



高职高专

21世纪高等学校数学系列教材

(第三版)

高等数学学习指导

■ 主 编 万 武

■ 副主编 肖业胜 孙旭东



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



高职高专

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

(第三版)

高等数学学习指导

■ 主 编 万 武

■ 副主编 肖业胜 孙旭东



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/万武主编;肖业胜,孙旭东副主编. —3版. —武汉:武汉大学出版社,2011.4

21世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-08665-4

I. 高… II. ①万… ②肖… ③孙… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第064970号

责任编辑:李汉保

责任校对:黄添生

版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:通山金地印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:15.5 字数:326千字 插页:1

版次:2004年11月第1版 2006年8月第2版

2011年4月第3版 2011年9月第3版第2次印刷

ISBN 978-7-307-08665-4/O·447 定价:22.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

- 主 任：羿旭明 武汉大学数学与统计学院，副院长，教授
- 副 主 任：何 穗 华中师范大学数学与统计学院，副院长，教授
- 肖业胜 武汉工程职业技术学院，副教授
- 孙旭东 武汉工业职业技术学院，副教授
- 万 武 湖北轻工业职业技术学院，副教授
- 蹇 明 华中科技大学数学学院，副院长，教授
- 曾祥金 武汉理工大学理学院，数学系主任，教授、博导
- 李玉华 云南师范大学数学学院，副院长，教授
- 编 委：（按姓氏笔画为序）
- 王绍恒 重庆三峡学院数学与计算机学院，教研室主任，副教授
- 叶牡才 中国地质大学（武汉）数理学院，教授
- 叶子祥 武汉科技学院东湖校区，副教授
- 刘 俊 曲靖师范学院数学系，系主任，教授
- 全惠云 湖南师范大学数学与计算机学院，系主任，教授
- 何 斌 红河师范学院数学系，副院长，教授
- 李学峰 仰恩大学（福建泉州），副教授
- 李逢高 湖北工业大学理学院，副教授
- 杨柱元 云南民族大学数学与计算机学院，院长，教授
- 杨汉春 云南大学数学与统计学院，数学系主任，教授
- 杨泽恒 大理学院数学系，系主任，教授
- 张金玲 襄樊学院，讲师
- 张惠丽 昆明学院数学系，系副主任，副教授
- 陈圣滔 长江大学数学系，教授
- 邹庭荣 华中农业大学理学院，教授
- 吴又胜 咸宁学院数学系，系副主任，副教授
- 肖建海 孝感学院数学系，系主任
- 沈远彤 中国地质大学（武汉）数理学院，教授
- 欧贵兵 武汉科技学院理学院，副教授
- 赵喜林 武汉科技大学理学院，副教授
- 徐荣聪 福州大学数学与计算机学院，副院长

高遵海 武汉工业学院数理系, 副教授
梁 林 楚雄师范学院数学系, 系主任, 副教授
梅汇海 湖北第二师范学院数学系, 副主任
熊新斌 华中科技大学数学学院, 副教授
蔡光程 昆明理工大学理学院数学系, 系主任, 教授
蔡炯辉 玉溪师范学院数学系, 系副主任, 副教授
执行编委: 李汉保 武汉大学出版社, 副编审
黄金文 武汉大学出版社, 副编审

内 容 简 介

本书是21世纪高等学校数学系列教材之一，全书遵循高等教育规律，突出高等职业教育的特点，注重对学生数学素养和应用能力的培养，体现数学建模思想。全书分为上、下两册共10章，内容包括：函数、极限与连续、导数的应用、一元函数的积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等。教材每章后附有历史的回顾与评述，主要介绍数学发展史与相关数学大师。

本书对于所涉及的若干定理、推论、命题等，既不追求详细的证明过程，又不失数学理论的严谨；注重将数学建模思想融入到教学中；结合数学软件，培养学生处理数据以及求解数学模型的能力。

与本书配套的辅助教材有《高等数学练习册》、《高等数学学习指导》。本书可以作为高职高专各类专业通用数学教材，也可以作为成人高校、网络教育及相关科技人员的高等数学自学教材。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套 21 世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等 20 余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版

社之一。在国内有较高的知名度和影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作、力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前 言

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。作为各门科学的重要基础,数学科学在许多重要的领域中已起到关键性甚至决定性的作用。发展数学科学,是推进我国科学研究和技术发展,保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地,对大学生的数学教育,是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面,而教材建设是课程建设的重要内容,是教学思想与教学内容的重要载体,因此显得尤为重要。为了提高高等学校数学课程教材建设水平,由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划,组建 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会,在一定范围内,联合华中科技大学、云南大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、福州大学、中国地质大学、孝感学院、武汉科技大学、华中师范大学、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、湖北轻工业职业技术学院等省内外 20 余所院校合作编写数学课程系列教材,为高等学校从事数学教学和科研的教师,特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台,联合编写教材,交流教学经验,确保教材的编写质量,同时提高教材的编写与出版速度,有利于教材的不断更新,极力打造精品教材。

本套教材根据国家教育部制定的高职高专教育高等数学课程基本要求,贯彻以“应用为目的,以够用为度”的原则编写而成,以“培养能力,强化应用”为出发点,满足专业对数学的基本要求并体现了高等职业教育的特点。着重培养以下四方面的能力:一是用数学思维分析解决实际问题的能力;二是把实际问题转化为数学模型的能力;三是求解数学模型的能力;四是用数学知识解决所学专业上的一些问题的能力。本套教材具有以下特点:一是体现以必需、够用为度的原则,对于所涉及的若干定理、推论、命题等,既不追求详细的证明,又不失数学理论的严谨,适度淡化了难度较大的数学理论,加强了应用较强的数学方法;二是突出了能力培养,注重将数学建模思想融入到教学中,结合数学软件,培养处理数据以及求解数学模型的能力;三是突出数学知识与专业知识的衔接,增强针对性和实用性,提高学生学习数学的目的性;四是增强了可读性,提高学生学习数学的兴趣和积极性,教材每章后附有历史的回顾与评述材料;五是本套教材配有《高等数学学习指导》,对主教材的重点、难点逐一进行分析讲解,对典型例题进行归纳,着重理清解题的思路、方法和规律,以帮助学生正确地理解数学概念,提高学生的解题能力和数学素质,保持了主教材的体系并按主教材的章节编排,每章包括学习指导、典

型例题、同步训练、模拟试题和参考答案等。

本套教材包括《高等数学》上、下册共有 10 章和 9 个附录，每节后配有适量的习题，书后附有参考答案。打“*”号的内容供选学。本教材可以供高职高专各专业选用。

本套教材由孙旭东、肖业胜、万武担任主编。《高等数学》（上册）由肖业胜担任主编，孙旭东、万武担任副主编。《高等数学》（下册）由孙旭东担任主编；万武、肖业胜担任副主编。《高等数学学习指导》由万武担任主编；肖业胜、孙旭东担任副主编。为便于学生学习，本套教材还配有《高等数学练习册》。

本套教材得到武汉大学出版社、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、湖北轻工业职业技术学院等高等学校的大力支持，本套教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢！

由于作者水平所限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评建议，以便再版时修订，使本套教材日臻完善。

作 者

2010 年 3 月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	1
§ 1.1 内容提要	1
§ 1.2 疑难解析	2
§ 1.3 范例讲评	6
§ 1.4 习题选解	10
§ 1.5 综合练习	15
第 2 章 导数与微分	20
§ 2.1 内容提要	20
§ 2.2 疑难解析	22
§ 2.3 范例讲评	25
§ 2.4 习题选解	33
§ 2.5 综合练习	37
第 3 章 导数的应用	41
§ 3.1 内容提要	41
§ 3.2 疑难解析	44
§ 3.3 范例讲评	44
§ 3.4 习题选解	50
§ 3.5 综合练习	53
第 4 章 不定积分	58
§ 4.1 内容提要	58
§ 4.2 疑难解析	59
§ 4.3 范例讲评	61
§ 4.4 习题选解	65
§ 4.5 综合练习	67
第 5 章 定积分及其模型	71
§ 5.1 内容提要	71

§ 5.2 疑难解析	74
§ 5.3 范例讲评	77
§ 5.4 习题选解	86
§ 5.5 综合练习	91
第 6 章 微分方程	96
§ 6.1 内容提要	96
§ 6.2 疑难解析	98
§ 6.3 范例讲评	100
§ 6.4 习题选解	106
§ 6.5 综合练习	115
第 7 章 向量代数与空间解析几何	118
§ 7.1 内容提要	118
§ 7.2 疑难解析	123
§ 7.3 范例讲评	125
§ 7.4 习题选解	136
§ 7.5 综合练习	141
第 8 章 多元函数微分学	144
§ 8.1 内容提要	144
§ 8.2 疑难解析	149
§ 8.3 范例讲评	151
§ 8.4 习题选解	158
§ 8.5 综合练习	162
第 9 章 多元函数积分学	168
§ 9.1 内容提要	168
§ 9.2 疑难解析	171
§ 9.3 范例讲评	173
§ 9.4 习题选解	187
§ 9.5 综合练习	199
第 10 章 无穷级数	206
§ 10.1 内容提要	206
§ 10.2 疑难解析	209
§ 10.3 范例讲评	213

目 录	3
§ 10.4 习题选解	217
§ 10.5 综合练习	221
附录 综合测试题 (一)	227
综合测试题 (二)	228
综合测试题 (三)	230
综合测试题参考答案	231

第1章 函数、极限与连续

§ 1.1 内容提要

1.1.1 主要内容

函数的概念,函数的几种特性;基本初等函数、复合函数与初等函数的概念;数列极限与函数极限的定义,极限的运算法则,无穷小与无穷大的概念,两个重要极限;函数的连续性概念与函数的间断点;闭区间上连续函数的性质.

1.1.2 连续与极限及相关概念的关系

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \begin{cases} \text{数列极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \\ \text{连续 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases} \end{cases}$$

当 $A = 0$ 时, $f(x)$ 是无穷小;当 $A = \infty$ 时, $f(x)$ 是无穷大;如果 $f(x)$ 是无穷小(或无穷大),且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大(或无穷小).

1.1.3 几个常用的基本极限

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C = C (C \text{ 为常数}).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0 (a \text{ 为正常数}).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}.$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_m$ 和 $b_0, b_1, \dots, b_n$ 都是常数, 且 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1.1.4 有关函数连续性的主要结论

1. 基本初等函数在其定义域内是连续的
2. 一切初等函数在其定义区间内是连续的
3. 最大值、最小值定理

在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

4. 介值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在该区间的端点取不同的函数值: $f(a) = A$ 与 $f(b) = B$, 则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) = C$.

§ 1.2 疑难解析

1.2.1 极限的求法

极限方法是研究函数的基本方法, 极限的概念是高等数学中重要的、基础的概念。其概念和方法是本章的难点之一。由于数列是整变量函数, 因此, 数列的极限和函数的极限都是函数的极限。本章极限概念采用了描述性定义, 用描述性定义求函数极限, 或者取一些 x, y 的对应值, 观察函数值是否无限趋近于某一常数; 或者通过函数图像直观地看到, 自变量在某种趋向下, 函数是否无限趋近于某一常数。

除按定义求极限的方法外, 极限还有下列求法:

1. 利用极限的四则运算法则
2. 利用函数的连续性求极限

初等函数在其定义域上是连续的, 利用函数连续的定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 可以求初等函数在定义域上某一点的极限。

3. “ $\frac{0}{0}$ ”型未定型极限问题

(1) 分子、分母因式分解后约去零因子, 将所论函数转化成连续函数在定义域上某点的极限问题。

(2) 分子、分母有理化后约去零因子, 将所论函数转化成连续函数求极限问题。

例如 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.

(3) 分子、分母采用整体或乘积因子作等价无穷小量替换。例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(e^2 - 1)}.$$

(4) 利用公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限. 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

(5) 利用洛必达法则求极限(见后面相关章节).

把以上方法综合起来,能更容易地求极限.

4. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定型极限问题

求 $x \rightarrow \infty$ (或 $n \rightarrow \infty$) 的极限,分子、分母同时除以 x (或 n) 的最高次幂 (也可以转化为“ $\frac{0}{0}$ ”型极限或用洛必达法则).

还有许多极限问题,例如 “ $\infty - \infty$ ”型、“ $0 \cdot \infty$ ”型未定型极限问题,可以适当变形转化成为“ $\frac{0}{0}$ ”型、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定型的极限问题.

5. 利用公式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 求“ 1^∞ ”型未定型的极限

1.2.2 复合函数

复合函数在函数的连续、导数、积分等问题中都具有广泛的应用,因此很重要,突破了个难点,学生在今后的学习中才会顺利.

1. 如何构成复合函数

如由函数 $y = \ln u$, $u = \sin v$ 和 $v = x^2 + 1$ 构成的复合函数.

$$y = \ln \sin(x^2 + 1).$$

而由

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

和

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

构成复合函数为

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}.$$

例如函数 $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 能构成复合函数吗?

因为 $u = 2 + x^2$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 而 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, $[2, +\infty) \not\subset [-1, 1]$, 因此 $y = \arcsin u$ 和 $u = 2 + x^2$ 不能构成复合函数.

2. 分析函数的复合过程

例如,指出函数 $y = (-2x + 1)^7$, $y = \sqrt{\log_2(\cos x - e^x)}$ 的复合过程.

$y = (-2x + 1)^7$ 是由 $y = u^7$ 和 $u = -2x + 1$ 复合而成的;

$y = \sqrt{\log_2(\cos x - e^x)}$ 是由 $y = \sqrt{u}$, $u = \log_2 v$ 和 $v = \cos x - e^x$ 复合而成的.

1.2.3 间断点分类

间断点是讨论函数连续的继续,找出了函数的间断点并判定了类型,就容易绘出完整、准确的函数图形.

$$\text{函数的间断点} \begin{cases} \text{第一类间断点} \begin{cases} \text{可去间断点} \\ \text{跳跃间断点} \end{cases} \\ \text{第二类间断点} \begin{cases} \text{无穷大间断点} \\ \text{振荡间断点} \end{cases} \end{cases}$$

(左、右极限都存在) (左极限或右极限不存在)

例如,函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处是可去间断点,函数 $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处

是跳跃间断点,均属第一类间断点;又例如,函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 在 $x = -1$ 处是无穷大间断

点,函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处是振荡间断点.

1.2.4 分段函数

凡涉及分段函数的问题,尤其是分段函数的复合等,学生总感到困难. 以下讨论涉及分段函数的几个方面.

1. 分段函数的函数值

计算分段函数值时主要判定自变量在什么区间,选择这个区间对应的表达式.

例如,设 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{则 } f(0) = 1, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

2. 建立分段函数的函数关系

首先讨论不同自变量的范围,得出相应函数的表达式,然后综合为一个分段函数.

例如旅客乘坐火车可以免费携带不超过 20kg 的物品,超过 20kg 而不过 50kg 的部分每千克交费 a 元,超过 50kg 部分每千克交费 b 元. 求运费与携带物品重量的函数关系.

设物品重量为 x kg,应交运费为 y 元.

第一种情况,当重量不超过 20kg 时

$$y = 0, \quad x \in [0, 20]$$

第二种情况,当重量大于 20kg 但不超过 50kg 时

$$y = (x - 20) \times a, \quad x \in (20, 50]$$

第三种情况,当重量超过 50kg 时