普通高等教育“十二五”规划教材

信号与系统

李昌利　霍冠英　编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

信号与系统

李昌利　霍冠英　编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书全面而系统地论述了信号与线性系统分析的基本理论和方法。全书共十章。第一章介绍信号与系统的基本概念，第二章讲解信号的时域描述及其基本运算，第三章讲解系统的时域描述及分析，第四章讲解连续时间周期信号的傅里叶级数，第五章和第七章分别讲解一般连续时间信号的傅里叶变换和拉普拉斯变换，第六章讲解连续时间系统的频域分析及傅里叶变换的应用，第八章讲解连续时间系统的复频域分析，第九章讲解离散信号的 $\mathcal{Z}$ 变换及离散时间系统的 $\mathcal{Z}$ 域分析，第十章讲解 LTI 系统的框图表示、信号流图和状态变量分析。

本书可以作为电气工程、电子通信、自动控制及计算机等本科专业信号与系统课程的教材，也可以作为相关专业研究生入学考试的参考书，同时可供从事相关领域工作的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统 / 李昌利，霍冠英编著. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2012.1
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5084-9409-8

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①李… ②霍… Ⅲ. ①信号系统－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第005590号

书　　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **信号与系统**
作　　者	李昌利　霍冠英　编著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京纪元彩艺印刷有限公司
规　　格	184mm×260mm　16 开本　23 印张　545 千字
版　　次	2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	**42.00** 元

前言

科学的重要之处不只在于获得新的事实，
而更在于发现新的方法来思考这些事实。
——威廉·劳伦斯·布拉格❶

“信号与系统”简介

“信号与系统”是电气、电子信息类专业非常重要的一门基础课，为“数字信号处理”、“通信原理”、“高频电子线路”、“电路分析”、“自动控制”等课程的先修课程，它是信息与通信工程、电子科学与技术、电气工程、控制科学与工程等一级学科硕士研究生入学考试必考科目。“信号与系统”研究确定性的信号与系统，以及确定性的信号通过确定性系统的输出。具体内容包括确定性信号的描述及其基本运算，系统的时域描述及分析方法；连续周期信号的傅里叶级数表示、连续时间信号的傅里叶变换和拉普拉斯变换、离散序列的 $\mathcal{Z}$ 变换等；连续时间系统的频域和复频域分析方法，离散时间系统的 $\mathcal{Z}$ 域分析方法；傅里叶变换的应用以及通过系统函数零极点的配置设计滤波器等内容。

本书编写特色

结合作者10余年学习、研究和讲授的成果，体现了作者倡导的对“信号与系统”及相关课程进行一体化教学改革的理念，力求达到以下特色：

（1）整本教材的编写遵循这样一个顺序：先讲解信号部分，后讲解系统部分；先讲连续系统的时域分析，后讲离散系统的时域分析；先讲连续信号的傅里叶级数表示、傅里叶变换、拉普拉斯变换，后讲离散信号的 $\mathcal{Z}$ 变换；先讲连续系统的频域和复频域分析方法，后讲离散系统的 $\mathcal{Z}$ 域分析。这样安

❶ 威廉·劳伦斯·布拉格：诺贝尔物理学奖获得者。他与他的父亲威廉·布拉格创立了用X射线分析晶体结构的新学术领域，为DNA双螺旋结构的发现奠定了基础。1915年父子两人一同被授予诺贝尔物理学奖。

排章节便于类比，符合认知规律，也保持了内容的连贯性。

（2）考虑到电路的复频域模型是“电路分析”课程的重要内容，所以在讲解冲激响应的时域求解、系统的复频域分析时，几乎不涉及具体的电路，而只分析由微分方程描述的系统。重点放在用冲激函数匹配法求冲激响应，由微分方程描述系统的复频域分析方法。

（3）在讲解拉普拉斯变换和 $\mathscr{Z}$ 变换时，在各章的第二节就讲解了收敛域，所以在后面就同时讲解单边变换和双边变换。事实上，单边变换和双边变换只有个别性质要分别作处理，把这两种变换的叙述次序安排得一致，便于教学。多数教材在讲解 $\mathscr{Z}$ 变换时就是这样安排，但有一些教材在讲解拉普拉斯变换时，先集中讲解单边变换，在章的末尾处才简单讲解双边拉普拉斯变换。

（4）尽量减少和其他课程在内容上重复。比如，本书只是着重讲解了理想低通滤波器、理想低通滤波器的阶跃响应、通过系统函数的零极点配置设计滤波器，这些内容在“数字信号处理”中几乎不讲解，而离散傅里叶变换和滤波器设计是“数字信号处理”的核心内容，所以本书不涉及。这样处理保证了课程体系内相关课程之间的无缝衔接。

（5）紧密结合作者多年的教学实践和教学研究成果，参考了大量国内外的同类教材，汲取了大量精辟的论述并重新进行了表述。在主体内容安排上，兼顾简单的和复杂的、基础的和综合性的。通过编写典型的、综合性的例题，对学生疑问较多的内容，力求讲解清楚透彻，以增强启发性。

写给老师的话

请教我如何去学习，而不是学什么；请教我如何去思考，而不是对我说必须思考。只有这样才能培养我的智慧，而不是简单地提高记忆力。[1]

授人以鱼，不如授人以渔。

写给学生的话

每一个人都是一座两层楼，一楼有客厅、餐厅，二楼有卧室、书房，大多数人都在这两层楼间活动。实际上，人生还应该有一个地下室，没有灯，一团漆黑，那里是人的灵魂所在地。自己常走进这个暗室，闭门不出，日子

[1] 摘自《老师，请您这样做》，参考消息，2006 年 1 月 25 日。

久了，就有了一篇篇东西出来。[1]

我听，我忘记；我看，我记住；我做，我理解。[2]

成功的花，人们只惊羡她现时的明艳！然而当初她的芽儿，浸透了奋斗的泪泉，洒遍了牺牲的血雨[3]。

后　记

1998年春夏时节，当时我还在复旦大学物理系念本科，一个偶然的机会在学校图书馆读到西安交通大学刘树棠教授翻译的麻省理工学院奥本海姆教授编著的《信号与系统》中译本，便被书中的内容深深吸引。一本优秀的教材对读者的影响力如此深远。参考文献［11］的作者在书中写道："如果一个人想要很好地掌握一门课程，那他就应该为这门课程写一本教材。"学生们总是抱怨手头的教材晦涩，而教师们则抱怨教材的内容太浅显，作为一名教师，我也深感堪称优秀的教材实在太少。既然如此，何不尝试着写一本好教材以飨读者呢？本书的写作前后历时五年之久。写作过程中字斟句酌，反复推敲，常常夜不能寐。

全书由李昌利和霍冠英共同编著，其中第六章与第十章由霍冠英编写，其余部分由李昌利编写。本书的出版得到两位作者所在单位河海大学相关部门的资助和支持，在此表示感谢。作者从参考文献部分列出的优秀教材中汲取精华，在此对它们的编著者或译者表示最诚挚的谢意。艰苦的写作有着幼儿思睿的陪伴，他经常淘气地打敲键盘，这让我不得不认真校稿，而这无形之中提高了全书的文字质量。

若不枉读者阅读此书，当心满意足。囿于学识，难免诸多讹误之处，恳请读者不吝指正，当然也期盼溢美之词。

李昌利

于2011年仲夏

---

[1] 村上春树，日本小说家，日本典型的后现代派作家。已出版长篇小说《1973年的弹球游戏机》、《寻羊冒险记》、《挪威的森林》、《青春的舞步》和《世界末日与冷酷的仙境》等等，还有大量的短篇小说。

[2] William B. Wood，美国科学院院士，美国克罗拉多大学杰出教授。2007年在中国有关高校访问时作了题为《更新教学，促进高效学习（new teaching，more learning）》的专题讲座。

[3] 冰心的诗作《成功的花》。

目录

第一章 信号与系统的基本概念

我想先抛开结构的问题，
因此我能得到更多事物的本质。
——John McPhee[1]

本章内容提要

“信号与系统”课程的研究对象是确定性的信号、确定性的系统以及确定性信号通过确定性系统的输出。研究的系统主要是线性系统和线性时不变系统。本章简单介绍信号、系统的概念；定义系统的线性特性、时不变特性；定义线性时不变系统，推导了线性时不变系统的性质；介绍系统稳定性、因果性。在“信号与系统”课程中我们并不关心系统的具体构成，而把系统当作一个“黑盒子”。

第一节 信号的基本概念

人类赖以生存的物理世界充满了各类信号，有些是自然界产生的，有些是人类自己的躯体产生的，还有些是人类为了满足某种需求运用智慧产生的。例如，我们用声带发声时气压的变化，一天中空气湿度的变化，在医院里医生给我们作心电图检查时仪器上显示的周期性心电信号。严格来讲，信号和函数是两个截然不同的概念。在信号与系统分析中，信号一般被描述成数学函数。信号是携带信息的真实物理现象，而函数是对信号的描述。信号表示为一个时间的函数。从广义上说，信号是随时间变化的某个物理量。只有变化的物理量才能携带信息。在信号和系统分析中不区分信号和函数的细微差别，而把它们混为一体。

按时间函数的确定性，信号可以分为确定性信号和随机信号。确定性信号是指能够以确定的时间函数来表示的信号，这类信号在定义域的任意时刻都有确定的函数值。一个确定性信号的函数表达式或者波形是确定的。例如，$f(t)=2\sin(5\pi t+60°)$就是一个确定性的信号。随机信号需要用概率密度函数进行描述。例如在 $f(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$中，如果$A$、$\omega_0$ 和 θ 三个参数（它们分别称为正弦信号的振幅、角频率和初相位）有一个或多个不确定，或者服从某个概率分布，则 $f(t)$ 就是一个随机信号。在“信号与系统”中我们只涉及确定性信号，至于随机信号则在“随机信号分析”等课程中专门研究。

信号还可以分为连续时间信号和离散时间信号。通常的数学函数可以表示成 $f(x)$ 的

[1] John McPhee：加拿大工程院院士，Waterloo（滑铁卢）大学教授。

形式，这里 x 是自变量，通常可以是连续实数集合中的任意数值。如果自变量是时间 t，且可以取任何实数，那么 $f(t)$ 就被称为连续时间函数。$f(t)$ 在连续的时间点上有确定值。这里的“连续”是指连续的时间点，与高等数学课程中连续函数中的“连续”是两个不同的概念。离散时间信号仅仅在离散的时间点上有确定值，记为 $x(n)$，这里自变量 n 只取离散的整数值，所以称之为离散信号或离散序列。

在计算机及数字通信系统中处理的就是离散时间信号。它们是由原始的连续时间信号经过采样、量化和编码得到的。采样过程使信号的时间离散化，从而得到连续函数值、离散时间的信号。量化过程使采样信号取值离散化，从而得到取值离散的离散时间信号。编码过程把离散的函数值转化成二进制序列。这三个独立的步骤由单个模数转换器（A/D）完成。

第二节　系统的基本概念

实际的系统可以是一个程控电话系统、计算机网络系统、校园一卡通系统、票务预订系统、火车调度系统、股票交易系统或车间自动流水线系统等等。有些系统可以用数学语言进行完整而精确的描述和分析；而另外一些系统构成非常复杂，对它们的描述和分析几乎不可能。我们把系统定义为任何能对输入信号或激励信号产生相应响应的有机整体。我们着重考虑系统对激励的响应，而不涉及、不研究系统的具体实现和构成。系统通过对激励的响应来完成特定的功能。若 $x(t)$ 代表系统的输入或激励信号，$y(t)$ 代表系统对 $x(t)$ 的输出或响应信号，则可把系统用数学语言描述如下：

$$x(t)\rightarrow y(t) \tag{1-1}$$

这里所示的是单输入单输出系统，实际的系统可以有多个输入和多个输出。系统的功能和特性是通过对激励的响应来体现和表征的。图 1－1 为系统的框图表示。

系统可分为线性系统和非线性系统。线性系统由线性元件组成；非线性系统含有非线性元件。线性系统同时具有齐次性和叠加性。其中齐次性是指，某个系统对任意常数 k 若有：

$$x(t)\rightarrow y(t) \tag{1-2}$$

则有：

$$k\cdot x(t)\rightarrow k\cdot y(t) \tag{1-3}$$

由此可见，齐次性是指若对系统的激励变为原来的 k 倍，则相应的响应也变为原来的 k 倍。齐次性也称为比例性。系统的齐次性如图 1－2 所示。

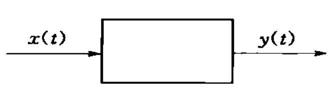

图 1－1　系统的框图表示

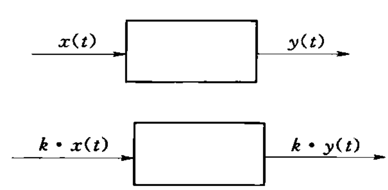

图 1－2　系统的齐次性

叠加性是指对任意的正整数 n，若有：

$$x_1(t) \to y_1(t), \cdots, x_n(t) \to y_n(t) \tag{1-4}$$

则有：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \to \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \tag{1-5}$$

由此可见，叠加性是指多个激励信号同时作用于一个系统时，系统的响应为多个激励分别作用于系统的响应之和。系统的叠加性如图 1-3 所示。

同时满足线性和叠加性的系统简称为线性系统。由此可知，线性系统具有以下特性：对任意的正整数 n，若有：

$$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t), \cdots, x_n(t) \to y_n(t) \tag{1-6}$$

则对任意非零常数 k_i，有：

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t) \to \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(t) \tag{1-7}$$

线性系统的特性如图 1-4 所示。

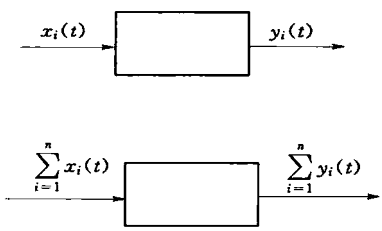

图 1-3　系统的叠加性

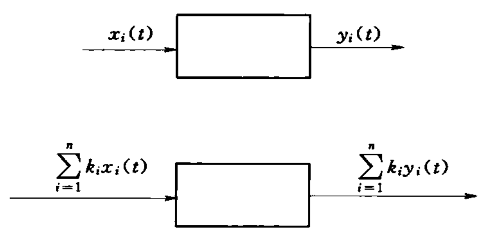

图 1-4　线性系统

系统还可以分为连续时间系统和离散时间系统。前者处理连续信号，它的激励和响应在连续时刻上都有确定意义；后者处理离散信号，它的激励和响应只在离散的时刻上有确定意义。我们对连续时间系统和离散时间系统的分析和研究是独立进行的，但基本方法是平行和类似的。对连续时间系统的分析方法，在离散时间系统中都有很好的借鉴。

第三节　系统的稳定性和因果性

一、稳定性

如果一个信号 $x(t)$ 是有界的，则意味着在整个时间域内，它的模值都小于或等于某个有限值，即满足：

$$|x(t)| \leqslant A < \infty \tag{1-8}$$

如果一个系统对于有界输入的响应也是有界的，那么称该系统为**有界输入有界输出**（Bounded Input Bounded Output，BIBO）**稳定**，简称**稳定**。

BIBO 稳定性通过系统的输入和输出来确定，而系统的输入和输出都是在外部端口进行的，所以这种稳定是外部稳定。然而，系统的内部行为没办法通过外部端口确定。因此，BIBO 稳定并不能保证系统内部是稳定的。其他形式的稳定性有渐进稳定性和李雅普诺夫（Liapunov）稳定性。如果一个系统的零输入响应（输入信号为零时的响应，由系统

的非零起始状态所致）随时间衰减为零，就认为这个系统是渐进稳定的。以后会知道，渐进稳定性隐含着 BIBO 稳定性。BIBO 稳定性和渐进稳定性常常通用。具有一个或多个电阻元件的无源线性系统永远是渐进稳定的，因为无论系统初始状态是什么，它的电阻元件都会一直消耗能量，直到系统趋于零状态。如果一个系统的零输入响应总是有界的（它可以近似为零，也可以不为零），就认为这个系统是李雅普诺夫稳定的。带电阻元件的无源线性系统具有渐进稳定性和**李雅普诺夫稳定性**。只含有无损元件（如电感 L 和电容 C）的无源系统，具有李雅普诺夫稳定性，但不具有渐进稳定性。这样一个系统中的能量由于其非零初始值而保持为一个常数；因系统是无源的而不会增加，也因系统是无损的而不会衰减。在信号与系统分析中，我们只研究 BIBO 稳定，今后为了方便起见，简称为**稳定**。

二、因果性

在现实的物理世界里，物理可实现系统的响应都发生在激励作用期间或之后，很少发生在激励作用之前，这看起来很自然。然而像后文会提到的理想数字滤波器那样，工程师们在利用一些系统设计方法进行系统设计时，可能得到一些响应在激励作用之前就产生了的系统。这样的系统尽管性能很好，但一般都是不能被真正实现的。

实际系统的响应只发生在激励作用期间或之后，这是因果性的一种体现。这种特性称为系统的**因果性**。物理可实时实现的系统都是因果系统，因为它们没办法预见将来，也无法预测即将受到怎样的激励。所以物理可实时实现性和因果性本质上是一个概念。因果系统现在时刻的输出只决定于现在和过去的输入，与将来时刻的输入没有任何关系。系统的因果性如图 1-5 所示，从波形上来看，因果系统的响应在输入之后。如果 t 代表当前时刻，t 的左边代表过去时刻，t 的右边代表将来时刻，则因果系统当前时刻的响应只与当前时刻和过去时刻的输入有关，而与将来时刻的输入毫无关系。

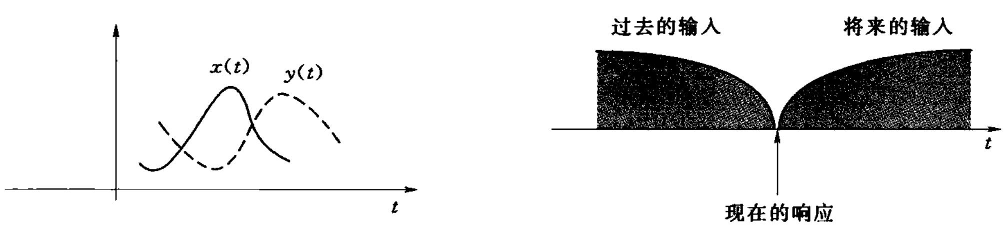

图 1-5　系统的因果性

虽然从严格的意义上讲，所有物理可实现系统都是因果系统，但有些实际的非因果信号处理系统可以非实时地实现。我们来看以下方程描述的系统（平滑滤波器）：

$$y(n)=\frac{1}{k_1+k_2+1}\sum_{l=-k_1}^{k_2}x(n+l) \qquad (1-9)$$

式中 k_1，$k_2>0$。该系统如图 1-6 所示。

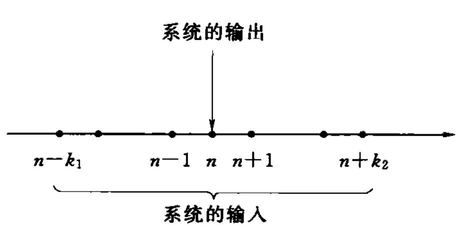

图 1-6　式（1-9）描述的非因果系统

表面上看，系统在 n 时刻的响应不仅与 n 时刻及 n 时刻之后的 k_2 个时刻（即 $n+1$，$n+2$，…，$n+k_2$）有关，还与 n 时刻之前的 k_1 个时刻（即 $n-1$，$n-2$，…，$n-k_1$）有关。但实际上，

系统得到的 n 时刻的响应是在所有 k_1+k_2+1 个时刻的激励数据已经被记录下来，才能通过式（1－9）得到。显然系统在 n 时刻的响应不能实时地获取，或者说有时延，所以如果对实时性要求很高，这个系统就没有任何实际意义。或者说，该系统只能非实时地实现。式（1－9）是一个滑动平均（Moving Average，MA）滤波器，用以消除随机噪声的影响，它通过平均运算，使得随机噪声正负抵消。

第四节　线性时不变系统

系统还可以分为时变系统和时不变系统。时变系统含有参数随着时间而变化的元件；时不变系统不含有参数随着时间而变化的元件，所有元件的性质都是恒定不变的。通常的电阻、电容和电感元件的参数 R、C 和 L 不随激励施加的时刻不同而变化。变容元件的电容量随着时刻而变化。时变系统的元件随着时间而变化，所以它的特性也随着时间而变化。系统的时不变性是指，若

$$x(t) \rightarrow y(t) \tag{1-10}$$

则对任意 t_0 有

$$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0) \tag{1-11}$$

这就是说，如果对时不变系统的激励延迟 t_0，则相应的响应也延迟同样的时间，除此之外，响应没有任何变化（不同）。不满足时不变性的系统称为**时变系统**。图 1－7 所示为时不变系统的响应，从波形上看，对时不变系统来说，输入信号的水平移动对系统的影响体现在对响应的同样大小的水平移动。

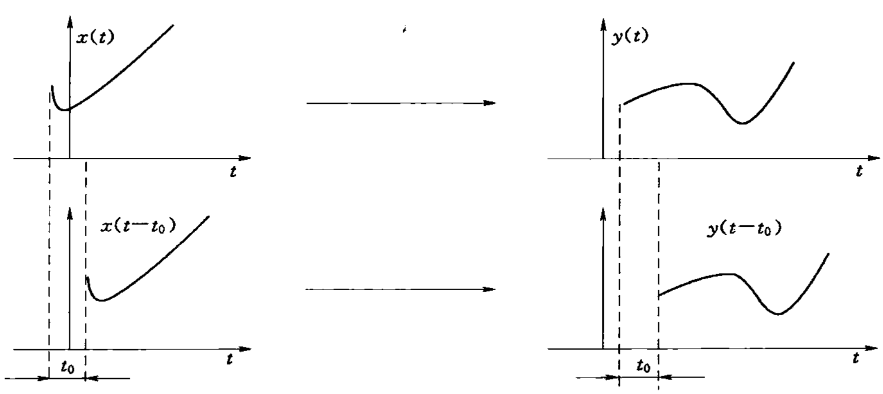

图 1－7　系统的时不变性

同时具有线性和时不变性的最简单的一类系统，称之为**线性时不变**（Linear Time Invariant，LTI）系统。对任意整数 n、常数 t_i 和常数 k_i，若对时不变系统有：

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t), \cdots, x_n(t) \rightarrow y_n(t) \tag{1-12}$$

则对该时不变系统有：

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t-t_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(t-t_i) \tag{1-13}$$

LTI 系统有如下**微分特性**：若

$$x(t) \to y(t) \tag{1-14}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \tag{1-15}$$

证明：已知 $x(t) \to y(t)$，对任意 Δt，由时不变性得

$$x(t+\Delta t) \to y(t+\Delta t) \tag{1-16}$$

再由线性得：

$$x(t+\Delta t)-x(t) \to y(t+\Delta t)-y(t) \tag{1-17}$$

再由比例性得：

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \to \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \tag{1-18}$$

对上式两边取极限得：

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \to \lim_{\Delta t \to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \tag{1-19}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \tag{1-20}$$

同理可证，LTI 系统具有以下**积分特性**：若

$$x(t) \to y(t) \tag{1-21}$$

则

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \to \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-22}$$

例 1-1：判断由下列方程描述的系统是否是线性时不变系统。

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=t \cdot x(t)$ (1-23)

(2) $y(t)=3x(t)+3$ (1-24)

(3) $y(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+3x(t)$ (1-25)

(4) $y(t)=x(t)+\int_0^t x(u)\mathrm{d}u$ (1-26)

解：(1) 令 $x(t-t_0) \to y_1(t)$，由方程式 (1-23) 可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t)+2y_1(t)=t \cdot x(t-t_0) \tag{1-27}$$

在原方程式 (1-23) 中，以 $t-t_0$ 替换 t 得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t-t_0)+2y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-t_0) \tag{1-28}$$

显然

$$y_1(t) \neq y(t-t_0) \tag{1-29}$$

否则若 $y_1(t)=y(t-t_0)$成立，将此式代入式（1－27）左边得：

$$\frac{d}{dt}y(t-t_0)+2y(t-t_0)=t\cdot x(t-t_0) \tag{1-30}$$

将上式与式（1－28）比较，显然两式左边相等但右边不等，矛盾，所以 $y_1(t)\neq y(t-t_0)$，这表明：

$$x(t-t_0)\not\rightarrow y(t-t_0) \tag{1-31}$$

其中“$x(t)\not\rightarrow y(t)$”表示系统对 $x(t)$ 的响应不是 $y(t)$，上式表明系统对 $x(t-t_0)$ 的响应与系统对 $x(t)$ 的响应平移得到的 $y(t-t_0)$ 不相等，所以系统是时变的。时变性由描述系统的微分方程（1－23）不是常系数所致，具体地讲，原方程右边 $x(t)$ 的系数 t 是 t 的函数，是时变的，从而导致系统也是时变的。系统的线性由读者自己验证。

（2）设 $x(t)\rightarrow y(t)$，由方程式（1－24）可得：

$$y(t)=3x(t)+3 \tag{1-32}$$

显然

$$k\cdot x(t)\not\rightarrow k\cdot y(t) \tag{1-33}$$

否则若 $k\cdot x(t)\rightarrow k\cdot y(t)$成立，将此式代入式（1－32）左边得：

$$k\cdot y(t)=k\cdot 3x(t)+3 \tag{1-34}$$

式（1－32）两边同乘以 k，得：

$$k\cdot y(t)=k\cdot[3x(t)+3] \tag{1-35}$$

将以上两式进行比较，显然两式左边相等但右边不等，矛盾，所以 $k\cdot x(t)\not\rightarrow k\cdot y(t)$，或者说系统是非线性的。系统的非线性由描述系统的微分方程不是零常数项所致，具体地讲，原方程右边的常数项为 3，是非零的，从而导致系统是非线性的。系统的时不变性由读者自己验证。

（3）系统是线性时不变系统。描述该系统的是线性常系数微分方程。这里仅验证时不变性。设 $x(t)\rightarrow y(t)$和 $x(t-t_0)\rightarrow y_1(t)$，由方程式（1－25）可得：

$$y_1(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t-t_0)+2\frac{d}{dt}x(t-t_0)+3x(t-t_0) \tag{1-36}$$

在原方程式（1－25）中，以 $t-t_0$ 替换 t 得：

$$y(t-t_0)=\frac{d^2}{dt^2}x(t-t_0)+2\frac{d}{dt}x(t-t_0)+3x(t-t_0) \tag{1-37}$$

比较以上两式，可知右边相等，所以左边也相等，即：

$$y_1(t)=y(t-t_0) \tag{1-38}$$

考虑到 $x(t-t_0)\rightarrow y_1(t)$，所以：

$$x(t-t_0)\rightarrow y(t-t_0) \tag{1-39}$$

这表明系统是时不变的。

（4）设 $x(t)\rightarrow y(t)$，则由方程式（1－26）可得：

$$y(t-t_0)=x(t-t_0)+\int_0^{t-t_0}x(u)du \tag{1-40}$$

设 $x(t-t_0)\rightarrow y_0(t)$，由方程式（1－26）可得：

$$y_0(t)=x(t-t_0)+\int_0^{t}x(u-t_0)du \tag{1-41}$$

需要注意的是方程式（1－26）右边的被积函数 $x(u)$ 也要平移为 $x(u-t_0)$。在上式右边进行变量代换：$v=u-t_0$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}v$，积分区间变为 $-t_0\leqslant v\leqslant t-t_0$，这样有：

$$y_0(t)=x(t-t_0)+\int_{-t_0}^{t-t_0}x(v)\mathrm{d}v \tag{1-42}$$

将上式右边的 v 变回 u 可得：

$$y_0(t)=x(t-t_0)+\int_{-t_0}^{t-t_0}x(u)\mathrm{d}u$$

将上式与式（1－40）比较可知 $y(t-t_0)$ 和 $y_0(t)$ 两者不相等，所以系统是时变的。系统的线性很容易验证，由读者自己验证。

式（1－24）是一个线性常系数微分方程，但描述的系统却是非线性的。事实上，这类系统称为“增量线性系统”。记输入为零时的响应为 $y_0(t)$，显然：

$$y_0(t)=3 \tag{1-43}$$

则该系统的响应可以分解为一个线性系统对 $x(t)$ 的响应与 $y_0(t)$ 之和，如图 1－8 所示。设 $x_1(t)\rightarrow y_1(t)$ 和 $x_2(t)\rightarrow y_2(t)$，则有：

$$x_2(t)-x_1(t)\rightarrow y_2(t)-y_1(t)=3[x_2(t)-x_1(t)] \tag{1-44}$$

证明：因为 $x_1(t)\rightarrow y_1(t)$ 和 $x_2(t)\rightarrow y_2(t)$，由方程式（1－24）可得：

$$y_1(t)=3x_1(t)+3 \tag{1-45}$$

$$y_2(t)=3x_2(t)+3 \tag{1-46}$$

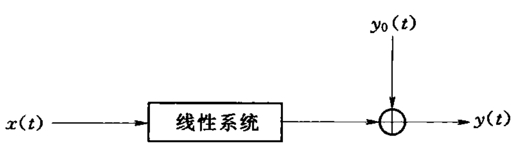

图 1－8　增量线性系统

将以上两式左右两边分别相减即可得式（1－44），这表明该系统对任意两个输入信号的响应之差与两个输入信号之差成正比，比例系数就是方程对应的常系数。

式（1－25）描述的系统只对零状态响应而言是线性时不变的。在第三章中我们将会看到只有线性常系数微分方程的初始状态为零，由它描述的系统才是线性时不变系统。

第五节　信号与系统分析的内容及方法

在信号与系统分析中，主要研究确定性信号、线性时不变系统及线性时不变系统对确定性信号的响应。几乎不涉及随机信号、非线性系统或时变系统。线性时不变系统分析的任务，通常是通过线性时不变系统对特定激励信号的响应来确定系统的特性；有时是求线性时不变系统对已知输入的响应；有时是分析系统的稳定性或因果性等。分析线性时不变系统的第一步是建立系统的数学模型。第二步是通过一定的条件求解特定的问题。在连续时间线性时不变系统中，选用线性常系数微分方程作为数学模型。激励和响应通过方程联系起来。求解线性常系数微分方程的最基本方法是在时间域直接进行。后来拉普拉斯变换法得到了广泛应用；再后来就是利用卷积积分的方法在时域直接进行。在离散时间线性时不变系统中，选用线性常系数差分方程作为数学模型。求解差分方程同样既可以在时域直