

CHENG REN

SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

上海教育出版社

成人中等学校高中课本

数学

上册

新版

SHUXUE

ZHONGDENG
XUEXI
GAOZHONG

前 言

成人高中教育是成人学历教育中非常重要的一部分,是成人高等教育赖以发展的基础。长期来,成人高中教育为提高从业人员接受高中阶段教育的比例,提高公民的文化素质,发挥了积极、有效的作用。

随着改革开放的深入,基础教育取得了辉煌的成绩,基本普及九年义务教育和基本扫除青壮年文盲的“双基”目标已初步实现。2001年召开的全国和上海的“基础教育工作会议”,都提出了在大中城市和经济发达地区普及高中阶段教育的要求,并提出了要“优化课程结构,调整课程门类,更新课程内容”。因此,成人高中教育理应结合教育实际,积极开展课程教材的改革,删减那些重复、陈旧和过繁、过深的教学内容,补充结合社会、生活实际和现代科技发展的最新知识,改变教材脱离实际,远离生活的状况。

面对上述形势,我教材编写组组织编写力量,对1996年版的成人高中教材进行了全面修订。修订的依据是:按照原国家教委颁布的成人高中各学科教学大纲,同时参考上海最新研制的普通高中的课程标准,并尽量与全国成人高考复习大纲衔接。在修订和编写过程中,我们努力按照成人高中文化基础培养目标的要求,贯彻思想性、科学性与先进性相结合的原则。同时,在体例安排、教学提示、练习设计等方面力求体现成人教学的特点,便于学员自学,利于促进教法改革。为加强基础知识的学习和基本能力的培养,同时还编写、出版了与课本配套的练习册,以供教学使用。

数学教材的内容贯彻少而精的原则,精选那些学员从事生产实践和进一步学习现代科学技术所必需并已逐步普及的数学基础知识、基本技能和基本方法。本教材的内容贯彻理论联系实际的原则,精简繁复的数学运算要求,增加了电子计算器的工具使用,适当渗透现代数学思想。对学员普遍感到难以接受、理解的知识,采取局部调整教学内容结构,增加直观载体等方法,帮助学员理解抽象的数学知识。本教材内容分必学和选学(打“※”号部分或打“*”号的例题、习题)两部分,在教学中可以有一定的弹性。

本教材在例题、习题配置方面,尽量注意培养成人学员在理解基础上分析问题和解决问题的能力。

成人高中数学教材由康士凯主编,由康士凯、竺志平、汪祖亨、李兆民、耿嘉元、唐群、盛洁、蒙春养等同志编写。全书由上海市教育委员会教学研究室审定,主审:王厥轩、林德芳。

在修订和编写过程中,得到了教育部职成教育司、上海市教育委员会有关领导的热情关心和指导;并先后听取了兄弟省市教育部门的领导和有关教学、教研人员对这套教材中肯的意见。在此谨表谢忱。

限于编写水平,不妥之处在所难免。衷心欢迎广大教师、学员和各方面专家学者批评指正。



NLIC2970060814

市成人中等学校高中教材编写组

2002年5月

目 录

第一章	集合、不等关系与命题	1
一	集 合	1
二	不等关系	8
三	命题与充要条件	21
第二章	函数及其应用	31
一	函 数	31
二	指数和对数	42
三	幂函数、指数函数和对数函数	56
第三章	三角函数	79
一	角的概念的推广和角的度量	79
二	任意角的三角函数	84
三	三角函数的图象和性质	100
四	解斜三角形	110
五	两角和、两角差的三角函数	118
※六	反三角函数和简单三角方程	131
第四章	空间图形	151
一	平 面	151
二	空间两条直线	157
三	空间直线和平面	159
四	空间两个平面	166
五	多面体	174
六	旋转体	188

第一章 集合、不等关系与命题

一 集 合

1.1 集合

1. 集合的概念

在现实生活和数学中,我们常常需要把一些对象放在一起,作为一个整体来研究.

我们先考察下面几组对象:

- (1) 1、2、3、4;
- (2) 在平面内,与一条线段两个端点的距离相等的所有的点;
- (3) 某台电脑 C 盘中所有的文件名;
- (4) 一个班级所有的学员;
- (5) 华东行政区的六个省与一个直辖市.

它们分别是由四个数、平面内这条线段的垂直平分线上点的全体、这台电脑 C 盘中所有的文件名、这个班级所有的学员、华东行政区的所有省与直辖市所组成的.像这样把某些确定的对象看作一个整体,这个整体叫做一个集合,简称集.上述所列举的每一组对象的全体都分别组成一个集合.集合中的各个对象叫做这个集合的元素.例如,第(1)组是由对象数 1、2、3、4 所组成的一个集合,其中 1、2、3、4 都是这个集合的元素. $a \in A$

我们通常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A ;如果 a 不是集合 A 的元素,就记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A .例如,如果用 A 来表示由数 1、2、3、4 组成的集合,由于 1、2、3、4 都是这个集合的元素,所以可以记作 $1 \in A, 2 \in A, 3 \in A, 4 \in A$.而其他的一些数,如 5、9 等都不是集合 A 的元素,可以记作 $5 \notin A, 9 \notin A$.

通常,对一些常用的数的集合,我们用如下特定的大写英文字母来表示.

全体自然数所组成的集合简称自然数集*,用 N 表示;

全体整数所组成的集合简称整数集,用 Z 表示;

全体有理数所组成的集合简称有理数集,用 Q 表示;

全体实数所组成的集合简称实数集,用 R 表示.

对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的.这就是说,哪些对象是它的元素,哪些对象不是它的元素,可以明确地作出判断.例如,对于整数集 Z ,任何一个整数都是它的元素,任何一个非整数都不是它的元素,因此 $-3 \in Z, 2 \in Z$;而 $-\frac{1}{2} \notin Z, \sqrt{3} \notin Z$.

对于一个给定的集合,集合中的元素各不相同.这就是说,集合中的任何两个元素都是

* 最新全日制高中课本已把全体非负整数所组成的集合简称非负整数集(或自然数集),记作 N ,并把其中的正整数集表示成 N^* 或 N_+ . 根据成人高中教育大纲,本课本仍沿用原来的约定.

不同的对象,因此集合中的元素不重复出现.

例 1 用适当的符号表示下列各题中数与数集之间的关系:

(1) $a = |-3|$, a 与 $\mathbf{N}$; $a \in \mathbf{N}$

(2) $b = -3^{-1}$, b 与 $\mathbf{Z}$; $b \notin \mathbf{Z}$

(3) $c = \sqrt{\frac{2}{9}}$, c 与 $\mathbf{Q}$; $c \notin \mathbf{Q}$

(4) $d = -\sqrt{\frac{4}{25}}$, d 与 $\mathbf{Q}$; $d \in \mathbf{Q}$

解 (1) $\because a = |-3| = 3, \therefore a \in \mathbf{N}$. (2) $\because b = -3^{-1} = -\frac{1}{3}, \therefore b \notin \mathbf{Z}$.

(3) $\because c = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \therefore c \notin \mathbf{Q}$. (4) $\because d = -\sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{2}{5}, \therefore d \in \mathbf{Q}$.

通常,我们把含有有限个元素的集合叫做有限集,如本节开头列举的(1)、(3)、(4)、(5)这四组对象所组成的集合都是有限集;含有无限个元素的集合叫做无限集,如本节开头列举的(2)的对象所组成的集合都是无限集.显然,数集 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 都是无限集.

2. 集合表示的两种常用方法

集合的表示方法,常用的有列举法和描述法.

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号“{ }”内就可以表示集合.这种表示集合的方法,叫做列举法.

例如,由数 1、2、3、4 组成的集合,可以表示为

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

用列举法表示集合时,不必考虑集合中元素之间的顺序,并且集合中每个元素不允许重复出现.

在不致引起误解的情况下,把集合中元素的共同特性描述出来,写在大括号内也可以表示集合.这种表示集合的方法,叫做描述法.

例如,由一个班级所有的学员组成的集合,可以表示为

$$\{\text{一个班级所有的学员}\};$$

由某台电脑 C 盘中所有的文件名组成的集合,可以表示为

$$\{\text{某台电脑 C 盘中所有的文件名}\}.$$

运用描述法表示集合时,还常常先在大括号内写上这个集合的元素的一般形式,然后划一条竖线,再在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性.

例如,由不等式 $2x - 3 > 9$ 的所有的解组成的集合,可以表示为

$$\{x | 2x - 3 > 9\}.$$

于是,由数 1、2、3、4 组成的集合,可以表示为

$$\{\text{小于 5 的自然数}\}, \text{或 } \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\},$$

$$\text{或 } \{\text{不大于 4 的自然数}\}, \text{或 } \{x | (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0\}$$

等等.

可见,一个集合用描述法的表示形式不是唯一的.

又如,在直角坐标平面内,坐标满足一次函数 $y = x + 2$ 的所有的点组成的集合,可以用描述法表示为

$$\{(x, y) | y = x + 2, x \in \mathbf{R}\}.$$

例 2 把下列用描述法表示的集合改用列举法表示:

$$A = \{4, 7\}$$

$$(1) A = \{x | x^2 - 3x - 4 = 0\};$$

$$(2) B = \{x | 2(x-2) < x+2, x \in \mathbb{N}\}.$$

解 (1) 由于一元二次方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的两个解为 $x_1 = -1, x_2 = 4$, 所以集合 A 用列举法可以表示为

$$A = \{-1, 4\}.$$

(2) 由于不等式 $2(x-2) < x+2$ 的解为 $x < 6$, 所以集合 B 用列举法可以表示为

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

在这本课本中, 我们把求得的方程的解, 用集合表示, 称为方程的解的集合, 简称为方程的解集. 如 $\{-1, 4\}$ 就是方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解集. 把求得的不等式的解, 用集合表示, 称为不等式的解的集合, 简称为不等式的解集. 如 $\{x | x < 6\}$ 就是不等式 $2(x-2) < x+2$ 的解集.

1. 写出下列集合中所有的元素:

- (1) $\{ \text{大于 2 且小于 10 的奇数} \}; \{3, 5, 7, 9\}$ (2) $\{ \text{小于 7 的正的偶数} \}; \{2, 4, 6\}$
 (3) $\{x | 2x^2 - x - 1 = 0\}; \{\frac{1}{2}, -1\}$ (4) $\{ \text{一年中有 31 天的月份} \}.$

2. 填空题: (用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”连接下列元素与集合)

$$(1) 1 \in \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N}, -2 \in \mathbb{N}, 0.4 \notin \mathbb{N}, \sqrt{3} \notin \mathbb{N};$$

$$(2) 1 \in \mathbb{Z}, 0 \in \mathbb{Z}, -2 \in \mathbb{Z}, 0.4 \notin \mathbb{Z}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Z};$$

$$(3) 1 \in \mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{Q}, -2 \in \mathbb{Q}, 0.4 \in \mathbb{Q}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q};$$

$$(4) 1 \in \mathbb{R}, 0 \in \mathbb{R}, -2 \in \mathbb{R}, 0.4 \in \mathbb{R}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}.$$

3. 用适当的符号表示下列各题中数与数集之间的关系:

$$(1) a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, a \text{ 与 } \mathbb{N};$$

$$(2) b = -\sqrt{9}, b \text{ 与 } \mathbb{Z};$$

$$(3) c = \sqrt{8}, c \text{ 与 } \mathbb{Q};$$

$$(4) d = \sqrt{0.25}, d \text{ 与 } \mathbb{Q}.$$

4. 选用适当的方法表示由下列元素所组成的集合, 然后说出它是有限集还是无限集:

(1) 大于 3 且小于 11 的偶数的集合;

(2) 一元二次方程 $25x^2 - 9 = 0$ 的解集;

(3) 大于 4 且小于 7 的实数的集合;

(4) 所有的正的偶数的集合.

5. 用列举法表示下列各集合:

(1) 满足 $-2 < \frac{1}{2} < x < 3 < \frac{3}{4}$ 的所有整数 x 组成的集合;

(2) 满足小于 12 且能被 3 整除的所有自然数组成的集合;

(3) 方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的解集;

(4) 由 0、1、2 这三个数字排成的没有重复数字的三位数的全体所组成的集合.

6. 把下列用描述法表示的集合改用列举法表示:

$$(1) A = \{x | x^2 + 4x = 0\};$$

$$(2) B = \{x | 2(1-x) + 1 = 3x - 2\};$$

$$(3) C = \{x | -3 < x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\};$$

$$(4) D = \{x | 1 - x \geq -3, x \in \mathbb{N}\}.$$

7. 先把下列集合用不等式的解集来表示, 然后用适当的符号分别表示元素 a, b 与集合 A, B 的关系:

$$(1) a = -1, A = \{x | 3(x+1) < 1+x\}; \quad (2) b = \sqrt{2}, B = \{x | 3 - (1-x) > 3.4\}.$$

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集

在某工厂的机修车间中,如果以工种为对象,这个车间的第一小组的工种所组成的集合 A 是{车工,钳工},而这个车间的所有工种所组成的集合 B 是{车工,钳工,金工,木工}. 容易看出,这里集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,也就是说集合 A 的任何一个元素都属于集合 B .

一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都属于集合 B (即如果 $a \in A$,那么 $a \in B$),那么就把集合 A 叫做集合 B 的子集,记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A \text{)},$$

读作 A 包含于 B (或 B 包含 A).

例如,任何自然数都是整数,这说明自然数集 N 的每一个元素都是整数集 Z 的元素,所以自然数集 N 是整数集 Z 的子集,即 $N \subseteq Z$ (或 $Z \supseteq N$).

显然,对于任何一个集合 A ,有 $A \subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A \text{)}.$$

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系,可以用图 1-1 中 B 同 A 的关系来说明,其中 A 、 B 两个圈的内部分别表示集合 A 、 B .

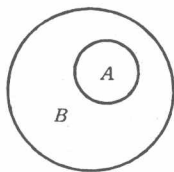


图 1-1

显然,自然数集 N 是整数集 Z 的真子集,可以表示为 $N \subset Z$ (或 $Z \supset N$). 对于数集 N 、 Z 、 Q 、 R 来说,有 $N \subset Z \subset Q \subset R$.

如果在集合 A 中,存在一个元素不属于集合 B ,那么称集合 A 不是集合 B 的子集或真子集,可记作 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\supseteq A$),或 $A \not\subset B$ (或 $B \not\supset A$),读作 A 不包含于 B (或 B 不包含 A).

我们知道,方程 $x+1=x+3$ 无解,为了表示这种不含任何元素的情况,我们引入空集的概念,空集不含任何元素,记作 $\emptyset$. 例如:

$$\{\text{小于零的正整数}\} = \emptyset,$$

$$\{x | x+1 = x+3\} = \emptyset,$$

$$\{\text{有两个内角是直角的三角形}\} = \emptyset.$$

我们规定空集是任何集合的子集. 也就是说,对于任何集合 A ,有

$$\emptyset \subseteq A \text{ (或 } A \supseteq \emptyset \text{)}.$$

例 1 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集和真子集.

解 集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集是 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; 其中 $\emptyset, \{a\}, \{b\}$ 是它的真子集.

对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$,并且 $A \supseteq B$,那么称集合 A 与集合 B 相等,记作

$$A = B,$$

读作 A 等于 B .

例 2 用适当的符号来表示下列各题中的两个集合之间的关系:

$$(1) A = \{x | x-1 \leq 0\}, B = \{x | x-2 < 0\};$$

(2) $C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $D = \{x | 0 < x < 3, x \in \mathbb{N}\}$.

解 (1) 不等式 $x - 1 \leq 0$ 的解为 $x \leq 1$, 集合 A 用不等式的解集表示为 $\{x | x \leq 1\}$;

不等式 $x - 2 < 0$ 的解为 $x < 2$, 集合 B 用不等式的解集表示为 $\{x | x < 2\}$.

把集合 A, B 在数轴上表示出来, 如图 1-2 所示.



图 1-2

所以 $A \subset B$.

(2) 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为 $x_1 = 1, x_2 = 2$, 集合 C 用方程的解集表示为 $\{1, 2\}$;

而集合 D 用列举法表示为 $\{1, 2\}$.

所以 $C = D$.

例 3 选用适当的记号分别表示 $\emptyset$ 与 $0, 0$ 与 $\{0\}, \{0\}$ 与 $\emptyset$ 之间的关系.

分析: 0 是一个元素, $\emptyset$ 为空集, 空集中不含有任何元素, 因此 0 不是 $\emptyset$ 中的元素. $\{0\}$ 为含一个元素的集合, 0 是它的元素. 表示元素与集合的关系可选用记号 $\in, \notin$.

$\{0\}, \emptyset$ 都是集合, 空集是任何集合的子集, 且是任何非空集合的真子集. 表示集合与集合的关系可选用 $\subseteq, \subset, \supseteq, \supset$ 等记号.

解 $0 \notin \emptyset; 0 \in \{0\}; \emptyset \subset \{0\}$, 或 $\{0\} \supset \emptyset$.

2. 交集

设有三个集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{3, 4\}$. 可以看出, 集合 C 是由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素 (即 A, B 的公共元素的全体) 所组成的.

一般地, 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A, B 的交集, 记作 $A \cap B$ (读作 A 交 B), 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.

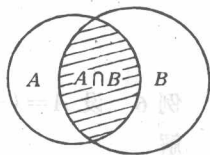


图 1-3

两个集合 A, B 的交集, 可以用图 1-3 中的阴影部分来表示.

由交集的定义可知, 对于任何集合 A, B , 有

$$A \cap B = B \cap A, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B.$$

例 4 设 $A = \{-3, -1, 1\}, B = \{-1, 0, 1\}, C = \{0, 1, 2\}$, 求 $A \cap B, B \cap C, C \cap A$.

解 $A \cap B = \{-1, 1\}, B \cap C = \{0, 1\}, C \cap A = \{1\}$.

例 5 设 $A = \{x | 5x - 4 > 3(x - 4)\}, B = \{x | \frac{1}{2}x + 2 < 4 - \frac{3}{2}x\}$, 求 $A \cap B$.

解 不等式 $5x - 4 > 3(x - 4)$ 的解为 $x > -4$, 集合 A 可表示为 $\{x | x > -4\}$;

不等式 $\frac{1}{2}x + 2 < 4 - \frac{3}{2}x$ 的解为 $x < 1$, 集合 B 可表示为 $\{x | x < 1\}$.

把集合 A, B 在数轴上表示出来, 如图 1-4 所示.

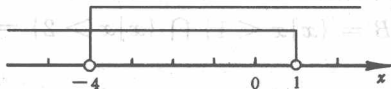


图 1-4

所以 $A \cap B = \{x|x > -4\} \cap \{x|x < 1\} = \{x|-4 < x < 1\}$.

3. 并集

设有三个集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 可以看出, 集合 C 是由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的.

一般地, 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A, B 的并集, 记作 $A \cup B$ (读作 A 并 B), 即 $A \cup B = \{x|x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

比较交集与并集的定义:

$$A \cap B = \{x|x \in A, \text{且 } x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x|x \in A, \text{或 } x \in B\},$$

这两个定义仅一字之差, 却是两个完全不同的概念.

图 1-5(1)、(2)、(3) 中的阴影部分分别表示各种情况下集合 A, B 的并集 $A \cup B$.

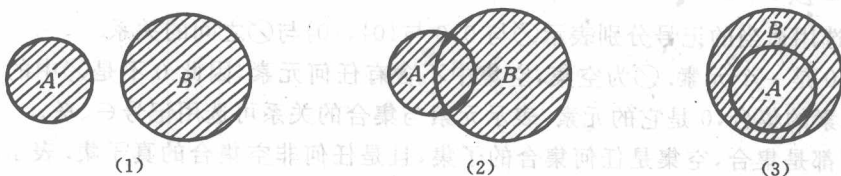


图 1-5

注意: 集合中的元素是不重复出现的. 因此, 求两个集合的并集时, 这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次.

由并集的定义可知, 对于任何集合 A, B 有

$$A \cup B = B \cup A, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B.$$

例 6 设 $A = \{-3, -1, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, 求 $A \cup B, B \cup C, (A \cap C) \cup B$.

解

$$A \cup B = \{-3, -1, 0, 1\}, B \cup C = \{-1, 0, 1, 2\}.$$

$$A \cap C = \{1\}, \therefore (A \cap C) \cup B = \{-1, 0, 1\}.$$

例 7 已知 N 为自然数集, Z 为整数集, Q 为有理数集, 求 $N \cup Z, Z \cup Q, N \cap Q$.

解

$$N \cup Z = \{\text{自然数}\} \cup \{\text{整数}\} = \{\text{整数}\} = Z,$$

$$Z \cup Q = \{\text{整数}\} \cup \{\text{有理数}\} = \{\text{有理数}\} = Q,$$

$$N \cap Q = \{\text{自然数}\} \cap \{\text{有理数}\} = \{\text{自然数}\} = N.$$

例 8 设 $A = \{x|2(x+1) < x+3\}$, $B = \{x|3x-2 > 4\}$, 求 $A \cup B, A \cap B$.

解 不等式 $2(x+1) < x+3$ 的解为 $x < 1$, 集合 A 可表示为 $\{x|x < 1\}$;

不等式 $3x-2 > 4$ 的解为 $x > 2$, 集合 B 可表示为 $\{x|x > 2\}$.

把集合 A, B 在数轴上表示出来, 如图 1-6 所示.

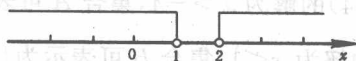


图 1-6

所以 $A \cup B = \{x|x < 1\} \cup \{x|x > 2\} = \{x|x < 1, \text{或 } x > 2\}$,

$$A \cap B = \{x|x < 1\} \cap \{x|x > 2\} = \emptyset.$$

4. 补集

在研究集合与集合之间的关系时, 在某些情况下, 所有研究的集合都是一个给定的集合

的子集,这个给定的集合便称为全集,用符号 I 表示.也就是说,全集含有我们所要研究的课题中各个集合的全部元素.

例如,在研究数的集合时,常把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集.设全集 $I=\mathbf{R}$,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集.我们知道,无理数是实数,但不是有理数,由此可知无理数集是由实数集内所有不属于有理数集的元素所组成的.

一般地,已知全集 I ,集合 $A \subseteq I$,由 I 中所有不属于集合 A 的元素所组成的集合,叫做集合 A 在集合 I 中的补集,记作 $\bar{A}$ (读作 A 补),即

$$\bar{A} = \{x | x \in I, \text{且 } x \notin A\}.$$

由上面的例子可以知道,对于全集 $\mathbf{R}$ 来说,有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集为 $\bar{\mathbf{Q}} = \{\text{无理数}\}$.

图 1-7 中的长方形内部表示全集 I ,圆内部表示集合 A ,阴影部分表示集合 A 的补集 $\bar{A}$.

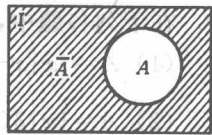


图 1-7

例如,如果全集 $I = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{-1, 2, 3\}$, 那么

$$\bar{A} = \{0, 1\}.$$

容易看出,

$$A \cup \bar{A} = \{-1, 2, 3\} \cup \{0, 1\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\} = I,$$

$$A \cap \bar{A} = \{-1, 2, 3\} \cap \{0, 1\} = \emptyset.$$

由补集的定义可知,对于任何集合 A ,有

$$A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A,$$

其中 $\bar{\bar{A}}$ 表示 $\bar{A}$ 在 I 中的补集.

例 9 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 6, 7\}$, 求 $\bar{A}, \bar{B}, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$.

解

$$\bar{A} = \{1, 5, 6, 7\}, \bar{B} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

$$\overline{A \cap B} = \{1, 5\}.$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7\}, \therefore \overline{A \cup B} = \{1, 5\}.$$

例 10 已知集合 $A = \{x | x > 2\}$, 集合 $B = \{x | 2 < x \leq 4\}$, 设全集 $I = \mathbf{R}$, 求 $\bar{A}, \bar{B}$.

解

$$\because I = \mathbf{R}, A = \{x | x > 2\},$$

$$\therefore \bar{A} = \{x | x \leq 2\}.$$

$$\because I = \mathbf{R}, B = \{x | 2 < x \leq 4\},$$

$$\therefore \bar{B} = \{x | x \leq 2, \text{或 } x > 4\}.$$

习 题 二

1. 分别写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有的子集与真子集.

2. 用适当的符号表示下列元素与集合、集合与集合之间的关系:

(1) $0 \underline{\hspace{1cm}} \{0\};$

(2) $\{0\} \underline{\hspace{1cm}} \{0, 1, 2\};$

(3) $0 \underline{\hspace{1cm}} \emptyset;$

(4) $\{0, 1\} \underline{\hspace{1cm}} \{1, 0\};$

(5) $\emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{0\};$

(6) $\{0, 1\} \underline{\hspace{1cm}} \{-1, 0\};$

(7) $\{x | x > 3\} \underline{\hspace{1cm}} \{x | x > -1\};$

(8) $\{x | x < 3\} \underline{\hspace{1cm}} \{x | x < -1\}.$

3. 填空题:

(1) 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 1, a\}$, 若 $A = B$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}};$

(2) 设 $A = \{b, 3, 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 若 $A \supset B$, 则 $b = \underline{\hspace{1cm}}.$

4. 选择题*: 对于集合 A 和 B , 当 $A \subset B$ 时, 下列写法中可能错误的是 ()
- (A) $\emptyset \subset A$. (B) $\emptyset \subset B$. (C) $B \supset A$. (D) $B \supseteq A$.
5. (1) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$;
 (2) 设 $A = \{\text{小于 7 的正偶数}\}$, $B = \{x | 3 < x \leq 6, x \in \mathbf{N}\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.
6. 用适当的符号表示下列集合与集合之间的关系:
- (1) $A \cap B$ A ; (2) $A \cup B$ A ;
 (3) $A \cap \emptyset$ $\emptyset$; (4) $A \cup \emptyset$ $\emptyset$;
 (5) $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$ $\mathbf{Z}$; (6) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z}$ $\mathbf{Z}$;
 (7) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}$ $\mathbf{R}$; (8) $\mathbf{Q} \cup \mathbf{R}$ $\mathbf{R}$.
7. 在下列各题中, 先用不等式的解集表示集合 A, B , 然后求它们的交集和并集:
- (1) $A = \{x | x - 1 > 3\}$, $B = \{x | 2 - x < 1\}$;
 (2) $A = \{x | 3(1 - x) < 2(x + 9)\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2+x}{2} \geq \frac{2x-1}{3}\right\}$;
 (3) $A = \{x | 3x + 1 < 2x - 5\}$, $B = \{x | 2x - 3 > 3x - 4\}$;
 (4) $A = \{x | 2(x + 2) < x + 3\}$, $B = \{x | 3(x - 1) > 4\}$.
8. (1) 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cap B}$;
 (2) 设 $I = \{x | x \leq 8, x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{1, 2, 4, 7\}$, $B = \{4, 6, 7, 8\}$, $C = \{3, 5, 7\}$, 求 $A \cap \bar{B}$, $(A \cap B) \cap C, (A \cup B) \cup \bar{C}$.
9. 设 $I = \mathbf{R}$, $A = \{x | x - 3 > 0\}$, $B = \{x | x \leq 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \bar{A}, \bar{B}$.
10. 某班级期末统计中, 得知数学评为优秀的有 20 人, 物理评为优秀的有 15 人, 数学、物理两门学科均评为优秀的有 10 人. 若已知这个班级有 43 人, 则这个班级中, 数学、物理两门学科都没有评为优秀的有几个人?

二 不等关系

1.3 不等式的性质、※不等式的证明

1. 不等式的性质

我们知道, 实数可以比较大小. 在数轴上, 两个不同的点 A 与 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b , 右边的点表示的数比左边的点表示的数大. 从实数的减法在数轴上的表示可以看出, a, b 之间具有以下性质:

如果 $a - b$ 是正数 (即 $a - b > 0$), 那么 $a > b$;

如果 $a - b$ 是负数 (即 $a - b < 0$), 那么 $a < b$;

如果 $a - b$ 等于零 (即 $a - b = 0$), 那么 $a = b$.

上面的性质, 反过来也成立.

由此, 我们可以推出不等式的下列基本性质.

性质 1 如果 $a > b$, 那么 $b < a$; 如果 $b < a$, 那么 $a > b$.

* 本教材的选择题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论, 其中有一个结论而且仅有一个结论是正确的.

证明: $\because a > b, \therefore a - b > 0$.

由正数的相反数是负数, 可得

$$-(a - b) < 0, \text{ 即 } b - a < 0.$$

$$\therefore b < a.$$

同样可以证明如果 $b < a$, 那么 $a > b$.

性质 1 说明, 把不等式的左、右两边互换, 所得的不等式与原不等式异向.

性质 2 如果 $a > b, b > c$, 那么 $a > c$.

证明: $\because a > b, \therefore a - b > 0$;

$$\text{又 } \because b > c, \therefore b - c > 0.$$

根据两个正数之和仍为正数, 可得

$$(a - b) + (b - c) > 0, \text{ 即 } a - c > 0.$$

$$\therefore a > c.$$

性质 2 常简称为不等式的传递性.

根据性质 1, 可以把性质 2 表示为另一种形式: 如果 $c < b, b < a$, 那么 $c < a$.

性质 3 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$.

证明:

$$\because a > b, \therefore a - b > 0.$$

$$\therefore (a + c) - (b + c) > 0.$$

$$\therefore a + c > b + c.$$

性质 3 说明, 不等式的两边都加上同一个实数, 所得的不等式与原不等式同向. 它常简称为不等式的加法性质.

利用不等式的加法性质, 可以把不等式中某一项改变符号后, 从不等式的一边移到另一边. 如

$$a + b > c \Rightarrow a > c - b.$$

由性质 3 可以得到下面的推论.

推论 如果 $a > b, c > d$, 那么 $a + c > b + d$.

这是因为, 由 $a > b$, 可得 $a + c > b + c$;

由 $c > d$, 可得 $b + c > b + d$.

由性质 2, 得 $a + c > b + d$.

性质 3 的推论说明, 两个同向不等式的两边分别相加, 所得的不等式与原不等式同向. 显然, 这个推论可以推广到: 两个以上同向不等式的两边分别相加, 所得的不等式与原不等式同向.

性质 4 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$; 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$.

证明: $\because a > b, \therefore a - b > 0$.

又 $c > 0$, 根据同号两数相乘得正, 可得

$$(a - b)c > 0, \text{ 即 } ac - bc > 0.$$

$$\therefore ac > bc.$$

同样可以证明如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$.

性质 4 常简称为不等式的乘法性质.

由性质 4 可以得到下面两个推论.

推论 1 如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么 $ac > bd$.

这是因为, 由 $a > b, c > 0$, 可得 $ac > bc$;

由 $c > d, b > 0$, 可得 $bc > bd$.

由性质 2, 得 $ac > bd$.

性质 4 的推论 1 可以推广到: 两个以上两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘, 所得的不等式与原不等式同向, 由此我们可以得到:

推论 2 如果 $a > b > 0$, 那么 $a^n > b^n (n \in \mathbb{N}, \text{且 } n > 1)$.

例 1 利用不等式的基本性质, 判别下列结论是否正确, 如果正确, 简述理由; 如果不正确, 加以纠正:

(1) 如果 $a > 1$, 那么 $3 < a + 2$;

(2) 如果 $a > 1$, 那么 $a^2 > a$;

(3) 如果 $a > 1, b$ 是不等于零的实数, 那么 $ab > b$.

解 (1) 正确.

$\because a > 1, \therefore 1 < a$. (性质 1)

$\therefore 1 + 2 < a + 2$, (性质 3)

即

$3 < a + 2$.

(2) 正确.

$\because a > 1, \therefore a \cdot a > 1 \cdot a$, (性质 4)

即

$a^2 > a$.

(3) 不正确. 纠正如下:

当 $b > 0$ 时, $\because a > 1, b > 0$,

$\therefore ab > b$; (性质 4)

当 $b < 0$ 时, $\because a > 1, b < 0$,

$\therefore ab < b$. (性质 4)

例 2 利用不等式的基本性质, 判断下列结论中正确的是

(A) 如果 $a > b, c > b$, 那么 $a > c$.

(B) 如果 $a > b$, 那么 $c - a < c - b$.

(C) 如果 $a > b, c > d$, 那么 $a - c > b - d$.

(D) 如果 $a > b, n \in \mathbb{N}$, 那么 $a^n > b^n$.

分析: (A) 不正确, 如取 $a = 2, b = -3, c = 4$ 时, 虽然满足 $a > b, c > b$, 但 $a < c$.

(B) 正确. 因为由 $a > b$, 不等式的基本性质 4, 可得 $-a < -b$; 再由不等式的基本性质 3, 可推出 $c - a < c - b$.

(C) 不正确. 如取 $a = 5, b = 2, c = 4, d = 0$ 时, 虽然满足 $a > b, c > d$, 但 $a - c = 1, b - d = 2$, 显然 $a - c$ 不大于 $b - d$.

(D) 不正确. 不等式的基本性质 4 的推论 2 指明, 当 $a > b > 0$ 时, 有 $a^n > b^n (n \in \mathbb{N})$. 现在已知条件中没有 $a > 0$ 和 $b > 0$ 的限制, 如取 $a = 2, b = -3$, 再取 $n = 4$, 这时虽有 $a > b$, 但 a^n 显然不大于 b^n , 故不正确.

解 选(B).

※2. 不等式的证明

(1) 比较法.

我们已经知道, 由 $a - b > 0$, 可以得到 $a > b$, 因此要证明 $a > b$, 只要证明 $a - b > 0$. 这种

证明不等式的方法叫做比较法.

例3 求证: $x^2 + 5 > 3x + 2$.

证明

$$\begin{aligned}\because x^2 + 5 - (3x + 2) &= x^2 - 3x + 3 \\&= x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\&\geq \frac{3}{4} > 0, \\&\therefore x^2 + 5 > 3x + 2.\end{aligned}$$

注意: 为了便于确定不等号两边差的正负, 往往要把这个差变形成为一个常数, 或者变形成为一个常数与一个(或几个)平方和的形式, 或者变形成为几个因式的积的形式, 然后再进行判别.

例4 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$, 并说明不等式取等号的条件.

证明

$$\begin{aligned}(a^3 + b^3) - (ab^2 + a^2b) &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \\&= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \\&= (a + b)(a - b)^2. \\&\because a > 0, b > 0, \therefore a + b > 0. \\&\text{又} \because (a - b)^2 \geq 0, \therefore (a + b)(a - b)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

即

$$a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b.$$

当 $a = b$ 时, 上面不等式取等号.

(2) 综合法.

由已知的条件出发, 根据不等式的性质或已经证明过的重要不等式, 逐步推得所求证的不等式, 这种证明不等式的方法叫做综合法.

为了便于运用综合法, 先证明一个重要不等式:

如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a = b$ 时, 取等号).

证明: $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$.

当 $a \neq b$ 时, $(a - b)^2 > 0$; 当 $a = b$ 时, $(a - b)^2 = 0$.

$$\therefore (a - b)^2 \geq 0, \text{ 即 } a^2 + b^2 - 2ab \geq 0.$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

当 $a = b$ 时, 上式取等号.

这个不等式有一个推论:

如果 a, b 均为正实数, 那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a = b$ 时, 取等号).

上面的重要不等式及其推论, 在利用综合法证明不等式时是常用的.

例5 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

证明 利用不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 可得

$$a^2 + 1 \geq 2a,$$

$$b^2 + 1 \geq 2b.$$

$$\therefore (a^2 + b^2) + (a^2 + 1) + (b^2 + 1) \geq 2ab + 2a + 2b,$$

即

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

例 6 (1) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, 并说明不等式取等号的条件;

(2) 已知 x, y, z 为各不相等的正数, 求证:

$$\frac{x+y}{z} + \frac{z+x}{y} + \frac{y+z}{x} > 6.$$

证明 (1) 由 $a > 0, b > 0$, 可得 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$.

根据不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 可得

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

即

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

当 $a=b$ 时, 取等号.

(2) 由 $x > 0, y > 0, z > 0$, 且 x, y, z 各不相等, 根据(1)的结论, 有

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2,$$

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} > 2,$$

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} > 2.$$

$$\therefore \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) > 6,$$

即

$$\frac{x+y}{z} + \frac{z+x}{y} + \frac{y+z}{x} > 6.$$

例 7 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 求证:

$$x^4(x^2+1) + y^4(y^2+1) \geq x^2(x^4+y^2) + y^2(y^4+x^2).$$

证法一 根据不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 有

$$x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2.$$

$$\therefore x^6 + y^6 + x^4 + y^4 \geq x^6 + y^6 + 2x^2y^2.$$

根据求证要求整理, 得

$$x^6 + x^4 + y^6 + y^4 \geq x^6 + x^2y^2 + y^6 + x^2y^2.$$

即

$$x^4(x^2+1) + y^4(y^2+1) \geq x^2(x^4+y^2) + y^2(y^4+x^2).$$

证法二

$$x^4(x^2+1) + y^4(y^2+1) - [x^2(x^4+y^2) + y^2(y^4+x^2)]$$

$$= x^6 + x^4 + y^6 + y^4 - (x^6 + 2x^2y^2 + y^6)$$

$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

$$= (x^2 - y^2)^2 \geq 0.$$

$$\therefore x^4(x^2+1) + y^4(y^2+1) \geq x^2(x^4+y^2) + y^2(y^4+x^2).$$

本题的证法一是用了综合法, 证法二是用了比较法.

*例 8 如图 1-8, 用 12 米长的篱笆围成一个一边靠墙的矩形花坛, 要使花坛的面积最大(以便栽种更多的花草), 应如何设计矩形的长和宽?

解 设矩形花坛的长为 x 米, 宽为 y 米.

由已知, 得 $x+2y=12, x>0, y>0$.

围成矩形花坛的面积

$$S=xy(\text{平方米}).$$

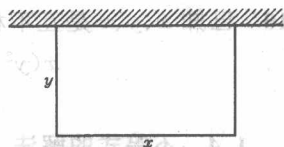


图 1-8

为求 xy 的最大值, 可利用基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0, \text{当且仅当 } a=b \text{ 时, 取等号})$.

于是 $xy = \frac{1}{2}x \cdot 2y \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+2y}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{2} \right)^2 = 18$,
当且仅当 $x=2y$ 时, 等号成立.

因此当 $x=6$ (米), $y=3$ (米) 时, $S=xy=18$ (平方米) 为最大值.

答: 当矩形的一边长为 6 米, 另两边的长分别为 3 米时, 围成花坛的面积最大.

以后我们还能运用二次函数的知识, 求解诸如例 8 的问题.

习 题 三

1. 用“ $>$ ”、“ $=$ ”、“ $<$ ”符号填空:

- (1) 如果 $a < b$, 那么 $a - b$ 0; (2) 如果 $a = b$, 那么 $a - b$ 0;
(3) 如果 $a > b$, 那么 $a - b$ 0; (4) 如果 $a < b$, 那么 $a + 5$ $b + 5$;
(5) 如果 $a > b$, 那么 $-5a$ $-5b$; (6) 如果 $a < b$, 那么 $\frac{a}{3}$ $\frac{b}{3}$.

2. 已知 $a > b, c < d$, 求证 $a - c > b - d$.

3. 利用不等式的基本性质, 判别下列结论是否正确, 如果正确, 简述理由; 如果不正确, 加以纠正:

- (1) 如果 $a > b$, 那么 $b + 7 < a + 8$; (2) 如果 $a > b$, 那么 $ac^2 > bc^2$;
(3) 如果 $a > b > 0$, 那么 $7b < 8a$; (4) 如果 $a > b > 0$, 那么 $b^5 < a^5$;
(5) 如果 $a^2 > b^2$, 那么 $a > b$; (6) 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac^2 < bc^2$.

*4. (1) 比较 $(x-4)^2$ 与 $(x-3)(x-5)$ 的大小; (2) 设 $x > 1$, 比较 x^3 与 $x^2 - x + 1$ 的大小.

*5. (1) 已知 a, b 为正数, 求证: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 并说明不等式取等号的条件;

(2) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, 并说明不等式取等号的条件.

*6. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: $a^2 + b^2 \geq 2(a - b - 1)$.

*7. (1) 已知 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 求证: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

(2) 设 x, y, z 是互不相等的正数, 求证: $(x+y)(y+z)(z+x) > 8xyz$.

*8. (1) 已知 $x > 0$, 求证: $x + \frac{9}{x} \geq 6$;

(2) 已知 α 为锐角, 求证: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2$, 并说明不等式取等号的条件.

*9. 证明下列不等式:

(1) $x(2-x) \leq 1$; (2) $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$;

(3) $a + 4(1 - \sqrt{a}) \geq 0$, 其中 $a \geq 0$.

10. 已知 x, y, z 是互不相等的正数, 求证:

$$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) > 6xyz.$$

1.4 不等式的解法

在初中我们已学过一元一次不等式的解法, 现在来研究一元一次不等式组、一元二次不等式和其他一些不等式的解法.

1. 一元一次不等式组及其解法

由几个一元一次不等式所组成的不等式组, 叫做一元一次不等式组. 这几个一元一次不等式的解集的交集叫做这个一元一次不等式组的解集.

例1 解下列不等式组, 并把它们的解用集合表示:

$$(1) \begin{cases} 3x+1 > 2x-5, \\ 2x-3 < 3x-4; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x+3}{3} < \frac{x-1}{5} + \frac{2}{3}, \\ \frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{2} > -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

解 (1) 不等式 $3x+1 > 2x-5$ 的解为 $x > -6$,

不等式 $2x-3 < 3x-4$ 的解为 $x > 1$,

把 $\begin{cases} x > -6, \\ x > 1 \end{cases}$ 在数轴上表示出来, 如图 1-9 所示.

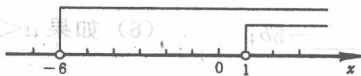


图 1-9

所以不等式组的解为 $x > 1$, 用集合表示为 $\{x | x > 1\}$.

(2) 在 $\frac{x+3}{3} < \frac{x-1}{5} + \frac{2}{3}$ 的两边都乘以 15, 得

$$5(x+3) < 3(x-1) + 10, \text{ 它的解为 } x < -4.$$

在 $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{2} > -\frac{1}{6}$ 的两边都乘以 6, 得

$$2(x+1) - 3(x+2) > -1, \text{ 它的解为 } x < -3.$$

把 $\begin{cases} x < -4, \\ x < -3 \end{cases}$ 在数轴上表示出来, 如图 1-10 所示.

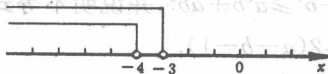


图 1-10

所以不等式组的解为 $x < -4$, 用集合表示为 $\{x | x < -4\}$.

从上面的例1、例2以及第1.2节的例5、例8可以看出, 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解有以下四种情况:

设 $a < b$,

(1) $\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$ 的解是 $x > b$, 用集合表示是 $\{x | x > b\}$;

(2) $\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$ 的解是 $a < x < b$, 用集合表示是 $\{x | a < x < b\}$;