线性代数与概率统计学习指导

主编 朱宝彦 刘玉柱 戚 中

辽宁大学出版社

线性代数与概率统计学习指导

主　编　朱宝彦　刘玉柱　戚　中
副主编　缪淑贤　王金宝　李汉龙　闫红梅

辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率统计学习指导/朱宝彦，刘玉柱，戚中主编. 一沈阳：辽宁大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-5610-5915-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①朱…②刘…③戚… Ⅲ. ①线性代数一高等学校一教学参考资料②概率论一高等学校一教学参考资料③数理统计一高等学校一教学参考资料 Ⅳ. 0151.2 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 166526 号

出 版 者：辽宁大学出版社
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码：110036）
印 刷 者：辽宁华育印务有限公司
发 行 者：辽宁大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印 张：20.25
字 数：500 千字
出版时间：2009 年 9 月第 1 版
印刷时间：2009 年 9 月第 1 次印刷
责任编辑：赵光辉
封面设计：邹本忠 徐澄玥
责任校对：齐 悦

书 号：ISBN 978-7-5610-5915-9
定 价：29.80 元

联系电话：024—86864613
邮购热线：024—86830665
网 址：http://press.lnu.edu.cn
电子邮件：lnupress@vip.163.com

内容简介

本书是以教育部“工科数学课程教学指导委员会”制定的《线性代数与概率统计课程教学的基本要求》为依据，结合目前该门课程的教学实际情况编写的。本书与同济大学《线性代数》（第五版）、浙江大学《概率论与数理统计》（第四版）教材同步。上篇为线性代数篇，共分六章；下篇为概率统计篇，共分九章。每章分教学基本要求、本章导学、知识点精要、疑难问题及常见错误例析、典型例题解析、同步习题及解答六个部分。为了提高学生的实践能力，我们还介绍了MATLAB的基本操作及其在线性代数和概率统计中的应用，给出了相应的例题并编程求解。

本书突出重点，化解难点，侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练。

本书可作为理工科院校本科或专科学生复习和考研的参考书或辅导书，也可以作为相关课程教学人员的教学参考书。

前 言

线性代数与概率统计是理工科高等院校的一门重要的基础课，它对学生综合素质的培养及后续专业课程的学习起着极其重要的作用。

随着科学技术的迅速发展，数学正在日益渗透到各个专业领域，已成为人们学习和研究各门专业知识的重要工具。掌握好线性代数与概率统计的基础知识、基本理论及基本技能和分析方法，对学生专业课程的学习有很大帮助。同时，线性代数与概率统计也是工科院校硕士研究生入学考试的必考科目。由于线性代数概念较抽象、理论性较强，而概率统计研究对象的不确定性，都给学生学习带来了一定的难度。为了克服这种困难，我们组织了具有丰富教学经验的教师，以教育部“工科数学课程教学指导委员会”制定的《线性代数与概率统计课程教学的基本要求》为依据，结合目前该门课程的教学实际情况，配合同济大学的《线性代数》（第五版）、浙江大学《概率论与数理统计》（第四版）教材，编写了《线性代数与概率统计学习指导》一书。该书集编写组教师多年的教学经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中。它将会成为学生学习线性代数与概率统计的良师益友。

本书以基本题为主，侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练，突出重点，化解难点，既可帮助学生解决教材中的一些难点内容，又能使学生学会举一反三、触类旁通，提高分析问题与解决问题的能力以及理论联系实际的能力。

全书各章分为教学基本要求、本章导学、知识点精要、疑难问题及常见错误例析、典型例题解析、同步习题及解答六个部分。

（1）教学基本要求：根据教育部“工科数学课程教学指导委员会”制定的《线性代数与概率统计课程教学的基本要求》为依据，明确提出了各章教学内容的基本要求。

（2）本章导学：指出本章的知识结构和内在与外在联系，结合教学经验，指出该章应该掌握的重点、难点内容，以及学习的方法。

（3）知识点精要：重点总结了该章的主要定义及重要命题，补充了书上

没有、但学生在学习过程中经常利用的结论。

(4) 疑难问题及常见错误例析：对学生在学习过程中遇到的疑难问题及常见错误用例题或问答方式进行了分析和解答，以帮助学生加深对概念的理解和运算方法的掌握。

(5) 典型例题解析：列举了该章的重点题型，并归纳总结了各种题型的解决方法、技巧和应注意的问题，以进一步提高学生综合分析问题和解决问题的能力。

(6) 同步习题及解答：每章最后都给出了与教学内容同步的练习题及详细的解答，以帮助学生巩固学习内容，检查学习效果。

为了提高学生的实践能力，在上篇线性代数部分和下篇概率统计部分的最后部分，还介绍了 MATLAB 的基本操作及其在线性代数与概率统计中的应用，给出相应的例题并编程求解，使学生了解计算机技术在解决线性代数与概率统计问题中的应用，提高学生的学习兴趣。

本书上篇为线性代数篇，共分六章。第 1 章由隋英编写，第 2 章由赵恩良编写，第 3 章由李汉龙编写，第 4 章由朱宝彦编写，第 5 章由付春菊编写，第 6 章由畅春铃编写。下篇为概率理统计篇，共分九章。第 1 章由刘玉柱编写，第 2 章由顾艳丽编写，第 3 章由闫红梅编写，第 4 章和第 5 章由王金宝编写，第 6 章由孙海义编写，第 7 章由戚中编写，第 8 章由缪淑贤编写，第 9 章由畅春铃编写。

本书是线性代数与概率统计学习指导书，可作为理工科院校本科或专科学生复习和考研的参考书或辅导书，也可以作为相关课程教学人员的教学参考书。

本书的编写得到了沈阳建筑大学教务处、辽宁大学出版社的大力支持，在此表示深深的感谢。

由于作者水平所限，书中难免有不妥之处，敬请专家、读者批评指正。

目　录

上篇　线性代数

下篇　概率统计

上　篇

线性代数

第 1 章　行列式

1.1　基本要求

(1) 理解 n 阶行列式的定义.

(2) 理解 n 阶行列式的性质及行列式的展开定理，掌握行列式的计算.

(3) 会用克拉默法则解决一些简单的线性方程组的求解问题.

1.2　本章导学

行列式是一个很重要的数学工具，在数学及其它学科分支中有着广泛的应用. 本章先介绍了行列式的定义、性质及其计算方法，然后介绍了用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

行列式的计算是本章的重点，也是难点. 行列式的计算与证明方法较多，技巧性较强. 要熟练掌握这些方法与技巧，首先必须认真理解行列式的定义、性质及展开定理. 因为不论采用什么方法计算或证明行列式，其实质都是以行列式的定义、性质及展开定理等为依据，对行列式实施简化、变形，从而使计算变得容易；其次，要掌握行列式的各种计算方法. 对于一个具体的行列式计算或证明问题，要注意观察其元素的排列规律和特点，从而采用相对而言比较恰当的方法来解题. 学生们要通过多做练习熟练计算技巧，提高解题的综合能力.

学习本章时，还要掌握排列的逆序数计算方法及对换与排列的奇偶性的关系，掌握范德蒙行列式的结构特点及结论，并能应用其解决一些简单的行列式计算问题，会运用克拉默法则求解简单的线性方程组.

1.3　知识点精要

1.3.1　全排列及其逆序数

1. 全排列

定义　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). 全排列共有 $n!$ 种.

2. 逆序数

定义　在 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，则称这两个元素形成一个**逆序**，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

3. 对换

(1) 定义　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这一过程称为**对换**. 将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

(2) 性质

① 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

② 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

1.3.2　n 阶行列式

1. 定义　称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t_1}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$

$$=\sum(-1)^{t_2}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

$$=\sum(-1)^{t_3}a_{p_1 q_1}a_{p_2 q_2}\cdots a_{p_n q_n}$$

为 n 阶行列式，简记作 $\det(a_{ij})$，其中，行标 $p_1p_2\cdots p_n$、列标 $q_1q_2\cdots q_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列，t_1 为行标排列的逆序数，t_2 为列标排列的逆序数，t_3 为行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和，数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

注意　①"$\sum$"表示 $n!$ 项求和，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.

② n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积.

③ 行列式的每一项的正负号由下标排列的逆序数决定.

④ $n=2$、3 时，行列式计算遵循对角线法则，但对角线法则对 4 阶及 4 阶以上行列式不成立.

2. 几种特殊行列式的值

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注意：二阶行列式和三阶行列式计算遵循对角线法则.

(3) 对角行列式

对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角行列式**. 其值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},\quad \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(4) 三角形行列式

对角线以下(上)的元素全为零的行列式称为上(下)**三角行列式**. 其值为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a\,n2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(5) 转置行列式

把行列式 D 的行列互换所得的行列式称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T}.

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

注意　有的书上也把转置行列式记为 D'.

(6) 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j),$$ 其中“Π”表示乘积符号.

1.3.3　行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 1　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 2　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

1.3.4　行列式按行(列)展开法则

1. 余子式与代数余子式

定义　在 n 阶行列式中,把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,剩下的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的**代数余子式**.

2. 行列式按行(列)展开法则

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,行列式任意行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \quad \text{或} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

其中,$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

1.3.5　n 元线性方程组

1. 非齐次与齐次线性方程组

定义　n 元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1}$$

当右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,(1) 式叫做**非齐次线性方程组**;当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,(1) 式叫做**齐次线性方程组**.

2. 克拉默法则

如果 n 元线性方程组(1) 系数行列式不等于零,即 $D\neq 0$,则有惟一解:

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n).\ \text{其中}:D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意　① 如果线性方程组无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.

② 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,则齐次线性方程组只有零解.

③ 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

*1.3.6　拉普拉斯定理

1. k 阶子式与余子式定义

定义　在 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列($k \leqslant n$)，位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按照原来的位置组成一个 k 阶行列式 M，称为行列式 D 的一个 **k 阶子式**. 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 k 阶子式 M 的**余子式**.

设 M 是 D 中位于 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列的元素构成的 k 阶子式，其余子式为 M'. 记 $A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'$，则称 A 为 k 阶子式 M 的**代数余子式**.

2. 拉普拉斯定理

设在行列式 D 中任意选定了 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 行(列)，则由这 k 行(列)元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

即：设 D 中取定 k 行(列)得到的所有 k 阶子式分别为 $M_1, M_2, \cdots M_t$，它们的代数余子式为 $A_1, A_2, \cdots A_t$，则 $D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t$.

1.4　疑难问题及常见错误例析

例 1.4.1　四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24$，是否正确？

解　不正确.

正确解法是：由于该行列式只有次对角线上有非零元素，而其它元素全为零，可以用行列式定义计算. 先考虑非零项，只有一项：$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$，再考虑符号，由于列标排列的逆序数为 6，故 $D = (-1)^6 \cdot 24 = 24$.

例 1.4.2　在一个 n 阶行列式中，等于零的元素如果比 $(n^2 - n)$ 还多，那么这个 n 阶行列式必为零，这种说法对吗？

解　这种说法是正确的.

因为 n 阶行列式 D 的值是 $n!$ 项的代数和，且每项都是位于 D 不同行不同列的 n 个元素的乘积.

又 n 阶行列式 D 中一共有 n^2 个元素，如果等于零的元素比 $(n^2 - n)$ 还多，则不等于零的元素就一定比 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 还少，即此时 D 中最多有 $n-1$ 个元素不等于零. 所以 D 的 $n!$ 项中每一项的 n 个元素中必有零元素出现，即 $n!$ 项的每一项都是零，故 $D = 0$.

例 1.4.3　在什么情况下才用定义计算行列式？

解　从理论上讲，任何一个行列式都可以用定义来计算，但应该注意的是，当一个行列式的阶数较高时，按定义计算行列式的运算量大，例如用定义来计算一个 20 阶的行列式需要计算 $19 \times 20!$ 次乘法运算，姑且不说加减运算. 因此，对于较高阶的行列式来说一般用行列式的定义来计算几乎是不可能的，只有当行列式的结构十分简单或阶数不超过三阶时，才考虑用定义来计算.

例 1.4.4 两个行列式相等，则它们的阶一定相等吗？

解 否. 这是因为，两个行列式相等指的是行列式的值相等，与行列式的阶数无关.

1.5 典型例题解析

1.5.1 求排列的逆序数

例 1.5.1 排列 134782695 的逆序数为________.

解 10.

在排列 134782695 中，1、3、4、7、8、9 前面没有比它们大的数，故它们的逆序数均为 0；2 的逆序数为 4；6 的逆序数为 2；5 的逆序数为 4；因此这个排列的逆序数为：$t = 0 + 4 + 2 + 4 = 10$.

例 1.5.2 如果 $abcdef$ 是偶排列，则 $afcdeb$ 是________.

解 奇排列.

排列 $afcdeb$ 是排列 $abcdef$ 经过 b，f 对换后生成的，而对换改变排列的奇偶性. 故如果 $abcdef$ 是偶排列，则 $afcdeb$ 是奇排列.

1.5.2 行列式的计算与证明

行列式的计算与证明方法较多，技巧性比较强，方法也较灵活，现归类总结如下.

1. 用 n 阶行列式定义计算行列式

例 1.5.3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 因为 D 中不为零的元素只有 $a_{12} = 1, a_{23} = 2, \cdots, a_{n-1,n} = n-1, a_{n1} = n$，故在 D 的 $n!$ 项中，不为零的项只有 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1} = n!$，其列标排列为 $234\cdots n1$，逆序数为 $n-1$，所以，$D = (-1)^{n-1}n!$.

例 1.5.4 利用行列式的定义，证明 $D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

证明 由于行列式只有两行与两列元素非零，其它元素全为零. 五阶行列式的每一项是五个元素的乘积且取之于不同行与不同列，故五个元素中至少有一个为零. 从而每项均为零，故行列式等于零，即 $D_5 = 0$.

例 1.5.5　根据行列式定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解　根据行列式定义,只有对角线上元素相乘才出现 x^4,且该项为正,即 $2x^4$. 故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 2. 同理,含 x^3 的项也只有一项,即对应于 $(-1)^t a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^t x^3$ 且列标所构成的排列为 2134,其逆序数 $t=1$. 故 x^3 的系数为 -1.

例 1.5.6　由计算 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$ 证明奇偶排列各半.

证明　设所给的行列式 D 为 n 阶行列式,则 D 展开后共有 $n!$ 项,显然每项都是 1. 又因 D 的各行元素相同,所以 $D=0$,故 $n!$ 项中一半带正号,另一半带负号. 由于正项对应偶排列,负项对应奇排列,故奇偶排列各半.

【评注】 用行列式的定义计算行列式不是计算行列式的一般方法,只有当行列式的元素中只有少数元素不为零时,才可考虑用行列式定义计算.

2. 利用行列式的性质计算或证明行列式

例 1.5.7　如果 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=M$,则 $\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{12} & a_{13}\\ 2a_{21} & -2a_{22} & 2a_{23}\\ 3a_{31} & -3a_{32} & 3a_{33}\end{vmatrix}=$ ________.

解　$-6M$.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{12} & a_{13}\\ 2a_{21} & -2a_{22} & 2a_{23}\\ 3a_{31} & -3a_{32} & 3a_{33}\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\div 3]{r_2\div 2}6\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & -a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & -a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\xlongequal{c_2\div(-1)}-6\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-6M.$$

例 1.5.8　不计算行列式的值,利用行列式的性质证明行列式 $\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 5 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix}$ 能被 17 整除.

证明　将行列式第一列乘以 100,第二列乘以 10,都加到第三列上去,即得

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 5 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 204\\ 5 & 2 & 527\\ 2 & 5 & 255\end{vmatrix},$$

显然,等号右端行列式的第三列元素都是 17 的倍数,所以行列式能被 17 整除.

例 1.5.9　计算行列式　$D_4=\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}$.

解　计算此行列式的最大困难,在于第二、三、四列元素均由二数和的平方组成,当然不能简单选择将这些元素展开计算. 因此,要设法消去平方.

$$D_4 \xlongequal[c_2 - c_1]{\substack{c_4 - c_3 \\ c_3 - c_2}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(第三列与第四列元素对应成比例).

例 1.5.10 计算行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d_1 \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d_1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 该行列式的第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 和第 j 行第 i 列的元素 a_{ji} 仅差一个负号，即 $a_{ij} = -a_{ji}$，具有这样性质的行列式称为**反对称行列式**.

$$D_5 = D_5^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d_1 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,5]{r_i/(-1)} (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d_1 \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d_1 & 0 \end{vmatrix} = -D_5,$$

解得：$D_5 = 0$.

【评注】由该方法的一般性，可得出结论：奇数阶的反对称行列式等于零.

例 1.5.11 证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证明 左 $= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

3. 将行列式化为上(下)三角形行列式进行计算

将行列式化为上(下)三角形行列式进行计算是一种常用的方法. 这种方法常适用于高