几何命题分类证法

JIHEMINGTIFENLEIZHENGFA

段国兴

河北教育出版社

几何命题分类证法

段国兴

河北教育出版社

前　言

几何命题的证明是引用已知其为正确的命题（包括定义、公理、定理等）用逻辑推理来判断一个新的命题是否正确的一种推理工作。几何证明的方法一般地可分为两大类，其一是**通常法**，即

$$\begin{cases}\text{直接证法}\begin{cases}\text{分析法（从结论→条件）}\\ \text{综合法（从条件→结论）}\end{cases}\\ \text{间接证法}\begin{cases}\text{反证法}\begin{cases}\text{归谬法}\\ \text{穷举法}\end{cases}\\ \text{同一法}\end{cases}\end{cases}$$

其二是**特别法**，即**分类法**。

由于几何问题，千端万绪，错综复杂。几何命题的证明对于初学者来说，确有困难。为了克服这一困难，有关几何证题详解、几何复习资料之类的课外读物出版不少，但多数是沿课本内容系统编写而成，或单纯的题解性质，未介绍解题思路和归纳证明方法，难解读者之渴。为了帮助读者和青少年学习掌握几何证题规律，今特编此《几何命题分类证法》一书。本书是根据编者多年几何教学的实践经验，将平面几何证明问题细分为十类，逐类阐述了解题思路和证明方法。并且，对每类问题均精选了范例和练习题，论述通俗简捷，便于青少年自学复习、巩固提高，亦可供中学教师几何教学参考之用，书后还附有一定难度的思考题，足供读者发展思

维之用。

但因笔者水平有限，编写过程中谬误之处难免，衷心希望大家批评指出。

编者

目　　录

一、证明线段相等

证明线段相等，有时在一个三角形内考虑，有时在一个四边形内考虑，有时可以在一个圆内去考虑，有时还可以在两个三角形中去讨论。根据上述不同情况，关于线段相等问题的证明常用如下几种方法：

1．利用三角形的边角关系；

2．利用全等三角形的性质；

3．利用平行四边形的性质；

4．用利圆的一般性质；

5．利用比例线段；

6．利用第三线介绍；

7．其它。

注：当前四种方法运用无效时，可考虑运用线段的比例关系、等量传递性质及其它。

[范例]

例1-1　如图1-1，已知：$AB \parallel CD$，$AB=AC$，$AD=BD$，$\angle ADB=90°$，AC 与 BD 相交于 E 点。求证：$BE=BC$。

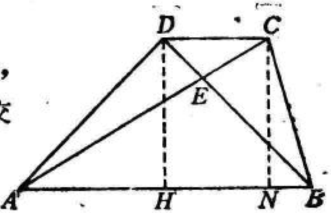

图 1-1

分析：要证线段 BE 和 BC 相等，而 BE 和 BC 在

$\triangle BCE$上，是$\triangle BCE$的两条边，可先求得它们所对的两个角相等，即$\angle BCE=\angle BEC$，便可利用三角形的边角关系："等角对等边"证得$BE=BC$。

【证明】（利用三角形的边角关系）

分别从D、C两点作$DH\perp AB$，$CN\perp AB$，H、N为垂足。

由题设可知，$AB\parallel CD$，$\triangle ADB$是等腰直角三角形。

则有 $DH=CN=\frac{1}{2}AB$。

又因 $AC=AB$， 故$CN=\frac{1}{2}AC$。

在$\triangle ANC$中，有$\angle ANC=90°$，$\triangle ANC$为直角三角形，

根据"直角三角形一直角边等于斜边的一半，则这条直角边所对的锐角等于30°"的性质可得

$$\angle CAN=30°.$$

在等腰$\triangle CAB$中，$\angle ABC=\angle ACB=$

$$\frac{180°-30°}{2}=75°;$$

又∵ $\angle CEB=\angle CAB+\angle ABD$

$=30°+45°$

$=75°$，

∴ $\angle CEB=\angle ECB$、

∴ $BE=BC$（在一个三角形中，等角对等边）。

例1-2 如图1-2，已知：四边形$ACGH$和四边形$AFEB$分别是以$\triangle ABC$的两边AC和AB为边的两个正方形，

$AD \perp BC$，D 是垂足，并且 DA 的延长线与 HF 相交于 M 点。

求证：$FM = MH$。

分析：从图 1-2 可以看到线段 FM 和线段 MH 是线段FH 被直线 DA 分成的两条线段，它们非一个

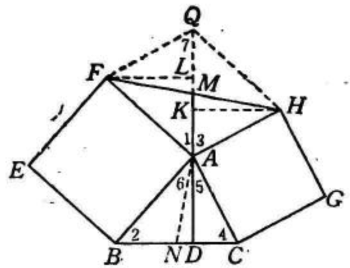

图 1-2

三角形的两条边，不便运用一个三角形的边角对等关系来证明它们相等。若分别从 F 和 H向直线 DQ（图 1-2）引垂线 FL 和 HK，L 和 K 为垂足，则 FM 和 MH 为两个直角三角形 FLM、HKM 的斜边，要证 $FM = MH$,可先证 $\triangle FLM \cong \triangle HKM$. 然后利用“全等三角形对应边相等”的性质证明 $FM = MH$。

【证明】方法1（利用全等三角形的性质）

从 H、F 两点分别作 AD 反向延长线的垂线 HK 和FL，K 和 L 是垂足。

由题设可知　$\angle FAB = \angle HAC = 90^\circ$，$AB = AF$，$\angle ADB = \angle FLA = 90^\circ$，

$\because$　$\angle 2 + \angle 6 = 90^\circ$，$\angle 1 + \angle 6 = 90^\circ$，

$\therefore$　$\angle 1 = \angle 2$，　从而可得

$\triangle ALF \cong \triangle BDA$　(a、a、s)。

$FL = AD$（全等三角形的对应边相等）。

同理可证　$\triangle AKH \cong \triangle CDA$，$HK = AD$。

在$\triangle FLM$ 和 $\triangle HKM$ 中，

$\because \quad \angle FLM = \angle HKM = 90°,$

$FL = HK = AD,$

$\angle FML = \angle HMK,$

$\therefore \quad \triangle FLM \cong \triangle HKM.$

$\therefore \quad FM = MH.$

方法 2 （利用平行四边形的性质）

如图 1-2，过 F 点作与 AH 平行的直线和 AM 的延长线相交于 Q 点，并且连接 HQ 得四边形 $AHQF$.

由题设可知 $AB = AF$，$\angle FAB = 90°$，$\angle ADB = 90°$，

则 $\angle 1 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 6 = 90$，有 $\angle 1 = \angle 2$；

同理可证 $\angle 3 = \angle 4$.

又$\because$ $FQ \parallel AH$,

$\therefore \quad \angle 7 = \angle 3 = \angle 4.$

从而证得 $\triangle AFQ \cong \triangle BAC$ （角、角、边）

$\therefore \quad FQ = AC.$

由已知，$AC = AH$，

故有 $FQ = AH$.

$\because$ 在四边形 $AFQH$ 中，$FQ \perp\!\!\!\perp AH$，

$\therefore$ 四边形 $AFQH$ 是平行四边形.

根据“平行四边形对角线互相平分”的性质便得 $FM = MH$.

注：本例还可以以 A 为顶点，AB 为一边，作 $\angle BAN = \angle AFH$（见图 1-2）去证明 $MF = AN$，$MH = AN$ 利用第三线段 AN 介绍证明 $FM = MH$.

例1-3 如图 1-3，已知：梯形 $ABCD$，$AB \parallel CD$. AC

和 BD 相交于 E 点，MN 经过 E 点，并且和 AB 平行，又分别与两腰相交于 M 和 N(图 1-3)。

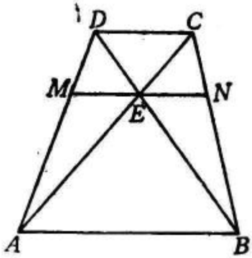

图 1-3

求证：$ME=EN$、

分析：线段 ME、EN 虽然位于两个三角形内，但是不能证得它们所在的两个三角形全等。由题设可知 ME、EN 位于直线 MN 上，而 $MN\parallel AB\parallel CD$，因为"平行线、比例线段、相似形"可谓三姊妹的关系，故可考虑利用比例线段的方法来证明。

【证明】（利用比例线段）

由已知 MN 过 E 点并且平行于 AB，可得

$\triangle DME\backsim\triangle DAB$、　　$\triangle CNE\backsim\triangle CBA$。

又∵　$AB\parallel CD$，

∴　$\triangle CED\backsim\triangle AEB$。

由上可得$\dfrac{ME}{AB}=\dfrac{DE}{DB}$，$\dfrac{NE}{AB}=\dfrac{CE}{CA}$及$\dfrac{DE}{EB}=\dfrac{CE}{EA}$.

$$\because\quad \frac{DE}{EB}=\frac{CE}{EA},$$

$$\therefore\quad \frac{DE}{DB}=\frac{CE}{CA}\ \text{（合比定理）。}$$

$$\text{从而}\frac{ME}{AB}=\frac{NE}{AB}\ \text{（等量代替）。}$$

因此　$ME=NE$。

例1-4　如图 1-4，已知：AB 是 $\odot O$ 的直径，$CE\perp AB$，

$DF \perp AB$，又 $DG \perp CO$。

求证：$CE = GF$。

分析：CE 是 ⊙O 的半弦，即弦 CN 的 $\frac{1}{2}$；FG 是 ⊙O 的一般线段，由于 $CO \perp$ 平分 DP 于 G 点，$AB \perp$ 平分 DM 于 F，GF 是 $\triangle DPM$ 的中位线，可知 $GF = \frac{1}{2}PM$，欲证 $CE = GF$，可先证 $PM = CN$。

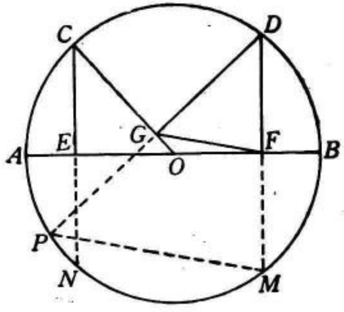

图 1-4

【证明】（利用圆的一般性质）

延长 CE，DG 和 DF 分别与 ⊙O 相交于 N，P，和 M，连结 PM，

由题设可知 CN，DP，DM 都是垂径弦，

根据垂径弦的性质“垂直于弦的直径平分弦且平分这弦所对的两条弧”，可知

$CN = 2CE$，$DM = 2DF$，$DP = 2DG$，

∵ GF 是 $\triangle PDM$ 的中位线，

∴ $GF \perp\!\!\!\perp \frac{1}{2}PM$

又∵ $\angle DGO = \angle DFO = 90°$，

$\angle DGO + \angle DFO = 90° + 90° = 180°$，

∴ D、G、O、F 四点共圆（对角和为 $180°$ 的四边形内接于一个圆）。

∴ $\angle COA=\angle D$(圆内接四边形的外角等于它的内对角)．

因而 $\overset{\frown}{MP}=2\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CN}$.

∴ $MP=CN$（在同圆或等圆中，弧等所对的弦也相等)．

∴ $CE=GF$(等量的一半相等)．

例 1-5 如图 1-5，已知：AC 是 $\odot O$ 的直径，B 点在 $\odot O$ 上，$BD\perp AC$，D 是垂足，并且 $\odot O'$ 与 BD，$\odot O$ 及 DC 分别相切于 F，G 和 E 诸点。

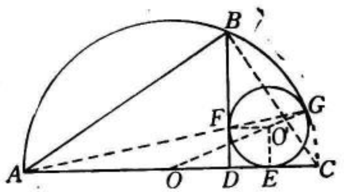

图 1-5

求证：$AB=AE$.

分析：要证 $AB=AE$ 即证 $AB^2=AE^2$,

连接 AG，FG，BC，由题设可知 $AB^2=AD\cdot AC$（射影定理)．

若 AG，FG 重合，则 $AE^2=AF\cdot AG$.

故欲证 $AB^2=AE^2$，须证 $AD\cdot AC=AF\cdot AG$.

欲证 $AD\cdot AC=AF\cdot AG$，须有 F，D，C，G 四点共圆。

由题设可得 F，D，C，G 共圆及 A，F，G 共线。

【证明】(利用第三线介绍及其它)

从 O' 作半径 $O'F$ 和 $O'E$,

由题设可知，G 点在连心线 OO' 上

连接 AG 和 FG,

∵ $OA=OG$，$O'F=O'G$,

$\therefore$ $\triangle GO'F$ 和 $\triangle GOA$ 都是等腰三角形。

又$\because$ 四边形 $DEO'F$ 是正方形。

$\therefore$ $FO' \parallel DE$，即 $FO' \parallel AC$。

$\therefore$ $\angle GO'F = \angle GOA$。

$\therefore$ $\angle O'GF = \angle OGA$。

因此，FG 和 AG 重合，即 A，F，G 三点共线。

已知 AC 是 $\odot O$ 的直径，B 在 $\odot O$ 上，$BD \perp AC$，由射影定理可得

$$AB^2 = AD \cdot AC \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

又 AC 和 $\odot O'$ 相切于 E 点，由切割线定理可得

$$AE^2 = AF \cdot AG \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

连接 GC，

$\because$ AC 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $\angle AGC = 90°$

而$\angle BDC = 90°(BD \perp AC)$，

$\because$ $\angle AGC + \angle BDC = 90° + 90° = 180°$，

$\therefore$ F，D，C，G 四点共圆。

根据割线定理可得

$$AF \cdot AG = AD \cdot AC \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

综合①，②，③式可得 $AB^2 = AE^2$

即得 $AB = AE$。

[练习题]

练 1-1. 如图 1-6，已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，割线 CD 和 EF 都经过 A 点，并且$\angle DAB = \angle FAB$。

求证：$CD=EF$。

（提示：连接 CB, BD, BE 和 BF，证明 $\triangle DBC \cong \triangle EBF$ 即可证得 $CD=EF$。）

练 1-2 如图 1-7，圆内接四边形 $ABCD$ 中，O 是圆心，$AC \perp BD$，E 是垂足，又 F 是 CD 的中点，$OP \perp AB$，P 是垂足，则 $OP=EF$。

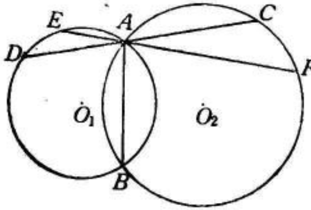

图 1-6

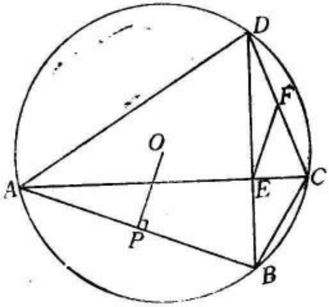

图 1-7

（提示：连接 OF 和 PE，证明四边形 $FOPE$ 是平行四边形，即可证得 $OP=EF$。）

练 1-3 如图 1-8，圆内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 和 BD 互相垂直于 E，过 E 点的直线 FP 和 CD 垂直于 P 点，则 FP 平分其对边 AB 于 F。

（提示：根据已知图形证明 $AF=FE$，$FB=FE$，利用第三线 EF 介绍可得本命题的结论正确）

练 1-4. 如图 1-9，$\triangle ABC$ 两边 AB、AC 上两个点 D 和 E，并且 $DE \parallel BC$，BE 和 DC 相交于 O 点，则过 A、O 两点的直线平分 BC 和 DE。

（提示：①可参照例 1-3 来证，即过 O 点作 $PQ \parallel BC$，利用比例线段证明之；②利用平行四边形对角线互相平分的性

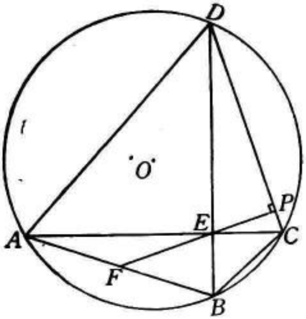

图 1-8

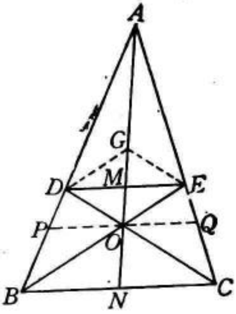

图 1-9

质，过 D 作 $DG \parallel OE$ 交 AN 于 G，连结 GE，证明 $DOEG$ 是 ▱。）

练 1-5 如图 1-10，已知直线 PBA、PDC 是 ⊙O 的两条割线，$PE \parallel BC$，A、D、E 在同一直线上，EF 和 ⊙O 相切于 F 点，求证：$PE = EF$。

（提示：利用比例线段，第三线介绍，先证 $PE^2 = ED \cdot EA$，$EF^2 = ED \cdot EA$。）

练 1-6 如图 1-11，若 PA、PC 分别和 ⊙O 相切于 A 和

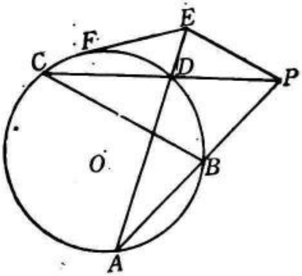

图 1-10

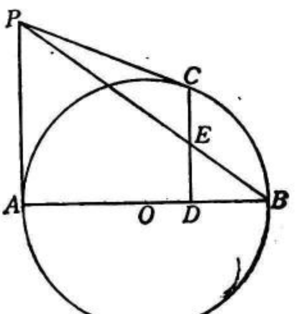

图 1-11

C，AB 是 $\odot O$ 的直径。并且 $CD\perp AB$，PB 和 CD 相交于 E 点，则 PB 必平分 CD。

（提示：利用比例线段，过 B 点作 $\odot O$ 的切线与切线 PC 相交于 F，证明 $\frac{CE}{PC}=\frac{CF}{PF}$，$\frac{ED}{PA}=\frac{BD}{AB}$ 和 $\frac{CF}{PF}=\frac{BD}{AB}$。）

练 1-7　如图 1-12，已知 $OA\perp DE$，$\odot O$ 的割线 AC 与 $\odot O$ 交于 B、C 两点，过 B、C 两点分别引 $\odot O$ 的切线交直线 DE 于 D 和 E，则 $AD=AE$。

（提示：利用等腰三角形的性质。连 OD、OE、OB 和 OC，证明 $\triangle OBD$ 和 $\triangle OCE$ 全等，得 $OD=OE$，从而推出 $AD=AE$。）

练 1-8　如图 1-13，已知：AF 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直

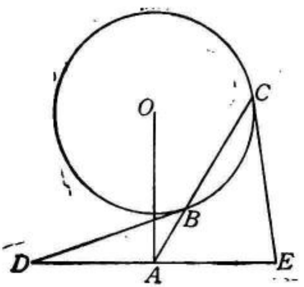

图 1-12

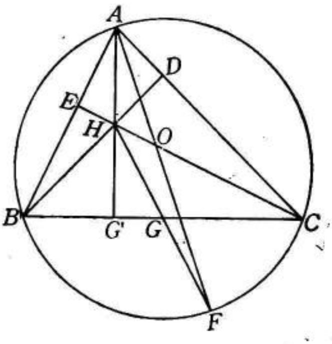

图 1-13

径，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，求证：BC 平分 HF 于 G 点。

（提示：①利用平行四边形的性质。连 FC 和 FB，证

明 $BFCH$ 是▱，得 $FG=GH$；②本命题亦可利用平行于三角形一边的直线截另一边成相等线段的性质推得．延长 AG' 与 ⊙O 相交于 P，证明 BC 与 PF 平行及 $HG'=G'P$，便得 $HG=GF$。）

练 1-9 如图 1-14，将 ⊙O 的弦 AB 向两方延长，使 $AC=BD$，并且作 CF，DE 分别与 ⊙O 相切于 F 和 E，则 EF 平分弦 AB 于 G。

（提示：利用等腰三角形的性质，连接 OC，OG，OD，OE 和 OF，证明 $OC=OD$；再由 C，F，G，O 四点共圆证得 $OG\perp AB$，即可根据垂径弦的性质推得命题的结论成立。）

练 1-10 如图 1-15，设 PA，PB 分别与 ⊙O 相切于 A，

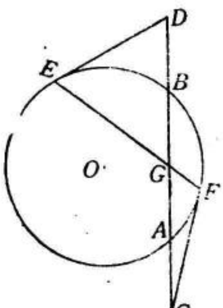

图 1-14

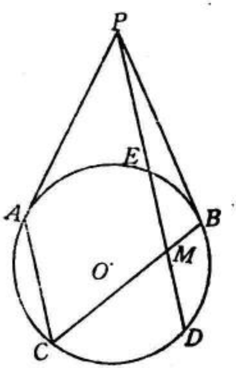

图 1-15

B 两点，割线 PED 与弦 AC 平行，弦 BC 交割线于 M，则 BC 平分 ED 于 M。

（提示：连 OM，OB 和 OP，利用垂径弦的性质，先证明 $OM\perp ED$，然后可证得 $EM=MD$。）