北大燕园

2013年 李永乐·李正元

考研数学⑤

数学 历年试题解析

数学二

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元

您的最佳选择

一清二楚：本书将1998年～2012年同一内容的试题归纳在一起，分类解析。已(或未)考考点、命题广度或深度尽在其中

出类拔萃：本书在各题型中精选了数学一、三及原数学四相关内容的典型考题(含解答)，独一无二地能让考生全面了解该题型的命题情况

高屋建瓴：本书在各题型后归纳总结该题型的解题思路、方法和技巧，并归纳总结常用结论或公式

国家行政学院出版社

2013年李永乐·李正元考研数学⑤

数学

数学二

历年试题解析

常州大学图书馆
藏书章

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐

编者 （按姓氏笔画）

北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 刘西垣
中国人民大学 严 颖
北 京 大 学 范培华
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析.2/李永乐,李正元主编.—北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)
ISBN 978-7-80140-323-0

Ⅰ.数…　Ⅱ.①李…　②李…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004373 号

书　　名	数学历年试题解析[数学二]
作　　者	李正元　李永乐
责任编辑	李锦慧　樊克克
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话	(010)82771887
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2012年2月北京第9版
印　　次	2012年2月北京第1次印刷
开　　本	787毫米×1092毫米　16开
印　　张	19.75
字　　数	520千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-323-0/O·30
定　　价	30.00元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了1998年~2012年全国硕士研究生入学统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系(类似或雷同)，并且能清楚地察出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学二的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、三以及原数学四相关内容的典型考题(含解答)，同时也精选了1997年(含)以前数学二相关内容的典型考题(含解答)**，供将要备考数学二的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李正元、李永乐**主编的**《考研数学复习全书》(理工类·数学二)**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合)，复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功!

编者

2012年2月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一篇　2012 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　1998 ~ 2011 年考研数学二试题

第三篇　1998 ~ 2011 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2012 年考研数学二试题及答案与解析

2012 年考研数学二试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【　　】

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0) =$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

【　　】

(3) 设 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$,$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

【　　】

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx(k = 1,2,3)$,则有

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.　　(B) $I_3 < I_2 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 < I_1$.　　(D) $I_2 < I_1 < I_3$.

【　　】

(5) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$,$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$,则使不等式 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$.　　(B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$.　　(D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

【　　】

(6) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm\dfrac{\pi}{2}, y = 1$ 围成,则 $\iint\limits_D (xy^5 - 1)\,dx\,dy =$

(A) π.　　(B) 2.　　(C) -2.　　(D) $-\pi$.

【　　】

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　　　　　　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

【　】

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

【　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(12) 微分方程 $y\,dx+(x-3y^2)\,dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________.

(13) 曲线 $y=x^2+x\,(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵．若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值．

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值．

(17)（本题满分 12 分）

过点 $(0,1)$ 作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成．求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积．

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成．

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 x_n,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

2012 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的间断点只有 $x=\pm 1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1}y=\infty$,故 $x=1$ 是垂直渐近线.

$\left(\text{而}\lim\limits_{x\to -1}y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2},\text{故 } x=-1 \text{ 不是渐近线}\right)$.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$,故 $y=1$ 是水平渐近线.(无斜渐近线).

综上可知,渐近线的条数为2.故选(C).

(2)【分析一】 按定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

故选(A).

【分析二】 用乘积求导公式.含因子 e^x-1 项在 $x=0$ 为0,故只留下一项.于是

$$f'(0)=\left[e^x(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)\right]\Big|_{x=0}$$

$$=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

故选(A).

(3)【分析】 因 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$,所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 单调上升.

若数列 $\{S_n\}$ 有界,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,于是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

反之,若数列 $\{a_n\}$ 收敛,则数列 $\{S_n\}$ 不一定有界.例如,取 $a_n=1(n=1,2,\cdots)$,则 $S_n=n$ 是无界的.

因此,数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件.故选(B).

(4)【分析】 $I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,\quad I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x.$

先比较 I_1 与 I_2:由

$$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0\Rightarrow I_1>I_2.$$

再比较 I_2 与 I_3:由

$$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>0\Rightarrow I_2<I_3.$$

还需比较 I_1 与 I_3:由

$$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{(t-\pi)^2}\sin(t-\pi)\mathrm{d}t+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{2\pi}^{3\pi}[e^{x^2}-e^{(x-\pi)^2}]\sin x\mathrm{d}x>0\Rightarrow I_3>I_1.$$

因此 $I_3>I_1>I_2$.故选(D).

(5)【分析】 因 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,当 y 固定时对 x 单调上升,故当 $x_1<x_2$ 时

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1).$$

又因 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,当 x 固定时对 y 单调下降,故当 $y_1>y_2$ 时

$$f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2).$$

因此,当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 时

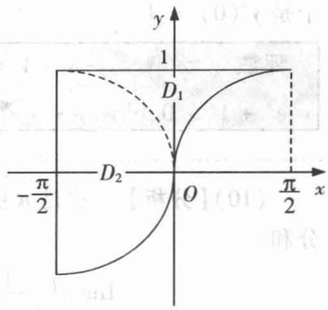
此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$f(x_1,y_1) < f(x_2,y_1) < f(x_2,y_2).$$

故选(D).

(6)【分析一】 添加辅助线 $y=-\sin x$,将 D 分成 D_1,D_2,$D=D_1\cup D_2$. 由于 D_1 关于 y 轴对称,D_2 关于 x 轴对称,于是

$$\iint_D x^5 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}x^5y\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}x^5y\mathrm{d}\sigma=0+0=0.$$



因此 $$I=\iint_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D -1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}1\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x=-\pi.$$

故选(D).

【分析二】 直接化为累次积分.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}x^5y^2-y\right)\Big|_{\sin x}^{1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x^5(1-\sin^2x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x=-\pi,$$

其中$\frac{1}{2}x^5(1-\sin^2x)$,$\sin x$ 均为奇函数,所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x^5(1-\sin^2x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=0.$$

故选(D).

(7)【分析】 n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$,显然

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关. 故选(C).

(8)【分析】 本题考查初等变换与初等矩阵. 由于 $\boldsymbol{P}$ 经列变换为 $\boldsymbol{Q}$,有

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1),$$

那么 $$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)]=\boldsymbol{E}_{12}^{-1}(1)(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{E}_{12}(1)$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}.$$

故选(B).

二、填空题

(9)【分析】 在原方程中令 $x=0$ 得 $y(0)=0$. 再将原方程两边对 x 求导得

$$2x-y'=\mathrm{e}^y y'. \qquad (*)$$

令 $x=0,y=0$ 得

$$-y'(0)=y'(0),$$

于是 $y'(0)=0$. 再将(*)式对 x 求导得

$$2-y''=e^{y}y'^{2}+e^{y}y''.$$

令 $x=0,y=0,y'=0$ 得

$$2-y''(0)=y''(0),$$

于是 $y''(0)=1$.

评注 方程 $x^2-y+1=e^y$ 中,令 $x=0$ 得 $e^y+y-1=0$. 显然 $y=0$ 是解,由 $(e^y+y-1)'_y=e^y+1>0$, $e^y+y-1\nearrow$,故只有唯一零点. 因此 $y(0)=0$.

---

(10)**【分析】** 这是 n 项和式的数列极限,按和式特点,确定它是哪个函数在哪个区间上的一个积分和.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

---

(11)**【分析】** $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$是一元函数与二元函数的复合函数,由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right),$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'-f'=0.$$

---

(12)**【分析】** 以 y 为自变量,x 为因变量,这是一阶线性微分方程,因为方程可改写为

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=3y,$$

两边乘 $y\left(e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{\ln|y|}=|y|\right)$,则有

$$\frac{d}{dy}(xy)=3y^2.$$

积分得

$$xy=y^3+C.$$

由 $y(1)=1$ 得 $C=0$,故特解为 $y=\sqrt{x}$.

---

(13)**【分析】** 先求

$$y'=2x+1,\quad y''=2.$$

按曲率公式可知,∀ 点处曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{3/2}}.$$

现由 $K=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得

$$\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由此解得 $x=-1$,相应地 $y=0$(另一解 $x=0$ 不合题意).

因此所求点的坐标是$(-1,0)$.

(14)【分析】 $\boldsymbol{A}$ 两行互换得到 $\boldsymbol{B}$,由行列式性质 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$,故

$$|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|^2=-27.$$

或者,$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{BA}^*=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{AA}^*=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}_{12},$$

故 $$|\boldsymbol{BA}^*|=|3\boldsymbol{E}_{12}|=-27.$$

三、解答题

(15)【分析与求解】 (Ⅰ)

$$a=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-\sin x}{x^2}$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=1+0=1.$$

(Ⅱ)由 $a=1$,得

$$f(x)-a=\frac{x^2+x-\sin x}{x\sin x}-1=\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x\sin x}\sim\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{记}}g(x)\ (x\to0).$$

只需确定 $x\to0$ 时 $g(x)$ 是 x 的几阶无穷小.

方法 1° 用泰勒公式.

由 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ 得

$$g(x)=\frac{x^2+x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-x^2+o(x^3)}{x^2}=\frac{1}{6}x+o(x)\sim\frac{1}{6}x,$$

因此 $x\to0$ 时 $g(x)$ 是 x 的一阶无穷小,故 $k=1$.

方法 2° 用待定阶数法(用洛必达法则确定常数 $k>0$,使得$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x^k}$∃ 且不为0).

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)(x-\sin x)}{x^{k+2}}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(k+2)x^{k+1}}\xlongequal{k=1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

因此 $x\to0$ 时 $g(x)$ 是 x 的一阶无穷小,故 $k=1$.

(16)【分析与求解】 先求驻点.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\ y=0.\end{cases}$

再求驻点处的二阶偏导数.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+(1-x^2)(-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y)=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

由于在点$(1,0)$处,

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}},\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow AC-B^2=2e^{-1}>0$,又$A<0$

$\Rightarrow$点$(1,0)$为极大值点,$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$为极大值.

同样在点$(-1,0)$处,

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}},\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow AC-B^2=2e^{-1}>0$,又$A>0$

$\Rightarrow$点$(-1,0)$为极小值点,$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$为极小值.

---

(17)**【分析与求解】** 1°先求切线与切点.设切点为$(t,\ln t)$,切线的斜率$k=\dfrac{1}{t}$,于是点$(t,\ln t)$处$y=\ln x$的切线方程为

$$y=\ln t+\frac{1}{t}(x-t),\text{即 }y=\ln t-1+\frac{x}{t}.$$

令$x=0,y=1$,得

$$1=\ln t-1,\text{即 }t=e^2.$$

所以切线方程为

$$y=1+\frac{x}{e^2},$$

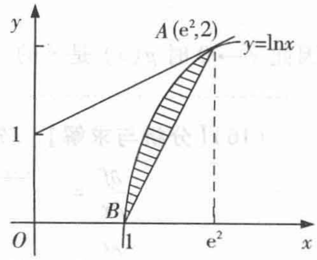
切点为$A(e^2,2)$.

2°求直线段$\overline{AB}$的方程.

$y=\ln x$与x轴交于$B(1,0)$,于是$\overline{AB}$的方程为

$$y=\frac{2}{e^2-1}(x-1).$$

3°求D的面积.区域D如图所示.



$$D\text{的面积}=\int_1^{e^2}\ln x\,dx-\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2$$

$$=x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\frac{1}{x}dx-(e^2-1)$$

$$=2e^2-(e^2-1)-(e^2-1)=2.$$

4°求旋转体的体积.

D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = \pi\int_1^{e^2} \ln^2 x\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot (e^2 - 1)$$

$$= \pi x\ln^2 x \Big|_1^{e^2} - \pi\int_1^{e^2} 2\ln x\mathrm{d}x - \frac{4}{3}\pi(e^2 - 1)$$

$$= 4\pi e^2 - 2\pi x\ln x \Big|_1^{e^2} + 2\pi(e^2 - 1) - \frac{4}{3}\pi(e^2 - 1) = \frac{2}{3}\pi(e^2 - 1).$$

评注 上述解法中直接用了求直角三角形面积公式与正圆锥体的体积公式.

---

(18)【**分析与求解**】 作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则 D 的极坐标表示是

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 + \cos\theta,$$

于是

$$I = \iint_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r^2\cos\theta\sin\theta \cdot r\mathrm{d}r = \int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta \cdot \frac{1}{4}r^4 \Big|_0^{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta(1 + \cos\theta)^4\mathrm{d}\cos\theta \xlongequal{t = \cos\theta} -\frac{1}{4}\int_1^{-1} t(1 + t)^4\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} t(1 + t)^4\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}(1 + t)^5$$

$$= \frac{1}{20}\left[t(1 + t)^5\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1 + t)^5\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{20}\left[32 - \frac{1}{6}(1 + t)^6\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left(32 - \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}.$$

---

(19)【**分析与求解**】(Ⅰ)因 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0, & ① \\ f''(x) + f(x) = 2e^x, & ② \end{cases}$$

由 ② 得 $f''(x) = 2e^x - f(x)$,代入 ① 得

$$f'(x) - 3f(x) = -2e^x,$$

两边乘 e^{-3x} 得

$$[e^{-3x}f(x)]' = -2e^{-2x}.$$

积分得 $\quad e^{-3x}f(x) = e^{-2x} + C$, 即 $f(x) = e^x + Ce^{3x}$.

代入 ② 式得 $\quad e^x + 9Ce^{3x} + e^x + Ce^{3x} = 2e^x$.

$\Rightarrow C = 0$,于是 $f(x) = e^x$.

代入 ① 式自然成立. 因此求得

$$f(x) = e^x.$$

(Ⅱ)曲线方程为

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

为求拐点,先求出 y''.

$$y' = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + 1,$$

$$y'' = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + 4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + 2x,$$

由于 $\quad y''(x)\begin{cases} > 0, & x > 0, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & x < 0, \end{cases}$

因此$(0,y(0))=(0,0)$是曲线的唯一拐点.

(20)【分析与证明】 令$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$,

则转化为证明$f(x)\geqslant 0(x\in(-1,1))$.

因$f(x)=f(-x)$,即$f(x)$为偶函数,故只需考察$x\geqslant 0$的情形.

用单调性方法.

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1,$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x>0(x\in(0,1]),$$

其中$\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}>0,\quad 2\left[\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]>0,\quad \sin x>0(x\in(0,1))$.

因$x\in(0,1)$时$f^{(3)}(x)>0$,又$f''(x)$在$[0,1)$连续$\Rightarrow f''(x)$在$[0,1)\nearrow$,$f''(x)>f''(0)=2>0(x\in(0,1])$,同理$f'(x)$在$[0,1)\nearrow$,$f'(x)>f'(0)=0(x\in(0,1])\Rightarrow f(x)$在$[0,1)\nearrow$,$f(x)>f(0)=0(x\in(0,1])$.又因$f(x)$为偶函数$\Rightarrow f(x)>0(x\in(-1,1),x\neq 0)$,$f(0)=0$.即原不等式成立.

(21)【分析与证明】 (Ⅰ)转化为证明$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$有唯一零点.

由于$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$连续,又

$$f(1)=n-1>0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-1=0,$$

由连续函数的零点存在性定理可知$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$至少$\exists$一个零点.又

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0\left(\frac{1}{2}<x<1\right),$$

所以$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]\nearrow$,$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$的零点唯一,即$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内只有一个根.

(Ⅱ)方法1° 考察x_n的单调性.

记$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$,它的唯一零点记为$x_n\left(x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)\right)$.现证$x_n\searrow$.由于

$$f_{n+1}(x)=x^{n+1}+x^n+\cdots+x-1=x^{n+1}+f_n(x),$$

显然$f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)<0$,$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}>0\Rightarrow f_{n+1}(x)$在$\left(\frac{1}{2},x_n\right)$有唯一零点,此零点必然是$x_{n+1}$,且

$$\frac{1}{2}<x_{n+1}<x_n.$$

因此x_n单调下降且有界,故必$\exists$极限

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com