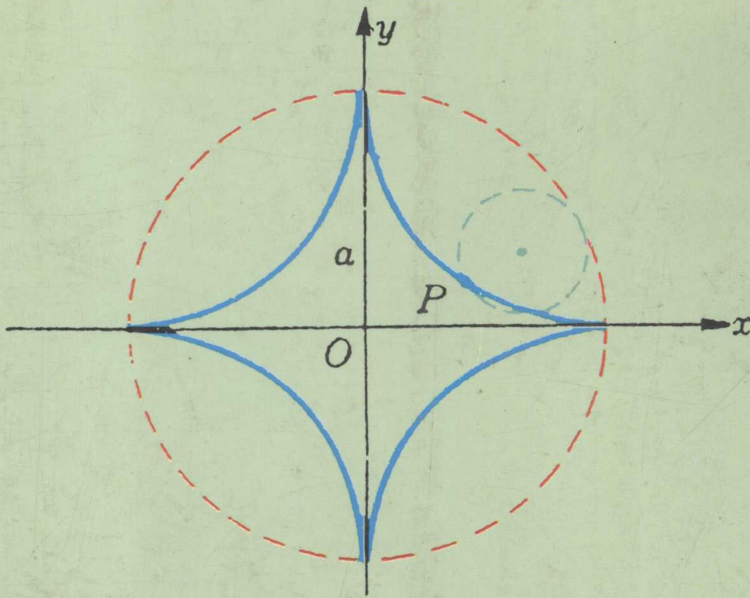
◎二技·插大·研究所

微積分

系統整理與實戰研究

(下)



蔣正明 編著
蔣榮宗 校訂

千華出版公司 印行

版　　權

之　　章

微積分 系統整理 實戰研究 （下）

編 著 者：蔣 正 明　　校 訂：蔣 榮 宗
發 行 人：廖 雪 鳳
發 行 所：千華出版公司
地 址：臺北市金山南路二段 138 號 2 樓
電 話：(02)3952248 • 3952249
傳 眞：(02)3962195
郵 撥：第 01010213 號　本公司帳戶
登 記 證：行政院新聞局局版台業字第 3388 號
印 刷 所：雨 利 美 術 印 刷 公 司
中 華 民 國 81 年 3 月 15 日 初版

定　　價： 320 元

序　　言

親愛的同學，求學的過程中，好書相伴，手不釋卷，是何等的快樂呢！甘之如飴 。

筆者任教全國各大補習班，以豐富而寶貴的教學經驗，著手撰寫本書，力求本書之完整而具系統性，且利於研讀消化吸收，尤以升學考試爲主，裨囊括所有的考題類型，由淺入深，漸至佳境，務使學生建立微積分的全部觀念，且在熟讀、演練本書後，能夠在考場上獨佔鰲頭。

全書內容精彩，含 **Purcell**、**Anton**、**JK**、**Thomas** 各版本原文書之精華與**80年度最新試題大觀**，題題都可能是教授出題的題材，具典型代表，深切掌握命題的方向。全書內容之精心安排如下：

- 思考流程圖與系統整理
- 觀念分析與實戰問題研究
- 快攻試題演練（包羅英文試題）

研讀時循序漸進，系統整理複習，動筆演練思考，則功力卓然大增，定獲高分。

本書撰寫期間，承蒙中山大學電機系講師林吉聰、清大應數所李懋禎、及補習班可愛的學生們提供寶貴意見資料，就此一併致謝。語末，敬祝親愛的讀者諸君

金榜題名！！

蔣正明　走筆傳鐘下

研讀本書掌握原則

針對各校命題方向，演讀本書，務必把握以下原則，定獲高分：

其一　報考二技者：

本書實戰研究與快攻試題中繁雜之計算與證明（解答超過一頁者）可省略不讀，因二技的題目較簡單，每一道題目並無須花太多時間，例如八十年之證明題 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{1000000}}$ 收斂嗎，逕用極限比較審斂法，或積分審斂法，均可快速解出。

其二　報考台大（甲）、清大、交大、研究所者：

本書所有試題均須精讀演練，不容省略，因爲報考這三所名校與研究所之高手如雲，戰況激烈，唯有一流的實力，才能過關斬將榮登金榜，同學們請接受挑戰，何懼之有？

其三　報考其他學校（理工商、台大（乙））者：

本書快攻試題中之繁雜題目（簡答篇幅超過一頁者）可不做，但「實戰研究篇」與快攻試題中的英文試題請多做幾遍，因這類題目深具代表性，命中率非常高。

同學們，「獨學而無友，則孤陋而寡聞」，與一好友共同研究，互相請益問答，那麼讀書之樂趣更濃，且閣下的功力將大增，則榮登金榜，易如反掌，祝好運。

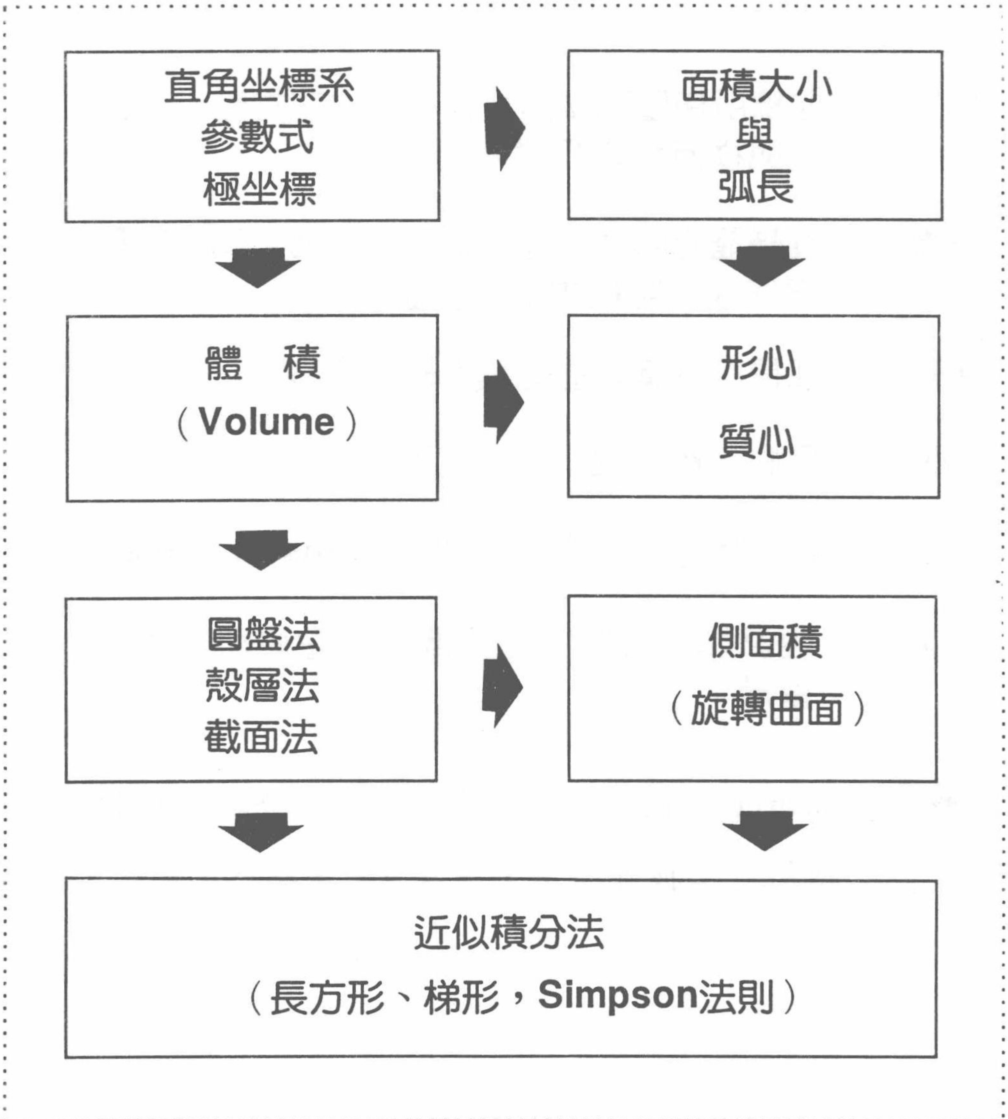
➡微積分常用符號，請留意!!

$\forall$：全部，對每一個（ for all ）
$\exists$：存在，至少存在（ exist ）
$\exists!$：唯一存在　（ exist only one ）
$\Rightarrow$：則，推演得　（ then～）
$\Leftrightarrow$：若且唯若　（ if and only if ）
$\in$：屬於　（ belong to ）
$\ni$：使得　（ such that ）

目　　錄

6 定積分之應用

思考流程圖：



➧本章微積分命題焦點：（把握住方向，事半功倍！！）

焦點 1：曲線所包圍面積的大大小（注意交點、參數式與極方程之公式使用）

焦點 2：旋轉體之體積（圓盤法、殼層法）與一般具規律性之體積求法（截面法）

焦點 3：弧長與旋轉之曲面積 $A=\int_C 2\pi y dL$

焦點 4：形心、質心之求法（物理學上之應用）

焦點 5：近似積分法之梯形法則與**Simpson's rule**

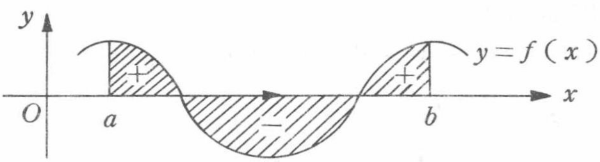
焦點 6：經濟學上應用（插大商科、企研所同學請留意）

➧➧ Ok, Step by step 步步爲營，將定積分之應用化繁爲簡，掌握在手中，一以貫之，豁然開朗！！

Topics 1 曲線所包圍的面積

系統整理

引言：定積分是考慮帶號（正、負符號）的面積，如下圖。



《注意》強調所包圍面積的大小（取絕對值；正值）

1.直角座標系：

(1)曲線與座標軸間之面積：

$y=f(x)$，在 $a\leq x\leq b$，與 x 軸所圍成之區域面積 A

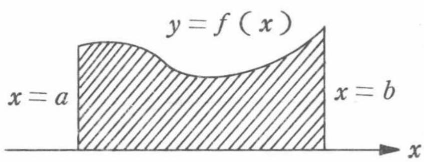
$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

(2)兩曲線間之面積：

兩曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，在 $a\leq x\leq b$，圍成之區域面積 A

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

(3)圖解三重唱！！

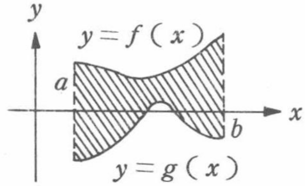


圖(一)曲線與 x 軸所圍的面積

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

$(\because f(x)>0)$

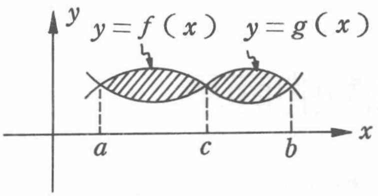


圖(二)兩曲線包圍的面積

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

$(\because f(x)>g(x))$



$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$
$$=\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx$$

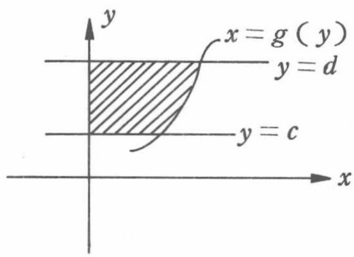
圖(三)含有交點時所包圍的面積

《**注意**》圖(三)中，令 $f(x)=g(x)$，可求得 $x=a$，c，b 之值。

(4)曲線與 y 軸間的面積：

曲線 $x=g(y)$，在 $c\leq y\leq d$，與 y 軸所圍成之區域面積 A

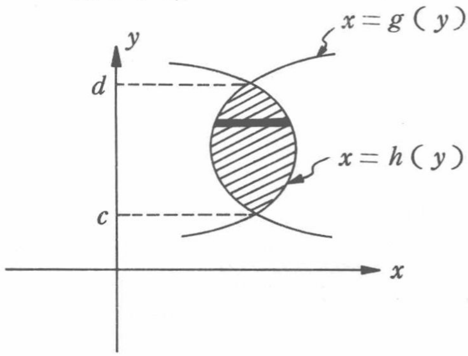
$$A=\int_c^d |g(y)|\,dy$$



(5)兩曲線間之面積：

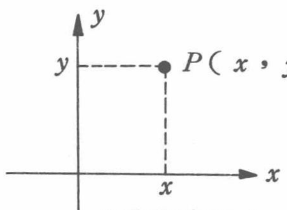
兩曲線 $x=g(y)$，$x=h(y)$，$y\in[c，d]$，圍成之區域面積 A

$$A=\int_c^d |g(y)-h(y)|\,dy$$

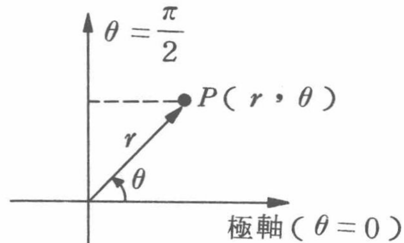


《**注意**》在上圖形中，令 $g(y)=h(y)$，求得 $y=c$，d 之值。

2. 極座標系：



（直角座標）



（極座標）

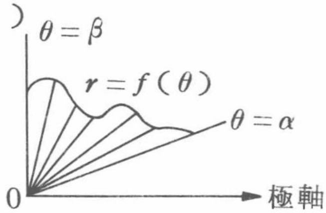
其中 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$　　　$\therefore x^2+y^2=r^2$

以上爲直角座標轉換成座標之變換公式。

《注意》極座標欲轉換成直角座標可經由 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$變換之。有關各種極座標曲線之圖形，逕參考觀念分析1，OK！

3. 極座標的面積求法（命題有逐年增加的趨勢！！）



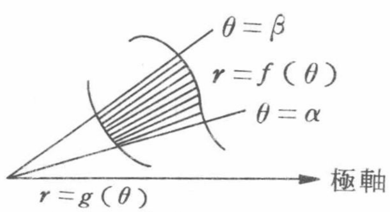
(1) $r=f(\theta)$ 在〔α，β〕上連續，則面積 A

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$$

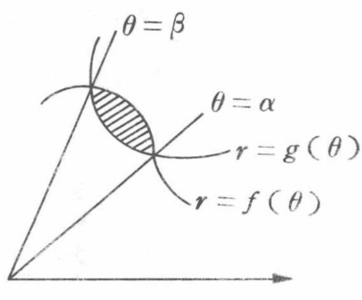
$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta$$

(2)若兩連續曲線 $r=f(\theta)$，$r=g(\theta)$，$f(\theta)>g(\theta)$ 對任一 $\theta\in$〔α，β〕而言均成立，則其所圍面積 A

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f^2(\theta)-g^2(\theta)\right]d\theta$$



圖(一)不含交點



圖(二)含有交點

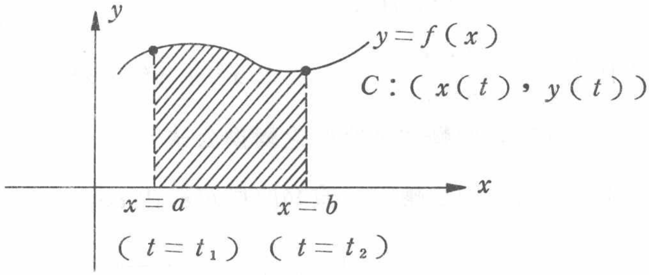
《注意》圖(二)中，令 $f(\theta)=g(\theta)$，可求得 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 之兩條直線。

4. 參數式之面積求法：

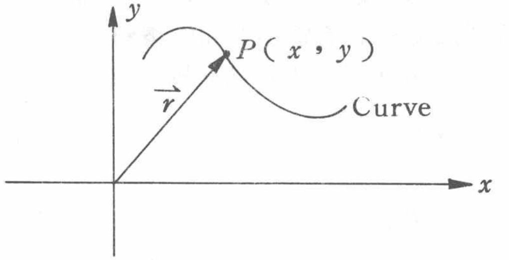
C：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ x，y為 t 之參數式，則面積 A

$$A = \int_a^b |y|\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \left| y \frac{dx}{dt} \right| dt$$

$x \in [a, b]$，$t \in [t_1, t_2]$



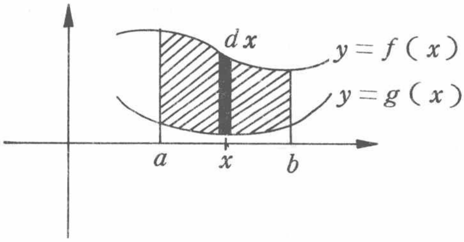
《注意》曲線之參數式，亦可寫成向量式 $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$



分類檢討　觀念分析　效果領先

➡【分析 1】微分量觀點（切片法）求面積：

(1)



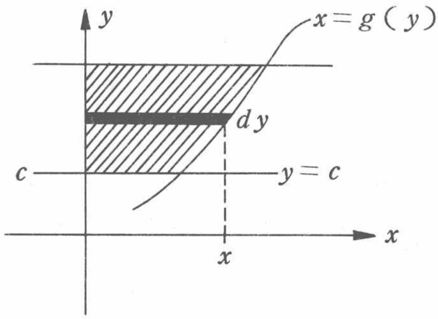
$$dA = (f(x) - g(x))\,dx$$

（斜線之小單位面積）

$$A = \int dA = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

（全部之面積）

(2)



$dA = x\,dy = g(y)\,dy$

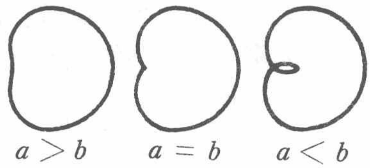
（粗斜線之小單元面積）

$A = \int dA = \int_c^d x\,dy$

（全部之面積）

舉一反三，請務必融會貫通，蔣老師特別叮嚀。

➡**【分析２】常見之集座標曲線：**

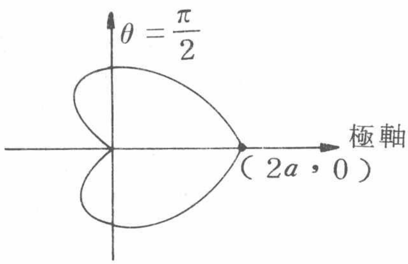


(1)心臟線（*Cardioids*）與蚶線（*limacons*）

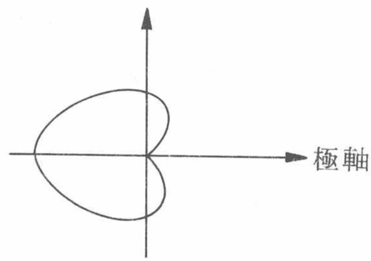
考慮下列方程式的形式：

$r = a \pm b \cos\theta$，$r = a \pm b \sin\theta$

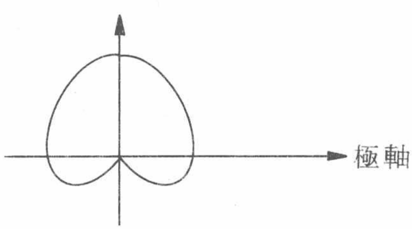
但考試時最常見者爲 $a = b$ 之心臟線情況，如下：



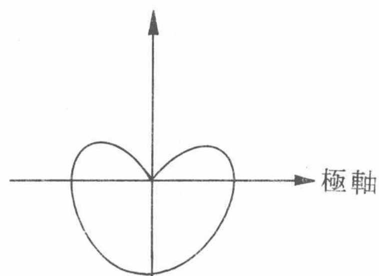
$r = a(1 + \cos\theta)$



$r = a(1 - \cos\theta)$



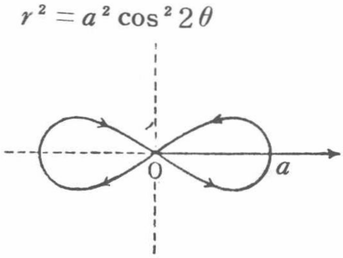
$r = a(1 + \sin\theta)$

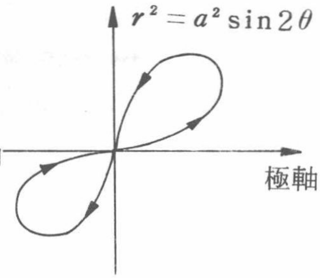


$r = a(1 - \sin\theta)$

(2)雙曲線（*lemniscate*）

形如：$\begin{cases} r^2 = a^2 \cos 2\theta \\ r^2 = a^2 \sin 2\theta \end{cases}$



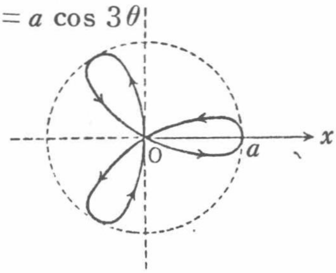


(3)玫瑰線（ *roses* ）

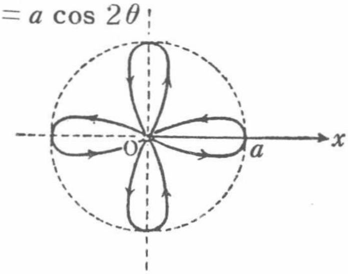
$$\begin{cases} r = a\cos n\theta \\ r = a\sin n\theta \end{cases}$$

表示一花狀的曲線稱它們爲玫瑰線（ *roses* ），若 n 爲奇數，則玫瑰線具有 n 瓣，若 n 爲偶數，則它們有 $2n$ 瓣。

三葉線

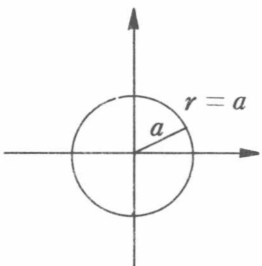


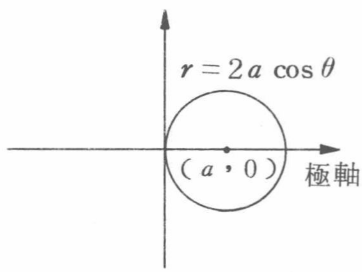
四葉線

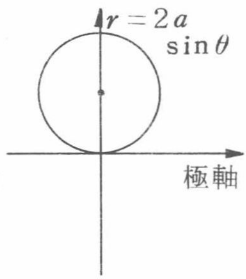


《注意》$r = a\sin 3\theta$ 也是三葉線，$r = a\sin 2\theta$ 爲四葉線，請自行描繪之。

(4)圓方程式：







(5)二次曲線（僅供參考，不常考）：

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}，r = \frac{ep}{1 \pm e\sin\theta}$$ （ e 爲離心率）

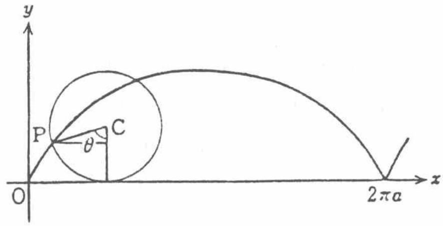
當 $0 < e < 1$ 表橢圓；$e = 1$ 爲拋物線；$e > 1$ 爲雙曲線。

(6)其他（如阿基米得螺線 $r = a\theta$，對數螺線 $r = ae^{b\theta}$ ），稍爲留意即可。

➡【分析３】常見之曲線參數式（*parameter form*）：

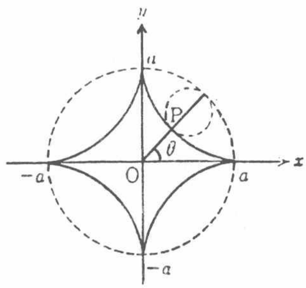
(1)擺線（*cycloid*）：

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



(2)星芒線（內擺線）（*hypocycloid*）：

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \text{，} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$



有關擺線、星芒線、或外擺線（*epcycloid*）之參數式表示法請參考 Topics 3 之觀念分析與實戰研究，便能融會貫通的。

PART A 實戰問題研究（由淺入深、漸至佳境！）

問題 1：(1)拋物線 $y = x - x^2$ 與 x 軸所圍的面積爲＿＿＿＿＿。【79.台大乙】
(2)求曲線 $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ 與 x 軸所圍之面積。【78.政大】

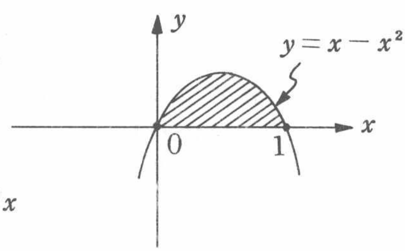
《**Key**》令 $y = 0$，求得曲線與 x 軸的交點。

Ans：(1)令 $y = x - x^2 = x(1 - x) = 0$，

$x = 0$，1

所求面積 A

$$A = \int |y|\, dx = \int_0^1 |x - x^2|\, dx$$



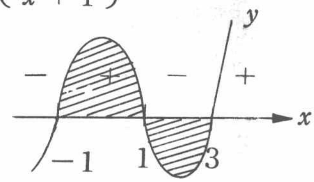
$$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx \qquad (\because y = x - x^2 \geq 0,\ \forall x \in [0, 1])$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(2) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x^3 - x) - 3(x^2 - 1)$

$= x(x-1)(x+1) - 3(x-1)(x+1)$

$= (x-1)(x+1)(x-3)$



令 $y = 0$，$x = -1, 1, 3$

且 $|y| = \begin{cases} y & -1 \leq x \leq 1 \\ -y & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{面積 } A = \int_{-1}^{3} |y|\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} |y|\,dy + \int_{1}^{3} |y|\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y\,dy + \int_{1}^{3} (-y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$$

$$+ \int_{1}^{3} -(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{1}^{3}$$

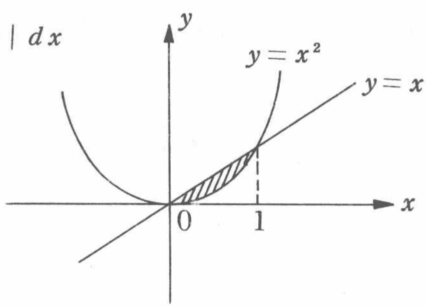
$$= 4 - (-4) = 8$$

問題2：(1) Find the area of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$。
【76.東吳】

(2) The area of the region enclosed by $y = x^2 - 2x$ and $y = x$ on $[0, 4]$ = ________。
【79.淡大夜】

《**Key**》令 $f(x) = g(x)$，可求得交點 $x = a$，b 或 $x = a$，c，b

$$\Rightarrow \text{面積 } A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



Ans：(1) 令 $x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$，

$x = 0, 1$

所求面積 A

$$A = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$$

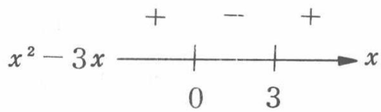
$$=\int_0^1 (x-x^2)\,dx \qquad (\because x^2-x<0)$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$$

(2)令 $x^2-2x=x \Rightarrow x^2-3x=0$

$$\Rightarrow x(x-3)=0，x=0，3$$

所求面積爲 A



$$A=\int_0^4 |(x^2-2x)-x|\,dx$$

$$=\int_0^3 |(x^2-2x)-x|\,dx+\int_3^4 |(x^2-2x)-x|\,dx$$

$$=\int_0^3 -(x^2-3x)\,dx+\int_3^4 (x^2-3x)\,dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_3^4=\frac{19}{3}$$

> **問題3**：(1)描出平面曲線 C：$y=4\sqrt{x}$，作過點 $P(-4，0)$ 到曲線 C 的切線 T，求 T 的方程式，並算出由曲線 C，切線 T 及 x 軸所圍區域的面積。【76.台大乙】
>
> (2)求曲線 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 所圍區域之面積。【79.台大丙】

《**Key**》(1)切點爲 $(x_0，4\sqrt{x_0})$，由點斜式反求切點 $(x_0，4\sqrt{x_0})$。

(2) $x=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$ 爲上半曲線與下半曲線之聯集。

Ans：(1)①設切線下與曲線 C 相切於點 $(x_0，y_0)=(x_0，4\sqrt{x_0})$，由點斜式知切線方程式爲：

$$y-4\sqrt{x_0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)$$

$$y-4\sqrt{x_0}=\frac{2}{\sqrt{x_0}}(x-x_0) \qquad \left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

且切線過點 $P(-4，0)$ 代入上式

$$0-4\sqrt{x_0}=\frac{2}{\sqrt{x_0}}(-4-x_0)，得\ x_0=4$$

$\therefore$ 切線方程式爲 $y-8=(x-4)$，即 $y=x+4$ 爲所求切線 T 的方程式。

②所求面積 A

$$A=\int_{-4}^4 (x+4)\,dx-\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx$$