



车辆系统动力学

计算方法研究

CHELIANG XITONG DONGLIXUE JISUAN FANGFA YANJIU

陆冠东 著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

铁路科技图书
出版基金资助出版

车辆系统动力学计算方法研究

陆冠东 著

中国铁道出版社

2011年·北京

内 容 简 介

本书详细讨论了轨道车辆动力学系统方程的建立和各种典型问题的解决方法,按系统方程的分类,由简而繁地逐章展开,每章都配以翔实的计算实例,详细介绍解决动力学问题的步骤和方法。

作为全书的基础,详细讨论了建立多自由度系统运动方程的规范化方法——组合矩阵法,对“蠕滑速度”给予了完整而清晰的诠释,推导得出了蠕滑速度和蠕滑率的完整表达式,逐一介绍了蠕滑率和蠕滑力关系的3种常用的理论。讨论了计算机自动建模的方法,介绍了系统参数文件的编制以及不同输入方式的转换。

随系统运动方程由简而繁的变化,逐章讨论了各类动力学问题:准静态性能分析、特征值和稳定性分析、线性频率响应分析、瞬态仿真响应分析和列车纵向动力学分析,还用了一定的篇幅介绍列车碰撞动力学的计算方法。

本书适用于从事机车车辆设计研究的工程技术人员,车辆动力学软件工程师和大专院校、科研机构的专家学者等参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

车辆系统动力学计算方法研究/陆冠东著. —北京:
中国铁道出版社, 2011. 11
ISBN 978-7-113-13766-3

I. ①车… II. ①陆… III. ①机车车辆-系统动力学-
计算方法-研究 IV. ①U260.11②U270.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 226544 号

书 名: 车辆系统动力学计算方法研究
作 者: 陆冠东 著

责任编辑: 王明容 电话: 010-51873138 电子信箱: tdpres@126.com
封面设计: 郑春鹏
责任校对: 孙 政
责任印制: 郭向伟

出版发行: 中国铁道出版社(100054, 北京市西城区右安门西街8号)
网 址: <http://www.tdpres.com>
印 刷: 北京精彩雅恒印刷有限公司
版 次: 2011年11月第1版 2011年11月第1次印刷
开 本: 787 mm×960 mm 1/16 印张: 10.75 字数: 192 千
印 数: 1~2 000 册
书 号: ISBN 978-7-113-13766-3
定 价: 38.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社读者服务部联系调换。

电 话: 市电(010)51873170, 路电(021)73170(发行部)
打击盗版举报电话: 市电(010)63549504, 路电(021)73187

序

《车辆系统动力学计算方法研究》一书的特点是在于全面系统地介绍了车辆系统动力学所涉及的实际问题的解决方法。这是一本以车辆动力学理论的实际应用为主导的技术性专著。

本书的内容新颖,章节的安排是围绕系统运动方程的组建和外部干扰力性质的不同而逐步展开,这与传统的教材和参考书籍的结构不一样,很有特色。

要研究机车车辆动力学问题,首先要解决的是如何建立系统的模型,也就是建立系统的运动方程。机车车辆都是具有好几十个自由度的复杂系统,因此必须要有一套规范化的建模方法,才能保证方程的准确性。作者开门见山,第一章讨论的就是建立系统运动方程的规范化方法——组合矩阵法;在讨论轨道车辆特有的作用力——由轮轨之间相对速度而产生的蠕滑力和由轮轨之间相对位移而产生的复原力时,作者的诠释方法十分有新意,与众不同,清晰而又明白。讨论动力学问题的分析计算,第一章是不可或缺的基础。

作者把轴重转移、悬挂弹簧加垫调整车轮载荷、扭曲轨道上的轮重减载和稳态曲线通过,这些看起来不太相关的专题,放在一起研究,看似有些奇怪,其实不然。作者从系统方程的角度把它们放在准静态分析计算里一起讨论,实际上传递了这样一个信息:车辆系统的准静力学问题,都可以归结为建立系统刚度矩阵和确定外力矢量的固定模式,系统刚度矩阵在第一章里已经详细讨论过了,接下来着力要解决的就是外力矢量了。本书第二章详细地讨论了以上四种典型的准静态实例,它们的外力矢量表达的方式完全不同,极具参考价值。

同样,在车辆动力学性能分析中,作者也是按系统外力干扰矢量的性质,分为三章来详细讨论:

特征值和特征向量分析,是一种不考虑线路干扰的线性分析方法,这是研究列车稳定性的主要方法之一。作者在第三章的一开始,简要地介绍了特征值和特征向量分析与工程振动分析的关系,这对学工程的专业人员来讲,很有必要。

线性频率响应分析,这是考量车辆系统在周期性干扰下(横向或垂向)的动态响应分析。

系统瞬态响应分析,研究的是车辆系统在不规则的干扰下(横向或垂向)的动态响应分析。作者在第五章的开始将传统的解析法和数值计算的方法作了比较,介绍了数值计算的原理和步骤。瞬态响应分析适用于非线性系统的动力学性能分

析,应用十分广泛。

第六章的列车纵向动力学分析,运用的也是系统瞬态分析方法,与以上动态分析不同的是,它的研究对象不是悬挂元件而是车辆之间的连接缓冲装置,因而在计算技巧上,与第五章有所不同。

从第二章到第六章,每章都配有典型的实例,由浅入深,由简单到复杂,详细介绍解决问题的步骤和方法,内容具体实用,这也是本书的又一大特点。

最后一章则是讨论如何用计算机来取代人工实现系统建模,详细阐述了编制车辆系统动力学方程及程序的方法和步骤,为编制动力学软件提供了极好的范例。

作者曾先后任教于唐山铁道学院、西南交通大学和上海铁道学院,多年的教学科研工作打下了非常扎实的理论基础。在阿尔斯通公司工作期间,参与了地铁车辆、干线列车、电动车组、柴油动车组、高速列车和摆式列车等几乎所有现代车辆类型的10多个项目的动力学分析计算,积累了极为丰富的实践经验。《车辆系统动力学计算方法研究》一书是作者多年来在机车车辆动力学领域里理论研究和实践工作所取得的成果的展现。与现有的各类以介绍车辆动力学理论为主的教材和参考书籍相比,本书在难度和深度上都超过对一般性理论的讲解和讨论。

相信本书能为提高国内机车车辆动力学的研究和实际应用水平,早日与国际接轨起到积极的作用。

西南交通大学 刘继平

同济大学 樊程球

2011年8月

前 言

车辆动力学理论在大学教科书中详细介绍^{[1][2][3]},本书在结构和内容上与国内现有的大学教材和参考书籍不同,本书把重点放在介绍动力学系统方程的建立和各种典型问题的解决方法上,每章都配以翔实的计算实例,详细介绍解决动力学问题的步骤和方法。各章的内容概要如下。

第一章介绍系统建模方法。高等数学教材和理论力学教材都谈到建立振动方程和解方程的步骤。在高等数学里讲的是常系数齐次和非齐次线性微分方程,举例提到自由振动和强迫振动方程的解,侧重于数学方法。在理论力学里讲的是振动的基本理论,侧重于物理概念和数学应用,重点介绍了一个自由度和两个自由度的振动系统,绝少有涉及两个以上多自由度振动系统的。机车车辆都是具有好几十个自由度的复杂系统,要研究机车车辆的运动,首先要解决的是如何建立多自由度系统的运动方程。沿用理论力学里讲的分离体的方法,所耗时间长而且容易出错。因而在分离体方法的基础上,发展出了适合于计算机计算的组合矩阵法。这一方法在英国和美国的知名车辆动力学软件里已得到应用,但在我国的文献中鲜有提及。本书第一章第一节就是介绍车辆建模的组合矩阵法,从由分离体方法导出的系统方程,经过矩阵变换,得到组合矩阵表达式的一般形式。有了系统方程还要有作用外力才能构成完整的运动方程,第二节“蠕滑率和蠕滑力”介绍的是由相对速度而造成的轨道车辆系统所特有的轮轨作用力,第三节“重力刚度和重力角刚度”则是讲由相对位移造成的轮轨作用力。

“蠕滑率和蠕滑力”在许多教材和参考书籍中都有介绍和讨论,这是车辆动力学的基础,因此有必要把这个关键性的概念完整而清晰地诠释,所以在第二节中详细推导得出了蠕滑速度和蠕滑率的完整表达式。另外,还详细地介绍了蠕滑率和蠕滑力关系的3种理论^[24],便于读者应用。第一章讲的是基础,以后几章的计算分析都要用到这章的知识。

从第二章开始,按系统运动方程的分类,逐一介绍各种动力学的问题,这与现今著名的车辆动力学软件里的分类是一致的。

第二章:准静态性能分析 $Kx = F$

第三章:特征值和稳定性分析 $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$

第四章:频率响应分析 $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(\omega)$

第五章:瞬态响应分析 $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$

第六章:列车纵向动力学 $M\ddot{x} = F(t) - C\dot{x} - Kx$

第二章准静态性能分析中,介绍了4个最典型的也是应用最广泛的事例。这4个典型事例的最大特点是它们的系统方程的组建方式是完全一样的,而它们的外力矢量的组建却是完全不一样的,具有相当的代表性,读者可以用从这里学到的方法,解决绝大多数的机车车辆的准静态计算的课题,这都是非常有用的实际案例。

第三章介绍特征值和稳定性分析方法。在讨论列车的稳定性时,一定要谈到特征值和特征向量的计算,它是求解工程振动问题和进行稳定性分析的重要数学工具。特征值和特征向量的性质及计算方法是线性代数的主要内容之一,然而高等院校工程数学线性代数教材中很少有讨论特征值和特征向量在工程领域里的应用的,而在车辆动力学的教科书里,也欠缺特征值方法原理的介绍,也就是说在“线性代数”和“车辆动力学”之间存在一条沟。本章第一节旨在“线性代数”和“车辆动力学”之间架座桥梁,介绍特征值和特征向量与振动计算分析之间的关系,这部分的内容,对学工程的专业人员来讲很有必要。接下来从自由轮对、弹性定位轮对到转向架,一步一步由简而繁地介绍了特征值计算和稳定性分析的方法和步骤。

第四章介绍线性频率响应分析,频率响应分析和特征值分析一样,是用于线性系统的运动分析方法。本章从一个自由度系统着手,推导出了频率响应方程的一般形式,然后再推广到两个自由度,三个自由度,垂向频率响应,横向频率响应;在逐渐增加系统的复杂程度的同时,也引进了不同的干扰形式和时间延迟的表达方式,使得读者对线性频率响应分析方法有全面而完整的了解,能够用案例中所讲的方法去解决实际问题。

第五章介绍系统瞬态响应分析,也就是通常所说的仿真计算,特别适用于非线性系统的分析计算,是应用十分广泛的适用于计算机计算的现代化计算方法。本章对数值分析方法的原理、方法和步骤作了详细的介绍,并附有相应的“程序语言”帮助读者加深理解和发展独立设计程序的能力。这部分的内容也是国内现有参考书籍的薄弱环节之一。本章第二节“系统瞬态响应分析的频率特性”详细介绍了利用“一个自由度系统”的频率响应特性,运用瞬态响应分析的方法,把系统变成一个兼具高通和低通性能的“滤波装置”,本节对读者加深系统频率响应和瞬态响应的理解十分有帮助,这在其他参考文献里是没有的。第三节轮轨垂向冲击详细介绍了如何处理“赫兹”非线性接触理论的方法。第四节和第五节则是非常详尽地介绍了如何运用“平方根”蠕滑理论和“非线性”蠕滑理论来求解轮对和转向架在线路横向不规则干扰下的响应。本章讲述的内容和方法由浅入深,由简单到复杂,使得读者对非线性瞬态响应分析方法有全面深刻的了解,可按照事例中所讲的方法去

解决实际问题,对从事科研、设计和教学的专业人员非常有用。

第六章介绍列车纵向动力学。一般的车辆动力学软件中不包括列车纵向动力学的内容。列车纵向动力学的计算分析属于系统瞬态响应分析的范畴,这里研究的重点不是悬挂元件,而是车辆之间的连接缓冲装置,解题的方法和路径也与上面所讲的不一样。在介绍了5种不同的缓冲器特性后,详细地介绍了4种不同工况下的计算方法,冲击、制动、牵引和碰撞。列车碰撞研究在国内开展得比较晚,本章中用了一定的篇幅介绍列车碰撞的计算方法^{[16][17]},希望能对国内的碰撞研究有所帮助。

第七章介绍计算机建模的基本方法。这一章与第一章的车辆系统建模的组合矩阵法相互呼应,在第一章组合矩阵法里讲的是建模的基本方法,第七章讲的是如何用计算机取代人工来实现这个方法。本章介绍了系统参数文件最基本章节的编制,重点讲解了质量参数、阻尼参数、刚度参数的输入,并附有相应的“程序语言”帮助读者进行不同表达方式的转换。最后的案例可以帮助读者自己编制动力学程序软件。

本书适用于从事机车车辆设计研究的工程技术人员,车辆动力学软件工程师和大专院校、科研机构的专家学者等参考使用。

作者谨向支持和关心本书出版的家人、老同学、老朋友和老教授们表示诚挚的谢意,特别感谢中国铁道出版社和铁路科技图书出版基金的大力支持。

陆冠东

2011年,11月于家中

目 录

第一章 系统建模方法	1
第一节 车辆建模的组合矩阵方法	1
一、力学系统平衡方程式	1
二、组建系统刚度的组合矩阵法	3
三、建立系统刚度关联矩阵的举例	5
四、组合矩阵法中矩阵相乘的力学意义	6
五、系统阻尼矩阵的建立	7
六、系统质量矩阵的建立	8
第二节 蠕滑率和蠕滑力	8
一、蠕滑速度和蠕滑率	8
二、蠕滑率和蠕滑力.....	12
1. 线性蠕滑理论	12
2. 平方根蠕滑理论	16
3. 非线性蠕滑理论	18
第三节 重力刚度和重力角刚度	22
一、重力刚度.....	22
二、重力角刚度.....	22
三、由重力引起的轮对外力.....	23
第二章 机车车辆准静态性能分析的模型和方法	24
第一节 机车轴重转移分析	24
一、机车轴重转移分析模型.....	24
二、系统刚度矩阵.....	25
三、系统外力矢量.....	27
1. 纵向牵引力和车钩阻力造成的力矩	27
2. 牵引电机产生的外力	27
3. 系统外力矢量	31
四、系统位移矢量.....	32
五、方程求解.....	32
六、计算举例.....	32

第二节	机车车辆弹簧加垫调整车轮载荷	34
一、	弹簧加垫调整车轮载荷的模型	35
二、	调整车轮载荷的系统刚度矩阵	35
三、	弹簧加垫形成的外力矢量	38
四、	弹簧加垫的系统方程求解	38
五、	计算举例	38
第三节	机车车辆在扭曲轨道上的轮重减载	41
一、	机车车辆在扭曲轨道上的轮重减载分析模型	41
二、	系统的刚度矩阵	42
三、	轨道扭曲形成的外力矢量	45
四、	轨道扭曲造成车轮减载的系统方程求解	47
五、	计算举例	48
六、	结 语	49
第四节	线性系统的转向架稳态曲线通过	50
一、	基本假定	50
二、	系统模型和方程	50
三、	系统刚度矩阵和位移矢量	51
四、	系统外力矢量	52
五、	计算举例	54
第五节	非线性系统的求解方法	55
第三章	车辆系统的特征值和稳定性分析方法	57
第一节	特征值和特征向量	57
一、	特征值和特征向量的定义	57
二、	工程振动系统	59
三、	系统特征值方程的建立	60
1.	无阻尼系统	60
2.	有阻尼系统	61
第二节	特征值和特征向量计算举例	63
第三节	轮对的稳定性计算	67
一、	自由轮对的特征值计算	67
1.	运动方程	67
2.	特征值计算	67
二、	弹性定位轮对的特征值计算	69
1.	运动方程	69
2.	特征值计算	70

第四节 两轴转向架的稳定性分析	72
一、系统参数和运动方程	72
二、系统特征值	77
三、系统特征向量	78
第五节 线性稳定性分析的实际运用	80
一、系统的阻尼率	80
二、振动模态频率范围	80
三、特征值计算的速度和踏面斜率的取值范围	80
四、非线性悬挂元件的线性化	80
五、系统最小阻尼率的等阻尼率曲线	81
第四章 线性频率响应分析	83
第一节 基本运动方程	83
一、外力激振系统	84
二、位移激振系统	85
第二节 两个自由度系统的频率响应计算	85
第三节 车辆简化模型的垂向频率响应计算	87
一、系统方程	87
二、计算举例	89
第四节 客车垂向频率响应分析的模型和方法	90
一、客车垂向频率响应分析模型	90
二、系统刚度矩阵	90
三、系统阻尼矩阵	91
四、系统质量矩阵	91
五、干扰外力矢量	92
六、系统响应	92
七、系统方程	92
八、计算举例	92
九、计算结果	93
第五节 两轴转向架的横向频率响应分析	93
第五章 系统瞬态响应分析	95
第一节 系统瞬态响应分析的基本方法	95
一、解析法解题步骤	95
二、数值法解题步骤	96
第二节 系统瞬态响应的频率特性	100
一、系统位移响应的频率特性	100

二、系统加速度响应的频率特性	101
三、信号频率分析举例	102
第三节 车轮通过钢轨接头时产生的垂向冲击	104
一、轮轨垂向冲击模型	104
二、系统运动方程	105
1. 系统质量矩阵	105
2. 系统刚度矩阵	106
3. 系统阻尼矩阵	106
4. 系统位移矢量	107
5. 系统外力矢量	107
三、计算方法和步骤	107
第四节 弹性定位轮对的瞬态响应计算	108
1. 求蠕滑率	109
2. 求蠕滑力	109
3. 求轮对作用力	109
第五节 两轴转向架在线路横向不规则干扰下的瞬态运动	111
第六章 列车纵向动力学	116
第一节 基本方程和分析方法	116
第二节 缓冲器特性	118
一、弹簧缓冲器特性	118
二、摩擦缓冲器理论特性	119
三、摩擦缓冲器实际特性	120
四、橡胶垫式缓冲器特性	121
五、液压缓冲器特性	121
第三节 列车冲击工况的缓冲器受力分析	122
一、列车冲击模型和运动方程	122
二、系统初始条件	124
三、计算举例	124
第四节 救援列车紧急制动工况的缓冲器受力和能量吸收	125
第五节 列车牵引工况的缓冲器受力计算	128
第六节 列车碰撞工况的冲击力和能量吸收计算	129
一、铁道车辆的耐碰撞设计概念	129
二、列车碰撞过程和控制	130
1. 两列车的车钩自动连接	130
2. 车钩缓冲器压缩和吸收能量	130

3. 安全剪切装置脱卸,车钩缓冲器与车体分离	130
4. 两列车自由移动,调整位置	130
5. 两列车第二次相撞,防爬器咬合	131
6. 车体端部结构变形,吸收碰撞能量	131
三、理想的碰撞阻力特性	132
四、列车碰撞时的力和能量计算	133
第七章 计算机建模的基本方法	138
第一节 系统变量赋值	138
第二节 质量参数和质量矩阵的编制	139
第三节 刚度参数和刚度矩阵的编制	141
一、刚度参数的关联表达式	142
二、刚度参数的连接位置表达式	143
三、换算公式	145
第四节 阻尼参数和阻尼矩阵的编制	146
第五节 参数文件编制举例	148
参考文献	155

第一章

系统建模方法

系统建模就是建立系统的运动方程组,以便于进行分析计算。对于轨道车辆来讲,系统建模可分成三个部分:上部、下部和外部。上部建模是要建立轮对以上部分车辆本身的力学模型,包括车体、转向架、轮对以及所有的悬挂元件等,这一部分的建模方法完全适用于一般机械或工程系统的建模。下部建模是要确立轮对以下部分由于轮轨之间相对速度和位置而产生的作用力,这一作用力与轮轨接触点处的几何形状以及车辆运行的速度密切相关,这一部分的建模方法是轨道车辆所特有的,所以要与其他外力区分开来单独讨论。外部建模就是要根据不同的计算工况建立系统的干扰外力矢量,包括线路不规则造成的干扰、牵引电机力矩的作用、线路曲率和离心力的作用等。

轨道车辆系统运动方程的普遍形式见式(1—1):

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (1-1)$$

式中: M ——系统的质量矩阵;

C 、 K ——悬挂系统形成的阻尼矩阵和刚度矩阵;

F ——系统的外力矢量;

\ddot{x} 、 \dot{x} 、 x ——系统的加速度、速度和位移矢量。

上部建模要解决的是建立 M 、 C 、 K 矩阵的问题,下部建模和外部建模则是要确定由轮轨相互作用形成的作用在轮对上的力和力矩,以及其他外部干扰力的 F 矢量。

这一章主要讨论上部建模和下部建模的方法,外部建模问题将在后面的章节里根据实际事例详细讨论。

第一节 车辆建模的组合矩阵方法

本节旨在讨论建立车辆力学模型的方法和过程,详细推导构建车辆悬挂系统刚度矩阵 K 、阻尼矩阵 C 和质量矩阵 M 的方法。

一、力学系统平衡方程式

图 1—1(a) 所示系统由一根横梁和两个支承弹簧组成,弹簧刚度分别为 k_1 和

k_2 , 横梁重心与支点的距离为 a 和 b 。横梁具有两个自由度: 垂向移动和绕重心的回转。假定在外力 P 和外力矩 M 的作用下, 梁的垂向和转动位移分别为 x 和 θ , 取梁为分离体, 则可得梁的位移和受力如图 1-1(b) 所示。

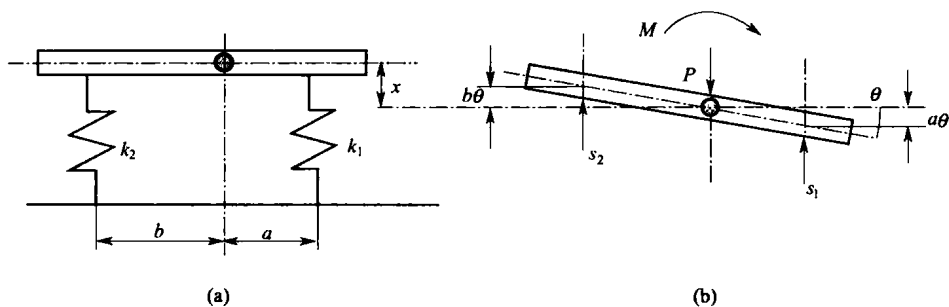


图 1-1

由图 1-1(b) 可知, 弹簧 k_1 和 k_2 的变形为:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= x + a\theta \\ \delta_2 &= x - b\theta\end{aligned}\quad (1-2)$$

弹簧的作用力为:

$$\begin{aligned}s_1 &= k_1 \delta_1 \\ s_2 &= k_2 \delta_2\end{aligned}\quad (1-3)$$

取垂向力和回转力矩的平衡, 可得系统静力平衡方程:

垂向力:

$$\begin{aligned}P &= s_1 + s_2 \\ &= k_1(x + a\theta) + k_2(x - b\theta) \\ &= (k_1 + k_2)x + (k_1 a - k_2 b)\theta\end{aligned}$$

回转力矩:

$$\begin{aligned}M &= s_1 a - s_2 b \\ &= k_1 a(x + a\theta) - k_2 b(x - b\theta) \\ &= (k_1 a - k_2 b)x + (k_1 a^2 + k_2 b^2)\theta\end{aligned}$$

将上述两个平衡方程式用矩阵形式来表示, 可得:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}\quad (1-4)$$

或

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

此处

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \text{为系统刚度矩阵;}$$

$x = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ 为系统位移矢量；

$F = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}$ 为外力矢量。

因为本例中横梁只有两个自由度，所以运动联立方程组只包括两个方程，刚度矩阵是二阶方阵，位移和外力矢量也都是二阶列向量。

运动方程组的大小，取决于系统的规模，以普通客车为例，车体和前后转向架的构架，每个都有 6 个自由度：纵向(x)，横向(y)，垂向(z)，绕 x 轴的滚动(T)，绕 y 轴的点头(P)，和绕 z 轴的摇头(W)；四个轮对每个都有 5 个自由度(x, y, z, T, W)；一节车至少就有 38 个自由度。如果再计入车体的一阶弯曲振动自由度(M)和轮对上每个轴箱的点头自由度(P)，一共就是 47 个自由度。系统方程就是由 47 个方程式组成的联立方程组。倘若要计算三节车连挂的列车的系统方程，除了三节车之外，还要加上两个车钩连接装置的自由度，一共就是 153 个自由度($3 \times 47 + 2 \times 6$)，联立方程组由 153 个方程式组成。

要对有几十个自由度甚至上百个自由度的系统，采用上述传统的分离体的方法来组建联立方程式是可以做得到的，但是工作量很大，要耗费很多时间，而且非常容易造成疏漏并导致差错。其主要原因是，为了建立力学平衡方程式，必须要同时考虑悬挂元件(弹簧或减振器)两端所连接的两个物体的所有运动自由度在悬挂元件上所造成的影响(位移或速度)。因此有必要找到一个简捷方便，规格化的方法来构建系统方程式以应对自由度越来越多的复杂系统。

二、组建系统刚度的组合矩阵法

图 1—1(a)系统中，表达弹簧 k_1 和 k_2 变形的公式(1—2)可改写为如下矩阵形式：

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

或

$$\delta = T x \quad (1-5)$$

式中： δ ——弹簧变形矩阵；

$$T \text{——刚度关联矩阵, } T = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix}。$$

刚度关联矩阵是一个简单但却非常重要的关系表达式，从公式(1—5)可以看到，刚度关联矩阵 T 表达的是系统位移 x 和弹簧变形 δ 的关系。

表达弹簧作用力的公式(1—3)也可改写为如下矩阵形式：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \delta_1 \\ k_2 \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (1-6)$$

式中： \mathbf{S} ——弹簧作用力矩阵；

\mathbf{k} ——刚度系数矩阵，由所有刚度元件组成，是对角线方阵， $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ 。

对一个保守系统，外力所作的功应当等于内力所作的功，即：

$$s_1 \delta_1 + s_2 \delta_2 = Px + M\theta$$

或

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^T \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{x}$$

将公式(1-5)代入上式，可得：

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^T$$

将等式两边矩阵分别转置，得：

$$\mathbf{T}^T \mathbf{S} = \mathbf{F}$$

将公式(1-6)代入上式：

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}$$

再将公式(1-5)代入上式，可得：

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (1-7)$$

或

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}$$

此处：

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (1-8)$$

公式(1-8)就是建立系统刚度矩阵的组合矩阵公式。下面以图 1-1(a)系统为例来校验公式(1-8)。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_1 a \\ k_2 & -k_2 b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 a - k_2 b \\ k_1 a - k_2 b & k_1 a^2 + k_2 b^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$