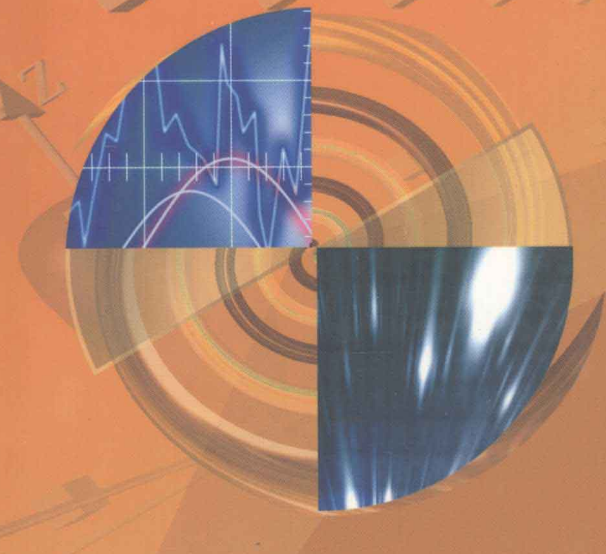
高等学校“十五”规划教材

概率论与数理统计



主　编　周圣武
副主编　周长新　李金玉

煤炭工业出版社

高等学校“十五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　周圣武
副主编　周长新　李金玉

煤 炭 工 业 出 版 社
· 北　京 ·

内 容 提 要

本书是高等学校“十五”规划教材，是面向21世纪课程教材. 全书共分为两部分：概率论部分（第一章至第五章）着重介绍概率论的基本概念、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容；数理统计部分（第六章至第九章）着重介绍抽样分布、参数估计、假设检验以及回归分析的基本理论与方法。在编写中注意联系工科院校实际，选用了大量的结合工科、经济管理等专业的例题和习题，针对性强。

本书可作为高等学校工科和经济管理等各专业的教材，也可供成人高校、自学考试人员以及工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/周圣武主编．—北京：煤炭工业出版社，2004

ISBN 7-5020-2460-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．周…　Ⅲ．①概率论 ②数理统计

Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第050592号

煤炭工业出版社　出版
（北京市朝阳区芍药居35号　100029）
网址：www.cciph.com.cn
北京京科印刷有限公司　印刷
新华书店北京发行所　发行

*

开本 787mm×960mm 1/16　印张 18 1/2
字数 340千字　印数 1—6,000
2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷
社内编号 5231　定价：26.00元

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学分支．随着现代科学技术的迅猛发展，概率论、数理统计的理论与方法已广泛地应用于许多科学领域，以及工业、农业、医药卫生等国民经济各个部门．

概率论与数理统计是学习现代科学技术的重要理论基础，是高等学校理工科、经济管理等专业重要的基础课程之一，已被列为工学、经济管理等专业的硕士研究生入学考试数学科目的考试内容．

本书是作者在多年概率论与数理统计教学实践的基础上编写的．书中融入了作者多年教学实践中的一些经验体会．旨在使学生通过本书的学习，能够掌握处理随机问题的基本理论和方法，培养他们分析问题和解决实际问题的能力．本书可作为高等学校工学类、经济类、管理类等专业的概率论与数理统计课程的教材或参考书，也可供成人高校、自学考试的广大师生以及工程技术人员使用．

本书分两个部分：概率论部分与数理统计部分．第一章至第五章为概率论部分，主要介绍概率论的基本概念、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容，为学生提供重要的基础概念、必要的基本理论和处理问题的思想方法．第六章至第九章为数理统计部分，主要介绍抽样分布以及有广泛应用意义的参数估计、假设检验以及回归分析的基本理论与方法．

我们在选材和叙述上努力做到联系工科和经济等专业的实际，注重阐述应用理论解决实际问题的方法，力求做到叙述简洁，深入浅出，通俗易懂，便于教师教学和学生自学．本书每一部分都配有大量的典型例题；每一章都配有大量的习题，并根据习题的难易程度将其分成两组，第一组为基本题，第二组具有一定难度，初学者可以略去，仅供需进一步提高者选做；本书的最后还附了习题答案，供读者参考．

本书第一、二、三、四章由周长新编写，第五、六章由李金玉编写，第七、八、九章由周圣武编写．全书由周圣武统稿并修改、定稿．

书稿完成过程一直得到了中国矿业大学数学系“概率统计教学小组”的支持与帮助，该教学小组的老师认真审阅了本书，提出了许多宝贵意见. 在此我们谨向对本书出版给予支持和帮助的老师和朋友们表示衷心的感谢. 特别要感谢中国矿业大学北京校区景平、高运良，安徽理工大学许志才和西安科技大学丁正生等多位教授对本书的认真审阅，在此基础上我们对书稿进行了反复修改，使之逐步完善. 在成书的过程中，我们参考了大量的资料和教材，由于篇幅所限未能全部列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢.

由于时间仓促和作者水平有限，错误和不妥之处，恳请同行与读者批评指正.

编　者

2004 年 2 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

在对自然界和人类社会的研究中，人们发现有两类现象：一类是在一定条件下必然发生(或不发生)的现象，称为**确定性现象**．例如，向上抛一枚硬币必然下落；在标准大气压下，将水加热到 100 ℃，水必然沸腾．另一类是在一定条件下其结果可能出现也可能不出现的现象，称为**随机现象**．例如，在相同的条件下抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，这在每次抛掷之前都是无法确定的，但是在大量的重复观察中，它的结果又会呈现某种规律性，多次重复抛掷一枚硬币得到正面朝上和反面朝上的次数大致各占一半，这种规律性叫做**统计规律性**．

概率论与数理统计就是一门研究随机现象统计规律性的数学学科．概率论研究随机现象、随机变量的规律性，数理统计研究的是如何有效地收集、整理、分析带有随机性的数据以及对考察的现象做出推断或预测，为科学决策提供科学的依据和建议．概率论与数理统计的理论和方法已被广泛地应用于科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门．在近代物理、气象、天文、地震的预报、产品的质量检查、农业实验的数据处理及多因素实验配方的最佳方案、可靠性工程、自动控制等方面，都显示出概率论与数理统计的独特作用．

§1.1　随机事件及其运算

1．随机试验

为了研究随机现象的规律性，我们需要对研究对象进行观察试验．例如：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况．

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况．

E_3：掷一颗骰子，观察出现的点数．

E_4：一射手射击，首次击中目标所需射击次数．

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命．

上面这几个试验都具有如下三个共同的特点：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但试验的所有可能结果预先是明确的;

(3) 进行一次试验之前不能预先确定哪一个结果会出现.

我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E. 本书中以后提到的试验都是指**随机试验**.

2. 随机事件与样本空间

我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 Ω. 样本空间的每一个元素称为**样本点**.

上述试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$的样本空间 Ω_k 分别为

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$;

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_4=\{1,2,3,\cdots\}$;

$\Omega_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

注意 样本空间的元素是由试验目的所确定的. 例如,在 E_2 中如考察出现正面的次数,则相应的样本空间 $\Omega=\{0,1,2,3\}$.

在随机试验中,我们把样本空间的子集称为**随机事件**,简称**事件**,一般记为 A、B、C 等. 例如,在随机试验 E_3 中,若分别用 A 和 B 表示事件“出现的点数为奇数”和“出现的点数为偶数”,则 $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$.

所谓事件 A **发生**,是指在一次试验中 A 包含的某个样本点出现. 在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**. 由于样本空间 Ω 包含所有的样本点,在每次试验中它必然发生,因此 Ω 是一个必然事件. 在每次试验中都不发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$,它是样本空间 Ω 的一个空子集. 只包含一个样本点的事件称为**基本事件**.

3. 事件间的关系及其运算

由于事件是一个集合,因此事件间的关系和运算也可以按照集合之间的关系和运算来处理,下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据“事件发生”的含义,给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是 Ω 的子集.

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 的样本点一定属于 B,则称**事件 B 包含事件 A**,记为 $A\subset B$.

显然对任意事件 A,都有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

(2) 事件 A 与事件 B 至少有一个发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B

的**和事件**，记为 $A\cup B$，即事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为这 n 个事件的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生所构成的事件称为这可列个事件的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 事件 A 与事件 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB，即事件 $AB=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生所构成的事件称为这 n 个事件的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生所构成的事件称为这可列个事件的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4) 事件 B 发生而事件 A 不发生所构成的事件称为事件 B 与事件 A 的**差事件**，记为 $B-A$，即事件 $B-A=\{x\mid x\in B$ 且 $x\notin A\}$.

(5) 若事件 A 与事件 B 满足 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的** 或**互斥的**. A 与 B 互不相容，是指事件 A 与事件 B 不能同时发生. 例如，基本事件是两两互不相容的.

类似地，对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意两个事件 A_i 与 A_j 互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为**两两互不相容事件**.

(6) 若事件 A 与事件 B 满足 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B **互为对立事件**或**互为逆事件**. 事件 A 与事件 B 对立，是指在每次试验中，事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$，显然 $\bar{A}=\Omega-A$.

由定义可知，对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必是对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用**文氏(Venn)图**直观地表示，若用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示样本点，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则事件 A 与事件 B 的各种关系及运算如图 1－1 所示.

在进行事件运算时，经常要用到**事件的运算律**. 设 A,B,C 为事件，则有

交换律：　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

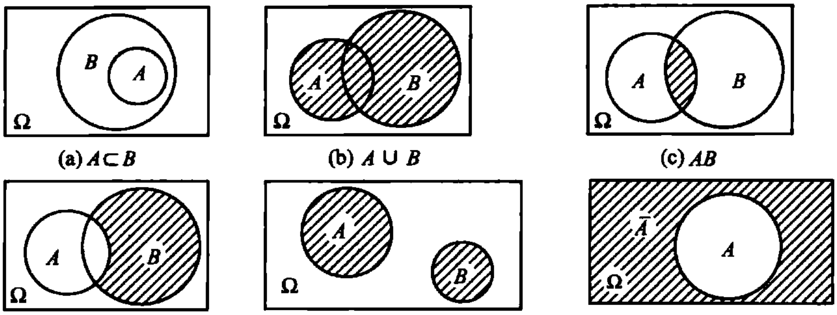
结合律：　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律：　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.



(a) $A\subset B$　(b) $A\cup B$　(c) AB

(d) $B-A$　(e) $AB=\phi$　(f) $\bar{A}$

图 1－1

例 1　设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；　(2) A,B,C 中恰有一个发生；

(3) A,B,C 中至少有一个发生；　(4) A,B,C 中不多于两个发生；

(5) A,B 中至少有一个发生而 C 不发生；(6) A,B,C 中恰有两个发生.

解　(1) $A\bar{B}\bar{C}$，或 $A-B-C$；

(2) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(3) $A\cup B\cup C$，或 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$；

(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$，或$\overline{ABC}$；

(5) $(A\cup B)\bar{C}$；

(6) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

例 2　从一批产品中每次抽取一件产品进行检验(取后不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$). 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 三次都取到合格品；　(2) 至少有一次取到合格品；

(3) 三次中恰有两次取到合格品；　(4) 三次中最多有一次取到合格品.

解　(1) 三次都取到合格品：$A_1A_2A_3$；

(2) 至少有一次取到合格品：$A_1\cup A_2\cup A_3$；

(3) 三次中恰有两次取到合格品：$A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3$；

(4) 三次中最多有一次取到合格品：$\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_2\bar{A}_3$.

例 3　试求事件“甲种产品滞销且乙种产品畅销”的对立事件.

解　设 A 表示“甲种产品畅销”，B 表示“乙种产品畅销”，则事件“甲种产品滞销且乙种产品畅销”可表示为$\bar{A}\cap B$，其对立事件为

$$\overline{\bar{A}\cap B}=\bar{\bar{A}}\cup\bar{B}=A\cup\bar{B},$$

于是所求对立事件为“甲种产品畅销或乙种产品滞销”.

§1.2　频率与概率

我们知道在一次随机试验中，某个随机事件可能发生也可能不发生. 人们希望知道某个随机事件在一次随机试验中发生的可能性的大小，给出随机事件发生可能性大小的定量描述，这种定量描述就是随机事件的概率. 人们是通过频率认识概率的，下面先介绍频率.

1. 频率

定义 1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A 是 E 的某个事件，假设在相同条件下进行了 n 次重复试验，若在这 n 次试验中事件 A 发生了 n_A 次，则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

由定义 1 可知，频率具有如下基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为两两互不相容的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生越频繁，即事件 A 在一次试验中发生的可能性越大. 实践证明，频率具有随机波动性，即使同样进行 n 次试验，n_A 也会不同，从而频率也不相同，但这种波动的幅度会随着试验次数 n 的增加而减少，即随着 n 逐渐增大，$f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 $P(A)$. 常数 $P(A)$ 客观上反映了事件 A 发生可能性的大小. 人们把这个常数 $P(A)$ 定义为事件 A 发生的**概率**.

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)都曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如下：

试　验　者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由此可见在上述掷硬币的试验中出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数的增加，它逐渐稳定于 0.5，这个 0.5 就反映了正面出现的可能性的

大小.

2. 概率的统计定义

定义 2 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A，若当试验次数 n 充分大时，频率 $\frac{n_A}{n}$ 在某一数值 p 的附近摆动，且随着试验次数 n 的增加，其摆动的幅度越来越小，则称数值 p 为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$.

由定义 2，显然有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,\ P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0.$$

一个随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 可由其频率近似，即当 n 充分大时用频率近似代替概率，$P(A)\approx\frac{n_A}{n}$. 但是，我们不可能对每个事件都做大量的试验，从中发现频率的稳定值. 为了理论研究的需要，我们可从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义.

3. 概率的公理化定义

定义 3 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若对 E 的每一事件 A 赋于一个实数 $P(A)$，且集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下三个公理：

(1) **非负性**：$P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**：$P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性**：对于两两互不相容的可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i). \tag{1.1}$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的定义 3，可得概率的一些**基本性质**：

性质 1 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing$，$n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$. 于是由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

再由概率的非负性 $P(\varnothing)\geqslant 0$，得 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2}$$

式(1.2)称为概率的**有限可加性**.

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$，由概率的可列可加性以及性质 1 得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3　设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.3}$$
$$P(B)\geqslant P(A). \tag{1.4}$$

证　由 $A\subset B$，得 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$. 由概率的有限可加性得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

所以

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

再由概率的非负性，$P(B-A)\geqslant 0$，得

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4　对于任意事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

证　由定义 3 知 $P(A)\geqslant 0$. 又因 $A\subset\Omega$，由性质 3 知 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$，所以

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

性质 5　对于任意事件 A，有

$$P(\bar{A})=1-P(A). \tag{1.5}$$

证　因为 $A\cup\bar{A}=\Omega$，且 $A\bar{A}=\varnothing$，由性质 2 得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),$$

所以

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

性质 6　对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.6}$$

证　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故由性质 2 和性质 3 得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

式(1.6)可以推广到有限个事件的情况．对于任意三个事件 A,B,C，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{1.7}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以用归纳法得到一般的加法公式

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.8}$$

例 1(订报问题) 某市发行 A,B,C 三种报纸，已知市民中订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 报和 B 报的有 10%，同时订阅 A 报和 C 报的有 8%，同时订阅 B 报和 C 报的有 5%，同时订阅 A,B,C 报的有 3%. 试求下列事件的概率：

(1) 只订 A 报纸； (2) 只订 A,B 两种报纸； (3) 至少订一种报纸；

(4) 不订任何报纸； (5) 恰好订两种报纸.

解 设 A,B,C 分别表示“订 A 报”、“订 B 报”、“订 C 报”的事件，则

$$P(A)=0.45,\ P(B)=0.35,\ P(C)=0.30,\ P(AB)=0.10,$$
$$P(AC)=0.08,\ P(BC)=0.05,\ P(ABC)=0.03.$$

(1) 只订 A 报的事件为 $A-A(B\cup C)$，因此

$$\begin{aligned}P(A-A(B\cup C))&=P(A)-P(A(B\cup C))\\&=P(A)-P(AB\cup AC)\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.10-0.08+0.03\\&=0.30.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(AB\bar{C})&=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)\\&=0.10-0.03=0.07.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&\quad-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03\\&=0.90.\end{aligned}$$

(4) $P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})=1-P(\overline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

(5) 恰好订两种报纸的事件为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$，由

$$P(AB\bar{C})=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07,$$
$$P(A\bar{B}C)=P(AC-ABC)=P(AC)-P(ABC)=0.08-0.03=0.05,$$
$$P(\bar{A}BC)=P(BC-ABC)=P(BC)-P(ABC)=0.05-0.03=0.02,$$

得

$$\begin{aligned}P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)&=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)\\&=0.07+0.05+0.02=0.14.\end{aligned}$$

例 2 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，问：

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

(1) 当 $P(A\cup B)$最小时，$P(AB)$达到最大值.

当 $A\subset B$ 时 $P(A\cup B)=P(B)=0.7$ 最小. 所以当 $A\subset B$ 时，事件 AB 的概率 $P(AB)=0.6+0.7-0.7=0.6$ 为最大值.

(2) 当 $P(A\cup B)$最大时，$P(AB)$达到最小值. 因为 $P(A)+P(B)>1$，所以当 $A\cup B=\Omega$ 时，$P(A\cup B)=1$ 最大，$P(AB)=0.6+0.7-1=0.3$ 为最小值.

例 3　(1) 证明 $P(AB)=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\,\bar{B})$;

(2) 证明 $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$的充要条件是 $P(A)+P(B)=1$.

证　(1) $P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$

$$=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\,\bar{B}).$$

(2) $P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$$=[1-P(A)-P(B)]+P(AB).$$

所以

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=P(AB)\Leftrightarrow P(A)+P(B)=1.$$

§1.3　等可能概型

1. 等可能概型

定义 1　设随机试验 E，若其样本空间 Ω 满足下列条件：

(1) 样本点的总数有限，即 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;

(2) 每个基本事件的发生是等可能的，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

则称此试验 E 为**等可能概型**，也称为**古典概型**.

由于基本事件是互不相容的，因此有

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{j=1}^{n}\{e_j\})=\sum_{j=1}^{n}P(\{e_j\})=nP(\{e_i\}),\ i=1,2,\cdots,n,$$

所以

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n.$$

设事件 A 为等可能概型 E 中的任一随机事件，A 包含 k 个样本点 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}$，即 $A=\bigcup_{j=1}^{k}\{e_{i_j}\}$，则有

$$P(A)=P(\bigcup_{j=1}^{k}\{e_{i_j}\})=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}.$$

即

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点的个数}}{\Omega\text{ 包含的样本点的个数}}.\qquad(1.9)$$