●河南省高等教育自学考试教材

高等数学（一）辅导书

主编：鲁丽萍
吕延华

中国商业出版社

高等数学（一）辅导书

主编：鲁丽萍
吕延华

中国商业出版社

（京）新登字 073 号

高等数学（一）辅导书

主　编：鲁丽萍
　　　　吕延华

责任编辑：丁忆竹
责任校对：吕延华
中国商业出版社出版发行
（100053　北京广安门内报国寺 1 号）
河南省招生考试服务中心总发行
（河南省郑州市农业路 11 号）
郑州市南五里堡印刷厂印刷
1994 年 3 月第一版　1995 年 7 月第 2 次印刷
850×1168 毫米　32 开　11.25 印张　280 千字
印数 5001—10000 册
ISBN7 — 5044 — 2593 — 1/G · 237
定价：11.60 元
（如有印装质量问题可更换）

前　　言

教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设。为了满足个人自学、社会助学和国家考试的需要，我们组织了有关高校的部分教师，根据专业考试计划，按照全国高等教育自学考试指导委员会颁布的考试大纲要求，并结合自学考试的特点编写了这本《高等数学（一）》辅导书。它是我省高等教育自学考试财经类专业高等数学（一）课程的学习辅导用书。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试。由于本书的编印比较仓促，不当之处在所难免，肯请社会各界的有关专家、学者和广大自学者批评指正。

河南省高等教育自学
考试委员会办公室
1994 年 3 月

目　　录

第一章　函数及其图形

§1　集合

习题(一)

1　证明交对并运算的分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证：先证 $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

事实上，任取 $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B$，或 $x \in A$ 且 $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (1)$$

再证 $\qquad (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

事实上，任取 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B$，或 $x \in A$ 且 $x \in C \Rightarrow x \in A$，且 $x \in B$ 或 $x \in C \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \qquad (2)$$

由(1)与(2)式知：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

注：我们证明集合 A 与 B 相等的一般方法是：只需证 $A \subset B$ 且 $B \subset A \Rightarrow A = B$.

2　证明摩根律性质 4 (i)

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

证：先证 $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$.

事实上，任取

$$x \in (A \cap B)' \xRightarrow{\text{补集定义}} x \overline{\in} A \cap B \Rightarrow x \overline{\in} A$$

或 $\quad x \overline{\in} B \xRightarrow{\text{补集定义}} x \in A'$ 或 $x \in B' \Rightarrow x \in A' \cup B'$，

所以 $$(A \cap B)' \subset A' \cup B' \tag{3}$$

再证 $$A' \cup B' \subset (A \cap B)'$$

事实上，任取 $x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in A'$ 或 $x \in B' \Rightarrow x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B \Rightarrow x \overline{\in} A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)'$

所以 $$A' \cup B' \subset (A \cap B)' \tag{4}$$

由(3)与(4)式知，$(A \cap B)' = A' \cup B'$.

3 证明性质 6，即证明对任意两个集合 A, B，有 $A - B = A - A \cap B$.

证 先证 $A - B \subset A - A \cap B$

事实上，任取 $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \overline{\in} B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \overline{\in} A \cap B \Rightarrow x \in A - A \cap B$，所以

$$A - B \subset A - A \cap B \tag{5}$$

再证 $$A - A \cap B \subset A - B$$

事实上，任取 $x \in A - A \cap B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \overline{\in} A \cap B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \overline{\in} B$（因 $x \overline{\in} A \cap B \Rightarrow x \overline{\in} B$）$\Rightarrow x \in A - B$.

所以 $$A - A \cap B \subset A - B \tag{6}$$

由(5)或(6)式知：$A - B = A - A \cap B$.

4 画出分配律的文氏图。

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

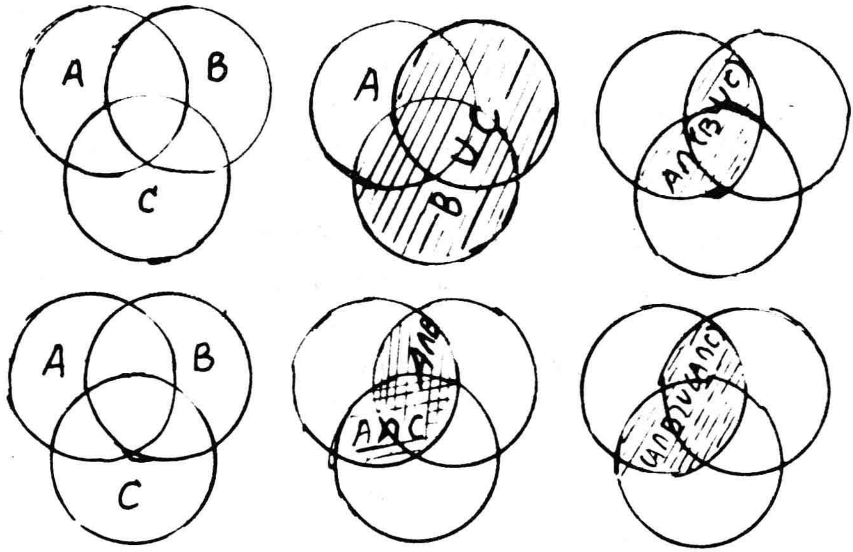

图 1

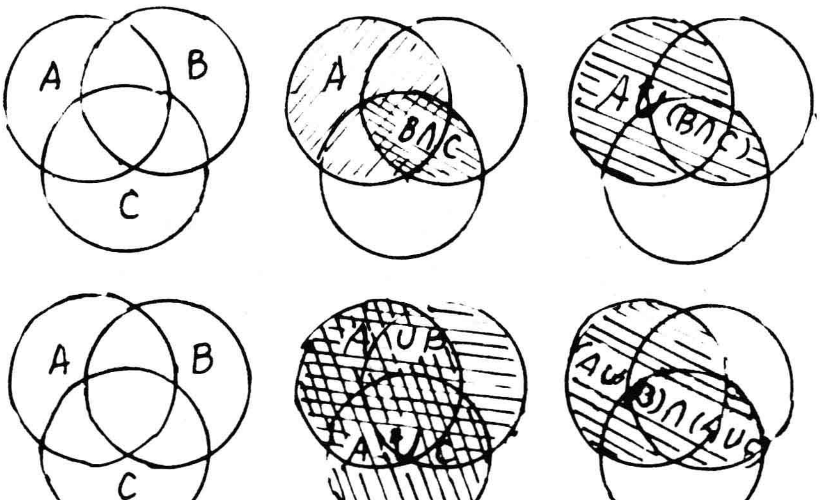

图 2

5　写出 $A=\{1,2,3,4\}$的所有子集。

解　A 的子集共有 16 个，即$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$

注：用列举法表示集合时，与集合中元素列举先后次序无关，如$\{1,2,3\}$，$\{3,2,1\}$，$\{1,3,2\}$等都视为同一集合。

6　若集合 A 有 n 个元素，则 A 共有多少个不同的子集。

解：由于集合 A 含有 i 个元素的子集共有 $C_n^i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 个，所以 A 共有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$ 个不同的子集。

7　Z 为整数集，$A=\{2n|n\in Z\}$，则 $Z-A=?$

解：设 $B=\{2n+1|n\in Z\}$，则 $A\cup B=Z$，

故
$$Z-A=B=\{2n+1|n\in Z\}$$

8　设 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{1,2,4,8\}$，写出 $A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$，$A\cap(B\cup C)$.

解　$A\cap B=\{1,3\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$

$A-B=\{5,7\}$

$A\cap(B\cup C)=\{1,3\}$，

注：用列举法来表示集合时，注意集合中不能有重复的元素出现，例如在上题中，$A\cup B$ 不能写为 $A\cup B=\{1,2,3,3,4,5,7\}$.

§2　映射

习题(二)

1　举出二个日常生活中见到的映射例子。

解　(i)从郑州开往广州的火车，在郑州上车的所有人组成的

集合为 A，沿途所有的车站组成的集合为 B。对 A 中的每一人，根据他的火车票，都在 B 中确定一个车站下车，这样就建立了从 A 到 B 的一个映射。

(ii)所有中国人组成的集合为 A，十二生肖属象组成的集合为 B，对 A 中每一个中国人，根据他出生的年份，就能在 B 中唯一确定一个属象。这样就建立了从 A 到 B 的一个映射。

2　分别举出单射，满射，一一对应的例子。

解　设 $A=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$

$B=\{1,2,3,\cdots n,\cdots\}$

(i)单射：我们规定 A 到 B 中的元素按下规则对应：即 $f_1:2n\mapsto 2n$（n 为正整数）。这样 f_1 把 A 中每个偶数 $2n$ 都映成 B 中的偶数 $2n$，显然规则 f_1 是 A 到 B 的一个映射。由于 f_1 把 A 中两个不同的元素映为 B 中两个不同元素，所以 f_1 是单射。

(ii)满射：我们规定 A 到 B 中元素按下规则对应，即 f_2：

$$\begin{cases} 4n\mapsto n, & n \text{ 为正整数} \\ 2n\mapsto 2n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

这样 f_2 把 A 中每个被 4 整除的偶数 $k=4n$，映成 B 中的 $n\left(=\dfrac{k}{4}\right)$ 而把 A 中不能被 4 整除的偶数 $2n$（n 为奇数），都映成 B 中的 $2n$（n 为奇数），显然，规则 f_2 是 A 到 B 的一个映射，由于 B 中的每一个元素，按上述规则 f_2，都至少有 A 中的一个元素与之对应，所以 f_2 是满射。

(iii)一一对应：我们规定 A 到 B 中元素按下规则对应，即 f_3：$2n\mapsto n$（n 为正整数），这样，f_2 把 A 中每个偶数 $2n$，映成 B 中的元素 n，显然规则 f_3 是从 A 到 B 的一个映射，不难看出它是单射又是满射，所以 f_3 是一一对应（映射）。

注：从上看出：对给定的两个集合，可能建立从 A 到 B 的各种类型的映射。

3　某单位职工姓名构成的集合为 A，在作数据处理，特别是

借助于计算机进行管理时，往往对性别作数字化处理。建 A 到数集 $B=\{0,1\}$ 的映射，A 中男性职工对应 0，女性职工对应 1，问此映射为单射否？满射否？一一对应否？

解　该映射不是单射，是满射，不是一一对应。

其理由如下：

(i)不是单射，这是因为 A 中两个不同的男职工都对应 B 中的同一元素 0，所以不是单射。

(ii)是满射，这是因为 B 中的任一元素(0 或 1)，按照对应规则，在 A 中都至少有一个元素与之对应(如对于 B 中的 0，A 中有男职工与之对应；对于 B 中的 1，A 中有女职工与之对应)，所以是满射。

(iii)不是一一对应：一一对应要求对应规则 f 既是单射又是满射，由于该题映射不是单射，所以不是一一对应。

4　整数集 Z 能否与偶数集 $A=\{2n\mid n\in Z\}$ 建立一一对应？如果能，请找出一种对应关系。

解　能建立 Z 到 A 的一一对应，我们规定 Z 到 A 中元素按下规则对应，即

$$f: n\mapsto 2n\ (n\text{ 为任意整数})$$

这表明 f 把 Z 中每个元素 n(任意整数)，映成 B 中的元素 $2n$。显然 f 是从 Z 到 A 的一个映射，它既是单射又是满射，所以它是一一对应关系。

§3　函数

习题(三)

1　下列函数是否表示同一函数？

(1) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

(2) $y=\frac{1}{2}gx^2$ 与 $s=\frac{1}{2}gt^2$(g 为常数)

(3) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$

(4) $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$

解　判别两个函数表示同一函数(即两个函数相等)的方法是:它们的定义域相同,对应规则一样。

(1)由于函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$的定义域 $D_1=\{x|-\infty<x<1\}\cup\{x|1<x<+\infty\}$与函数 $y=x+1$ 的定义域 $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$不同,所以它们不是同一个函数。

(2)$y=\frac{1}{2}gx^2$ 与 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 只是它的自变量和因变量的记号不一样,但是它们的定义域和对应规律都是一样的。所以它们表示同一个函数。

(3)因 $y=x$ 的定义域 $D_1=\{x|-\infty<x<+\infty\}$,而 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域 $D_2=\{x|0\leqslant x<+\infty\}$,它们的定义域不同,所以它们不是同一个函数。

(4)显然函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$的定义域及对应规律都一样,所以它们表示同一个函数。

2　求下列函数的定义域:

(1)$y=\ln(\sin x)$　　　　(2)$y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(3)$y=\arcsin\left(x+\frac{1}{2}\right)$　　　　(4)$y=\frac{x}{\sin x}$

解　(1)显然当 $\sin x>0$ 时,$\ln\sin x$ 才有意义,由于 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$时,$\sin x>0$,故函数的定义域 $D=\{x|2k\pi<x<(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

(2)由于当$\frac{1+x}{1-x}\geqslant0$,且 $1-x\neq0$ 时,$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$才有意义,因此

$$\begin{cases}1+x\geqslant 0\\1-x>0\end{cases}\qquad\begin{cases}1+x\leqslant 0\\1-x<0\end{cases}$$

显然没有 x 满足上面第二个(右边)不等式组,故函数的定义域 $D=\{x\mid -1\leqslant x<1\}$.

(3)当 $-1\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1$ 时,$\arcsin\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 才有意义,所以函数定义域 $D=\{x\mid -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}$.

(4)当 $\sin x\neq 0$ 时,$\frac{x}{\sin x}$ 才有意义。所以函数的定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$.

3 讨论下列函数奇偶性

(1)$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(2)$f(x)=\frac{x^3}{2+\cos x}$

(3)$f(x)=\cos x-\sin x$

解 (1)显然函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$,对任 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数。

(2)函数 $f(x)=\frac{x^3}{2+\cos x}$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$,对任 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{2+\cos(-x)}=-\frac{x^3}{2+\cos x}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数。