软件工程系列规划教材

离散数学

郝林　黄亚群　李劲　编著

科学出版社

软件工程系列规划教材

离散数学

郝 林 黄亚群 李 劲 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

离散数学是计算机科学的核心课程。本书共分 4 篇8 章，分别介绍数理逻辑、集合论、图论和代数系统四个专题。内容体系严谨，叙述深入浅出，证明推演详尽。在每一专题后，给出相关知识的应用实例，并且在每一章后配有相当数量的习题。为便于学习，本书配有多媒体课件及习题解答。

本书可作为高等院校计算机科学与技术专业及软件工程专业的教材，也可作为其他相关专业的教学用书，并可供计算机科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/郝林，黄亚群，李劲编著. —北京：科学出版社，2012
软件工程系列规划教材

ISBN 978-7-03-034344-4

Ⅰ.①离… Ⅱ.①郝… ②黄… ③李… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 096315 号

责任编辑：贾瑞娜 / 责任校对：钟 洋
责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 5 月第一次印刷 印张：19 3/4
字数：480 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“软件工程系列规划教材”专家委员会

前　言

离散数学是现代高等院校计算机科学与技术专业及其他相关专业的基础数学课程。它以离散量为研究对象，充分讨论离散量的结构及其相互间的关系，反映了计算机科学中对象及研究方法离散性的特点。为适应计算机相关专业教学的不断发展，笔者根据多年的教学实践和需求编写了本书。

本书分为 4 篇 8 章，主要内容如下：

第 1 章和第 2 章是数理逻辑部分，主要介绍命题逻辑和谓词逻辑的基础知识。这部分是数学和计算机科学学习的基础工具性知识。

第 3～5 章介绍集合论基础知识，包括集合、关系和函数、基数等。这些是现代数学的基础。

第 6 章介绍图论的基础知识，包括图的基本知识和若干特殊图的讨论。

第 7 章和第 8 章是代数系统的内容，主要有群、环、域和格论及布尔代数的知识。这部分讨论了集合及其上的运算间的重要性质。

离散数学课程设置的主要目的是培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力。通过学习，不仅使学生掌握学习计算机科学与技术专业后继课程所必需的离散数学知识，而且增强学生使用离散数学知识进行分析问题和解决实际问题的能力。作为一门基础应用学科的数学教材，如何实现基础理论与实践应用相结合，是本书努力探索和实践的目标。结合对国外 CDIO (conceive-design-implement-operate)模式的认识和探索(CDIO 工程教育模式是近年来国际工程教育改革的最新成果，是由麻省理工学院、瑞典皇家工学院等四所国际一流工科大学发起，我国教育部大力倡导的先进工程教育模式。CDIO 代表构思(conceive)、设计(design)、实现(implement)、运行(operate)，它以产品从研发到运行的生命周期为载体，让学生主动地、实践地、课程之间有机联系地进行学习)，在着重介绍讨论离散数学基本内容的基础上，相应地添加了一定数量的应用实例，努力构架起理论联系实际的桥梁。这对读者尤其是从事工程领域科研的读者学习、理解和应用离散数学理论会有一定帮助。

本书由郝林、黄亚群、李劲共同编著，郝林负责全书的统稿和大纲编写工作，黄亚群编写了第 1～8 章，李劲完成了本书中的算法分析部分，并提供了部分实例及习题。在编写过程中，我们参阅了大量离散数学的书籍和资料，在此谨向有关作者表示衷心的感谢。

由于编著者的水平有限，书中不足和疏漏之处在所难免，我们诚恳地期待各位专家和读者的批评和指正，不胜感激。

作　者

2012 年 3 月

目 录

前言

第一篇 数理逻辑

第 1 章 命题逻辑 …… 3
1.1 命题及命题联结词 …… 3
1.2 命题公式及其类型 …… 10
1.3 等价式与蕴涵式 …… 14
1.4 对偶与范式 …… 20
1.5 推理与证明 …… 33
1.6 命题逻辑的应用 …… 39
小结 …… 43
习题一 …… 44
第 2 章 谓词逻辑 …… 50
2.1 谓词逻辑基本概念 …… 50
2.2 谓词公式及命题符号化 …… 53
2.3 变元的约束 …… 56
2.4 谓词演算的等价式和蕴涵式 …… 58
2.5 谓词公式的范式 …… 62
2.6 谓词演算的推理理论 …… 65
小结 …… 69
习题二 …… 70

第二篇 集 合 论

第 3 章 集合论基础 …… 77
3.1 集合的基本概念 …… 77
3.2 集合的运算 …… 80
3.3 集合的划分与覆盖 …… 85
3.4 包含排斥原理 …… 87
3.5 数学归纳法 …… 89
3.6 集合的计算机表示 …… 92

小结 …… 93
习题三 …… 94
第 4 章　二元关系 …… 98
4.1　关系的概念 …… 98
4.2　关系的性质 …… 103
4.3　关系的运算 …… 105
4.4　关系的闭包运算 …… 113
4.5　等价关系和等价类 …… 121
4.6　相容关系和相容类 …… 125
4.7　序关系和哈斯图 …… 128
4.8　关系的应用 …… 132
小结 …… 135
习题四 …… 136
第 5 章　函数 …… 141
5.1　函数的概念 …… 141
5.2　函数的运算 …… 145
5.3　集合的基数 …… 149
5.4　基数的比较 …… 155
5.5　特征函数的应用 …… 157
小结 …… 158
习题五 …… 159

第三篇　图　论

第 6 章　图论 …… 165
6.1　图的基本概念 …… 165
6.2　路和图的连通性 …… 170
6.3　图的矩阵表示 …… 176
6.4　欧拉图和哈密尔顿图 …… 186
6.5　平面图及对偶图 …… 192
6.6　图的着色 …… 197
6.7　树与生成树 …… 199
6.8　根树及其应用 …… 205
6.9　最短路径问题 …… 210
6.10　图论的应用 …… 211
小结 …… 219
习题六 …… 220

第四篇　代数系统

第7章　代数结构……229
7.1　代数系统的基本概念……229
7.2　半群与独异点……236
7.3　群与子群……239
7.4　阿贝尔群与循环群……245
7.5　陪集与拉格朗日定理……249
7.6　同态与同构……253
7.7　环与域……260
小结……268
习题七……269
第8章　格与布尔代数……274
8.1　格……274
8.2　特殊格……283
8.3　布尔代数……290
8.4　布尔表达式……296
小结……301
习题八……302

参考文献……306

第一篇 数理逻辑

逻辑是研究推理规律的，它关注的是推理的正确性。逻辑的重点

系，而不是一个具体命题的内容。考虑下面的论断：

凡是人都是要死的。

苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

从技术上说，逻辑并不帮助确定这些命题是否为真，然而，如果前两个命题为真，逻辑可以保证命题“苏格拉底是要死的”也为真。

逻辑方法在数学上用来证明定理，在计算机科学中用来证明一个程序做了要求它所做的事。而用一套符号体系来研究推理的规律，就称为数理逻辑，也称为符号逻辑。

第1章 命题逻辑

1.1 命题及命题联结词

在日常生活中，我们需要进行会话交流，可以根据双方的会话对某些情况进行推理判断。而会话中有陈述句、疑问句、感叹句、祈使句、命令句之分，在进行推理判断的过程中陈述句起了非常重要的作用，如以下几个句子：

(1) 草地湿了。

(2) 他是计算机系90专科班的学生。

(3) 这个小孩有5岁，他上了幼儿园。

以上这些都是一个完整的句子，具有以下几个共同特点：

(1) 它们都是陈述句，而非疑问句、感叹句、祈使句、命令句等。

(2) 这些句子所讲述的内容是可以进行判断的，其结果或真或假，但不能同时为真又为假。

这样的句子称为命题，是命题逻辑的基本组成部分。

1.1.1 命题的基本概念

1. 命题的定义

定义1.1.1 能够判断其真假意义的陈述句称为**命题**。

命题的判断结果即真假意义称为命题的真值。判断结果为正确的命题称为真命题，其真值为真，用T或1表示；判断结果为错误的命题称为假命题，其真值为假，用F或0表示。

例1.1.1 判断下列句子是否是命题，如果是命题，试确定其真值。

(1) $\sqrt{2}$是无理数。

(2) 自然能源日益匮乏，所以我们要开发新型能源。

(3) 海王星是一颗美丽的蓝色星球。

(4) $1+1=10$。

(5) 人类会生活在地球之外的星球上。

(6) $3<2$。

(7) $3-x=5$。

(8) 王刚选修离散数学了吗？

(9) 请勿吸烟！

(10) 年轻真好啊！

(11) 快起床，该上学了！

(12) 我正在说谎话。

解 (1)～(6)是命题，(1)～(3)是真命题，(6)是假命题，(7)～(12)不是命题。

(4) 这与整数的进制系统有关，如果是在二进制中其为真，如果是在十进制中其为假，因此要根据具体的应用背景才能判断其结果是真还是假，但不论在哪种数的进制表示中，其真值都是唯一的，所以是命题。

(5) 人类是否真的会在地球之外的星球上生活？目前尚处于研究探索阶段，不得而知。但伴随科技的进

步，人们在未来的某个时候，必能知道其结果，所以客观上是能够判断其真假的。

(7) 中变量 x 没有赋值，对某些 x 可使 $3-x=5$ 为真，另一些 x 可使 $3-x=5$ 为假，整个等式既可以为真同时也可以为假，其真值不唯一，所以不是命题。

(8)～(11)是无所谓是非的句子，无法进行判断，所以不是命题。

(12) 是悖论①，无法判定其真假值，不是命题。

注 在命题的定义中要注意，不是陈述句的句子一定不是命题，只有能分辨真假的陈述句才是命题。真值不唯一的陈述句(即悖论)及没有判断内容的句子如疑问句、感叹句、祈使句、命令句等都不能成为命题。

一个陈述句只要具有唯一确定的真假意义就是命题，而不依赖于怎样确定它的真值以及是否知道它的真值。所以命题的真值具有：①时间性；②区域性；③标准性。

2. 命题的表示法

数学符号对于表现数学的简洁性起着非常重要的作用，明确直接地刻画了抽象的数学理论。在数理逻辑中，命题通常用大写英文字母或带下标的大写英文字母或数字表示，如 P，Q，…，P_1，P_2，…，[2]等。表示命题的符号称为命题标识符，通常将其写在命题的前面，中间用一冒号分开，如 P：今天下雨。

定义 1.1.2 表示一个确定的命题的标识符称为命题常量(或常项、常元)，其真值是确定的。一般用 P，Q，…表示，上面的 P 就是命题常量。而表示任意命题的标识符称为命题变量(或变项、变元)，如 Q。

注 命题变元可以表示任意的命题，其真值无法确定，所以命题变元并不是命题。只有给命题变元 Q 赋予具体的命题后，命题变元 Q 才有真值，才成为命题。这时称对 Q 进行指派，类似于函数和函数值的关系。

3. 命题的分类

在自然语言中，某些陈述句可以分解成一些更简单的陈述句，用一些关联词将简单陈述句组合成复杂陈述句，如例 1.1.2 中的(2)。因此，根据命题的组成形式，把一个命题分为原子命题和复合命题两大类，而原子命题是命题的最小单位。

定义 1.1.3 无法再分解成更简单的陈述句的命题，称为原子命题(或简单命题)；由若干个简单陈述句表述的命题，即由原子命题用联结词复合而成的命题，称为复合命题。

例 1.1.2 判断下列句子是否是复合命题。

(1) 3 不是偶数。

(2) 小王既学过英语又学过日语。

(3) 小王学过英语或日语。

(4) 如果两个角是对顶角，那么它们相等。

---

① 所谓悖论是指对于某些陈述句，如果承认其成立，能推出其不成立；如果承认其不成立，却又能推出其成立，即自相矛盾的句子。最著名的悖论是罗素的理发师悖论：一个小镇上有一个理发师，他给自己定了条规则，他只为不给自己理发的人理发。那么理发师的头发由谁来理？

如果理发师的头发由他自己理，而按他的规定，那么他的头发就不该由他理；如果理发师的头发由别人理，而按他的规定，那么他的头发就该由他自己理；这样就构成矛盾，成了悖论。

数学中集合的悖论，导致了数学发展史上的第三次危机。

(5) 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,$f(x)$在点 x_0 连续当且仅当

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

解 这些命题都是复合命题。其中,(1)可描述为“并非 3 是偶数”,用了关联词“并非”或“不”。(2)可描述为“小王学过英语并且小王学过日语”,用了表示并列关系的关联词“并且”。(3)可描述为“小王学过英语或者小王学过日语”,用了表示选择关系的关联词“或者”。(4)用了表示假使关系的关联词“如果…那么…”。(5)用了关联词“当且仅当”。

这些自然语言中的关联词,在命题逻辑中采用专门的符号进行表示。

1.1.2 命题联结词

命题联结词又称为逻辑联结符,是复合命题中的重要组成部分,用“联结词”将原子命题联结起来构成了复合命题。在数理逻辑中,用命题标识符及命题联结词的符号串表示命题的方法,称为命题符号化(或翻译)。把命题符号化以后,就可以对命题之间的关系用数学特有的方法作进一步研究。

为了符号化复合命题,定义了 5 个常用联结词的符号,称为逻辑联结符或联结词,分别是否定联结词“$\neg$”、合取联结词“$\wedge$”、析取联结词“$\vee$”、条件联结词“$\rightarrow$”和双条件联结词“$\leftrightarrow$”。下面分别加以说明。

1. 否定联结词“$\neg$”

定义 1.1.4 设 P 是命题,复合命题“非 P”或“P 的否定”称为 P 的否定式,记作 $\neg P$(或$\overline{P}$、$\sim P$),读作“非 P”或“P 的否定”,$\neg$ 为否定联结词。

它是一元运算,只对一个命题进行操作。“$\neg P$”表示“P 不成立”,否定的是整个命题,而不仅是否定命题中的某个部分。

其真值与 P 的真值恰好相反,$\neg P$ 的真值为 T 当且仅当 P 的真值为 F。其真值表见表 1-1。

否定联结词“$\neg$”在自然语言中表示“不成立”、“不”、“没有”、“是不对的”等,在开关电路中表示“非门”。

表 1-1 否定式的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

例如

P:明天开运动会。$\neg P$:明天不开运动会。

Q:我们都是大学生。$\neg Q$:我们不都是大学生。注意不能理解为“我们都不是大学生”。

2. 合取联结词“$\wedge$”

定义 1.1.5 设 P、Q 是两个命题,复合命题“P 并且 Q”或“P 与 Q”称为 P 与 Q 的合取式,记作 $P\wedge Q$(或 $P\cdot Q$),读作“P 与 Q 的合取”、“P 且 Q”或“P 和 Q”,$\wedge$ 为合取联结词。

它是二元运算,连接两个或两个以上的命题。“$P\wedge Q$”表示“P 和 Q 同时成立”,P 与 Q 是并列的关系。

表 1-2 合取式的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$P\wedge Q$ 的真值为 T 当且仅当 P、Q 的真值同时为 T。其真值表见表 1-2。

例 1.1.3 将下列命题表示为合取式。

(1) 小王上课认真听讲,下课后又认真做作业。

(2) 小王虽然上课认真听讲,但下课后不认真做作业。

(3) 小王上课不是不认真听讲,而是下课不认真做作业。

(4) 我们今天考试且 $1>2$。

(5) 王立和李兰是同学。

解 设 P:小王上课认真听讲。Q:小王下课后认真做作业。则

(1) 表示为 $P\wedge Q$。

(2) 表示为 $P\wedge\neg Q$。

(3) 表示为 $(\neg(\neg P))\wedge(\neg Q)$。

(4) 设 P:我们今天考试。Q:$1>2$。则原命题表示为 $P\wedge Q$,是假命题。

(5) 是一简单命题。这里的"和"不是联结两个命题,而是表示两人之间的同学关系。

合取联结词"$\wedge$"在自然语言中表示"并且"、"不但…而且…"、"既…又…"、"虽然…但是…"、"尽管…还…"、"一边…一边…"等,在开关电路中表示"与门"。

注 ① "$\wedge$"联结词可以连接任意两个命题,它们之间可能毫无任何内在联系,也可能相互矛盾,这时其真值永为 F。

② $P\wedge Q$ 是一个命题,其真值只与 P、Q 的真值有关,而与 P、Q 表示的具体含义和内容无关。

③ 自然语言中的"和"不一定都能用合取联结词"$\wedge$"表示。

3. 析取联结词"$\vee$"

定义 1.1.6 设 P、Q 是两个命题,复合命题"P 或者 Q"或"P 析取 Q"称为 P 与 Q 的析取式,记作 $P\vee Q$(或 $P+Q$),读作"P 或 Q"或"P 与 Q 的析取"。$\vee$ 为析取联结词。

表 1-3 析取式的真值表

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

它是二元运算,"$P\vee Q$"表示"P 和 Q 中至少有一个成立",P 与 Q 是选择关系。

$P\vee Q$ 的真值为 F 当且仅当 P、Q 的真值同时为 F。P 和 Q 中只要有一项为真,$P\vee Q$ 就为真。其真值表见表 1-3。

析取联结词"$\vee$"在自然语言中表示"或者"、"要么…要么…"、"不是…就是…"等,在开关电路中表示"或门"。

例 1.1.4 将下列命题表示为析取式。

(1) 我学习 VB 语言或 VF 语言。

(2) 我们上午 8 点或 8 点半上课。

(3) 我们只选小李或小王中的一个人当班长。

(4) 他做了二十多或三十套模拟测试题。

解 (1) 设 P:我学习 VB。Q:我学习 VF。

这时有两种可能情况,我可能只学这两种语言中的一种,也可能两种语言同时学。即 P 与 Q 中可能只有一个为真,也可能两个同时为真。因而命题中的"或"是兼容的,称为"可兼或"或"相容或",所以此命题表示为

$$P\vee Q$$

(2) 设 P:我们上午 8 点上课。Q:我们上午 8 点半上课。

因为这两种情形不能同时为真,有且只能有一种情况为真,所以命题中的"或"是"不可兼或",也称为"排斥或",所以此命题表示为

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

(3) 设 P:我们选小李当班长。Q:我们选小王当班长。

命题中的"或"应该是排斥或。所以(3)中的"或"也不能简单地表示为 $P\vee Q$。为了使这两种情况不能同时为真,则原命题表示为

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

由上述两例可见，“不可兼或”可用一些联结词的某种组合形式表示。

(4) 是简单命题，“或”表示题目的数量，不是连接两个命题，命题中的“或”不能用析取联结词“∨”表示。

注 ① 自然语言中的“或”不一定都能用析取联结词“∨”表示。

② 自然语言中的“或”具有二义性，在数理逻辑中约定析取联结词“∨”表示“可兼或”，“∨”连接的两者可以同时成立。需注意区分“可兼或”与“不可兼或”。

4. 条件联结词“→”

定义 1.1.7 设 P、Q 是两个命题，复合命题“如果 P 那么 Q”称为 P 与 Q 的条件式，记作 $P \to Q$（或 $P \supset Q$），读作“如果 P 那么 Q”或“当 P 则 Q”。P 称为条件式的前件（或前提），Q 称为条件式的后件（或结论）。→为条件联结词。

它是二元运算，“$P \to Q$”中 P 与 Q 是因果关系。

$P \to Q$ 的真值为 F 当且仅当 P 为 T 且 Q 为 F。其真值表见表 1-4。

表 1-4 条件式的真值表

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

条件式“$P \to Q$”表示“P 是 Q 的充分条件”或“Q 是 P 的必要条件”。表示：“如果 P 那么 Q”，“只要 P，就有 Q”，“Q 每当 P”，“P 仅当 Q”，“仅当 Q 则 P”，“只有 Q 才 P”，“除非 Q 才 P”等。

注 ① 在自然语言中，“如果 P 那么 Q”中的 P、Q 往往具有某种内在联系；而在数理逻辑中，P、Q 可以没有任何联系。其与合取式及析取式一样，只关心原子命题与复合命题之间的真值关系。只要 P、Q 能够分别确定真值，$P \to Q$ 即成为命题。

② 自然语言中对“如果…那么…”这样的语句，往往表达的是前件 P 为真、后件 Q 也为真的推理关系。而当前件为假时，结论不管真假，往往无法判断其含义。在符号逻辑中规定，当前件 P 为假时，不管后件 Q 是真还是假，条件命题 $P \to Q$ 的真值恒为真。此规定也称为“善意的推定”。

例 1.1.5 符号化下列命题。

(1) 如果天下雨那么水库的蓄水量就充足。

(2) 只要天下雨水库的蓄水量就充足。

(3) 只有天下雨水库的蓄水量才充足。

(4) 仅当天下雨水库的蓄水量才充足。

(5) 如果天不下雨那么水库的蓄水量就不充足。

解 设 P：天下雨。Q：水库的蓄水量充足。则

(1)、(2)表示：$P \to Q$；

(3)、(4)表示：$Q \to P$；

(5)表示：$\neg P \to \neg Q$。

命题(5)还可以理解为，如果水库的蓄水量充足那么一定是下过雨了。所以原命题可以表示为

$$Q \to P$$

这两种表示本质上是相同的。

例 1.1.6 符号化下列命题。

(1) 仅当我不上课且天不下雨，我将去书店。

(2) 他总是按时上班，除非路上堵车或他生病。

解 (1) 设 P：我上课。Q：天下雨。R：我去书店。则命题表示为

$$R \to (\neg P \land \neg Q)$$

(2) 设 P:他按时上班。Q:他在路上堵车。R:他生病。则命题表示为

$$\neg(Q \vee R) \rightarrow P$$

或表示为

$$\neg P \rightarrow (Q \vee R)$$

5. 双条件联结词"$\leftrightarrow$"

定义 1.1.8 设 P、Q 是两个命题,复合命题"P 当且仅当 Q"称为 P 与 Q 的双条件式,记作 $P \leftrightarrow Q$,读作"P 当且仅当 Q",$\leftrightarrow$ 为双条件联结词。

表 1-5 双条件式的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T 当且仅当 P 与 Q 的真值相同。其真值表见表 1-5。

双条件式"$P \leftrightarrow Q$"表示 P 与 Q 为充分必要条件,相当于 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$。这表示:"$P$ 成立当且仅当 Q 成立"、"P 的充分必要条件是 Q"等。

例 1.1.7 符号化下列命题。

(1) 两个三角形全等的充分必要条件是它们的三条边对应相等。

(2) 3 是质数当且仅当太阳从西边升起。

解 (1) 设 P:两个三角形全等。Q:两个三角形的三条边对应相等。则命题表示为

$$P \leftrightarrow Q$$

其真值为 T。

(2) 设 P:3 是质数。Q:太阳从西边升起。则命题表示为

$$P \leftrightarrow Q$$

其真值为 F。

注 数理逻辑中,没有因果关系的命题也可以用双条件联结词连接成一个命题。

至此已经定义了五个常用的联结词,但它们还远远不能广泛地直接表达命题间的联系,根据需要再定义一些联结词,使得命题的符号表示更完善直接。

6. 不可兼析取联结词"$\overline{\vee}$"

定义 1.1.9 设 P、Q 是两个命题,复合命题"P 或 Q 恰有一个为真"称为 P 与 Q 的不可兼析取式,记作 $P \overline{\vee} Q$(或 $P \oplus Q$),读作 P 异或 Q。$\overline{\vee}$ 为不可兼析取联结词(或异或联结词)。

$P \overline{\vee} Q$ 的真值为 T 当且仅当 P 与 Q 恰有一个为 T。其真值表见表 1-6。

表 1-6 不可兼析取式的真值表

P	Q	$P \overline{\vee} Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

7. 与非联结词"$\uparrow$"

定义 1.1.10 设 P、Q 是两个命题,复合命题"P 不成立或 Q 不成立"称为 P 与 Q 的与非式,记作 $P \uparrow Q$,读作 P 与非 Q。$\uparrow$ 为与非联结词。

$P \uparrow Q$ 的真值为 F 当且仅当 P 与 Q 同时为 T。其真值表见表 1-7。

表 1-7 与非式的真值表

P	Q	$P \uparrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

与非联结词"$\uparrow$"在自然语言中,表示"不能同时成立"。

8. 或非联结词“$\downarrow$”

定义 1.1.11 设 P、Q 是两个命题,复合命题“P 不成立且 Q 不成立”称为 P 与 Q 的或非式,记作 $P\downarrow Q$,读作 P 或非 Q。$\downarrow$ 为或非联结词。

$P\downarrow Q$ 的真值为 T 当且仅当 P 与 Q 同时为 F。其真值表见表 1-8。

或非联结词“$\downarrow$”在自然语言中表示“同时不成立”。

表 1-8 或非式的真值表

P	Q	$P\downarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

9. 条件否定联结词“$\xrightarrow{c}$”

表 1-9 条件否定式的真值表

P	Q	$P\xrightarrow{c}Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	T
T	T	F

定义 1.1.12 设 P、Q 是两个命题,复合命题“$P\xrightarrow{c}Q$”称为 P 与 Q 的条件否定式。

$P\xrightarrow{c}Q$ 的真值为 T 当且仅当 P 的真值为 T,Q 的真值为 F。其真值表见表 1-9。

至此定义了 9 个命题联结词,它们的真值取值见表 1-10。

表 1-10 常用命题联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$	$P\overline{\vee}Q$	$P\uparrow Q$	$P\downarrow Q$	$P\xrightarrow{c}Q$
F	F	T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F	F	F	F

由表 1-10 可以看出,$P\overline{\vee}Q$ 与 $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$、$P\uparrow Q$ 与 $\neg(P\wedge Q)$、$P\downarrow Q$ 与 $\neg(P\vee Q)$、$P\xrightarrow{c}Q$ 与 $\neg(P\rightarrow Q)$ 有相同的真值表。其表明后面四种联结词 $\overline{\vee}$、$\uparrow$、$\downarrow$、$\xrightarrow{c}$ 可以直接用前面五种联结词的某种组合表示。同时,联结词 $\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 也可用联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 的某种组合表示。所以通常将联结词 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 称为最小联结词组。

联结词 $\neg$ 是一元运算,其他都是二元运算,$\neg$、$\rightarrow$ 不具有对称性,$\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$ 具有对称性。

1.1.3 命题符号化

有了命题标识符及命题联结词后,就可以把自然语言描述的命题用数学的符号形式表示,进一步进行推理判断。命题符号化或翻译是命题演算的基础。其基本步骤为:

(1) 将命题分解为若干个原子命题,并用命题标识符逐一表示。

(2) 使用恰当的联结词,把原子命题逐个连接起来。

命题符号化时要认真分析命题表达的逻辑关系,如“或”表达的是“可兼或”还是“不可兼或”,条件式中的前件和后件等,而不能仅凭字面含义简单进行符号化。

复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值,而与它们的内容、含义无关,与联结词连接的两个原子命题之间是否有关系无关。

联结词与数学中的其他运算符一样,具有先后次序。规定联结词运算优先级的顺序为:第