心的连线。轴D的反力 R_D 的方向根据三力平衡汇交定理来确定，此力作用线必须通过力 P 与 S 的交点 O 。至于力 S_B 与 R_D 的指向，暂时为未知，须待画出力三角形后，才能确定。

此后，作出力系 P, S_B, R 的闭合力三角形图c)。

由几何关系，有 $OE=EA=24\text{cm}$ ， $ED=6\text{cm}$ ，

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ED}{OE} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}; \text{ 故}$$

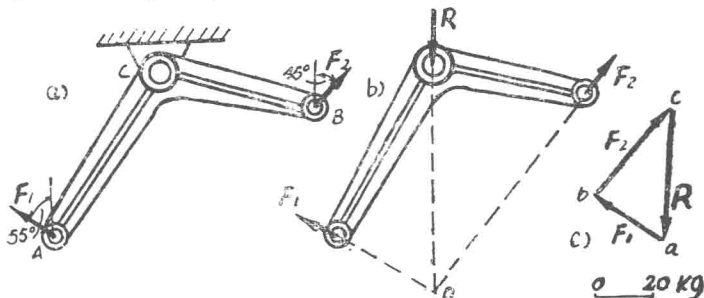
$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{4} = 14^\circ 2'.$$

由力三角形可得

$$S_B = \frac{\sin(\pi - \alpha - \varphi)}{\sin \varphi} P,$$

代入 α, φ 与 P 的值，求得拉杆受力 $S_B = 74.9\text{kg}$ 。这力的指向可以从力三角形上看出是自左向右，亦即杆BC有反抗制动蹼将它拉向左边的趋势。故杆BC本身承受拉力。

1-9 传动曲杆的点C成铰链支承，如图a)示，作用于A端的力 $F_1 = 30\text{kg}$ ，它和铅垂线所成的夹角为 55° ，欲令曲杆处于平衡状态，试用图解法求作用于B端的和铅垂线成 45° 角的力 F_2 的大小及点C铰链的反力 R 。



解 取曲杆为分离体，作用于该杆有 F_1 、 F_2 和 R 三个力，其中力 F_1 的大小和方向、力 F_2 的方向均已预给，根据三力平衡定理，反力 R 的作用线必须通过铰点 C 和 F_1 、 F_2 两力的作用线交点 O ，由此可作出曲杆的受力图 b)。

作力三角形时设力的比例尺为1单位长度=20kg，先画 F_1 的力矢，再画 F_2 和 R 的力矢，使力三角形闭合，如图 c)由图量得

$$bc=2.1\text{单位}, ca=2.4\text{单位},$$

即得

$$F_2=2.1 \times 20=42(\text{kg}),$$

$$R=2.4 \times 20=48(\text{kg}).$$

1-10 单斜屋梁由梁木 AB 构成，如图 a)其上端 B 自由地搁在光滑支座上，又以下端 A 固定在墙上。屋顶斜度为 $\tan \alpha = 0.5$ 。 AB 梁中部承受铅垂载荷 $Q=900\text{kg}$ 。求在 A 点和 B 点处的支座反力。（ AB 梁自重不计）

解 梁木 AB 受到三个力作用：作用在中点 C 的载荷 Q 及作用在 A 、 B 两点的支座反力 N_A 、 N_B 。由于支座 B 是光滑的，因此 N_B 的方向应垂直于 AB ，至于 N_A 的方向不能事先确定。根据三力平衡的必要条件，将 Q 及 N_B 的作用线延长，

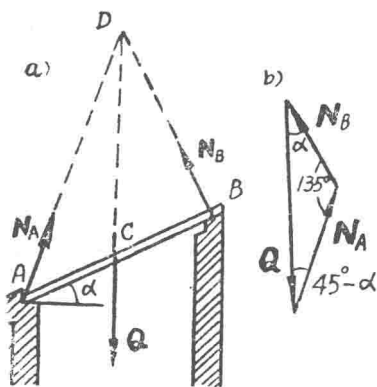


图1-10

得交点 D ，则 N_A 的作用线必过 D 点，由此决定了 N_A 的方

向。

为了确定 N_A 、 N_B 的大小，就可应用汇交力系的平衡条件：力 Q 、 N_A 、 N_B 所组成之力三角形必须封闭。为此，首先选定比例尺，以1厘米代表300公斤，然后将大小方向均为已知的力 Q 按比例先画出如图b)，从向量 Q 的起点和终点分别作线段平行于 N_B 及 N_A ，由此就得到封闭的力三角形。 N_A 与 N_B 的指向应符合首尾相连的次序。从图上用同一比例尺量出 $N_A=570\text{kg}$ 。 $N_B=402\text{kg}$ 。

除了上述的图解法以外，还可利用几何法解同一问题，首先从三力汇交于一点的几何条件去求力三角形的各内角。为此，从图a) 中可知 $\angle BDC=\alpha$ ，因此 $\frac{BC}{BD}=0.5$ ，于是

$\frac{AB}{BD}=\frac{2BC}{BD}=1$ ，由此可知 $\angle BDA=\angle BAD=45^\circ$ ，这样就很容易确定力三角形的内角如图b) 所示。

在这个力三角形中，已知内角及一边，欲求其它两边可用正弦定律：

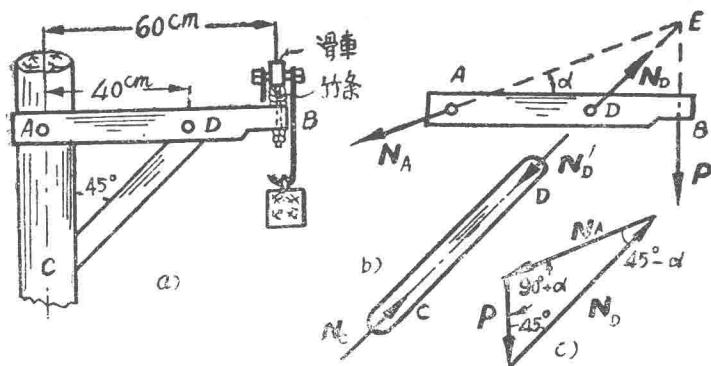
$$\frac{N_A}{\sin\alpha}=\frac{N_B}{\sin(45^\circ-\alpha)}=\frac{Q}{\sin 135^\circ}$$

$$\text{由此可得： } N_A=\frac{\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}Q=570\text{kg},$$

$$N_B=\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin 135^\circ}Q=402\text{kg}.$$

与图解法结果完全相同。

1-11 竹条架空索道的支架如图a) 所示，横梁AB与立柱间用螺栓连结，在二者之间又连以斜撑木CD，也用螺栓连结，尺寸如图示。横梁端部承受载荷 $P=100\text{kg}$ 。设横梁及斜撑木的自重皆略去不计，求螺栓A及D处的反力。



解 首先研究横梁AB的受力状态，作出横梁的分离体图。横梁受到三个力：已知力 P 及A、D处的反力。螺栓的约束性质是和圆柱形铰链类似的，当摩擦略去不计时，可以断定螺栓A、D处的约束反力应通过螺栓中心，但可以有任何方向及大小。这样一来，由于 N_A 及 N_D 的方向不确定就使得问题的解决遇到了困难。因为，尽管我们可以应用三力汇交于一点的条件，但是它们可以在 P 的作用线上任何一点相交。这样看来，问题的解似乎是不确定的。

那末，问题何在呢？原来我们只是孤立地研究了横梁的平衡，而没有从周围物体和它的相互作用来进行研究。我们必须研究和横梁有相互联系的周围物体的平衡。在本题中，主要是研究斜撑木CD的平衡。作出斜撑木CD的分离体图。它只是在C、D两处受到约束反力 N_C 和 N_D' 作用，根据二力平衡公理可知它们必须沿CD线作用，反向相等，或者说斜撑木是一个二力构件。

现在再反过来研究横梁的平衡，由于 N_D 和 N_D' 是两物体间的作用与反作用力，因此 N_D 的作用线也必须沿CD方向，

这样一来，就确定了 N_D 的作用线。然后，找到 N 和 P 的作用线交点 E 。根据三力平衡汇交定理，将 AE 连结起来，就确定了 N_A 的作用线，见图b)。

为了确定 N_A 及 N_D 的大小，只需根据这三个力的方向画出封闭的力三角形就行了，设 N_A 与水平线的夹角为 α 。根据支架的尺寸不难求得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ，而力三角形的各内角就可确定如图c)所示。应用正弦定律，可以建立以下关系：

$$\frac{N_A}{\sin 45^\circ} = \frac{N_D}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{P}{\sin(45^\circ - \alpha)}$$

$$\text{由此可得： } N_A = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)} P = 158 \text{ kg,}$$

$$N_D = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha)} P = 212 \text{ kg.}$$

1-12 索式挖土机简图如图a)所示。支杆AB由缆索BC支持，土斗D的悬挂位置可借钢丝绳AD和跨过滑轮的钢丝绳DBE决定，如土斗其中

土的总重 $P = 10 \text{ t}$ ，当此系统平衡时求支杆AB中的轴力和缆索BC中的拉力已知 $\alpha = 30^\circ$ ， $\beta = 10^\circ$ 、 $\gamma = 18^\circ$ ， $\delta = 17^\circ$ 、 $\epsilon = 7^\circ$ ，不计支杆本身的重量。

解 首先取土斗D的悬挂点为研究对象，作用于土

