

●河南省高等教育自学考试教材

高等数学(一) 辅导书

主编:鲁丽萍
吕延华

中国商业出版社

高等数学(一)辅导书

主编:鲁丽萍

吕延华

中国商业出版社

(京)新登字 073 号

高等数学(一)辅导书

主 编:鲁丽萍

吕延华

责任编辑:丁忆竹

责任校对:吕延华

中国商业出版社出版发行

(100053 北京广安门内报国寺 1 号)

河南省招生考试服务中心总发行

(河南省郑州市农业路 11 号)

郑州市南五里堡印刷厂印刷

1994 年 3 月第一版 1995 年 7 月第 2 次印刷

850×1168 毫米 32 开 11.25 印张 280 千字

印数 5001—10000 册

ISBN7 — 5044 — 2593 — 1/G · 237

定价:11.60 元

(如有印装质量问题可更换)

前 言

教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设。为了满足个人自学、社会助学和国家考试的需要,我们组织了有关高校的部分教师,根据专业考试计划,按照全国高等教育自学考试指导委员会颁布的考试大纲要求,并结合自学考试的特点编写了这本《高等数学(一)》辅导书。它是我省高等教育自学考试财经类专业高等数学(一)课程的学习辅导用书。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试。由于本书的编印比较仓促,不当之处在所难免,肯请社会各界的有关专家、学者和广大自学者批评指正。

河南省高等教育自学考试委员会办公室

1994年3月

目 录

第一章 函数及其图形	(1)
§1 集合	(1)
习题(一)	(1)
§2 映射	(4)
习题(二)	(4)
§3 函数	(6)
习题(三)	(6)
§4 经济学中的常用函数	(11)
习题(四)	(11)
总复习题一	(12)
第二章 极限与连续	(17)
§1 数列的极限	(17)
习题(一)	(17)
§2 函数的极限	(22)
习题(二)	(22)
§3 连续函数	(27)
习题(三)	(27)
§4 无穷大量与无穷小量	(31)
习题(四)	(31)
总复习题二	(35)
第三章 导数与微分	(46)
§1 导数概念	(46)
习题(一)	(46)

§ 2 求导法则及导数基本公式·····	(50)
习题(二)·····	(50)
§ 3 高阶导数·····	(61)
习题(三)·····	(61)
§ 4 微分·····	(63)
习题(四)·····	(63)
§ 5 导数在经济分析中的应用·····	(68)
习题(五)·····	(68)
总复习题三·····	(71)
第四章 中值定理及其导数的应用 ·····	(85)
§ 1 中值定理·····	(85)
习题(一)·····	(85)
§ 2 洛必达法则·····	(89)
习题(二)·····	(89)
§ 3 函数的单调性和极值·····	(96)
习题(三)·····	(96)
§ 4 曲线的凸凹性和拐点·····	(106)
习题(四)·····	(106)
§ 5 函数的作图法·····	(110)
习题(五)·····	(110)
§ 6 极值在经济中的应用·····	(116)
习题(六)·····	(116)
总复习题四·····	(118)
第五章 不定积分 ·····	(132)
§ 1 原函数与不定积分·····	(132)
习题(一)·····	(132)

§ 2 基本积分公式和不定积分的性质	(134)
习题(二).....	(134)
§ 3 不定积分的换元积分法	(136)
习题(三).....	(136)
§ 4 分部积分法	(144)
习题(四).....	(144)
§ 5 不定积分在经济中的应用	(147)
习题(五).....	(147)
总复习题五.....	(148)
第六章 定积分	(160)
§ 1 定积分的概念	(160)
习题(一).....	(160)
§ 2 定积分的性质	(161)
习题(二).....	(161)
§ 3 微积分基本定理	(163)
习题(三).....	(163)
§ 4 定积分的换元积分法	(168)
习题(四).....	(168)
§ 5 定积分的分部积分法	(173)
习题(五).....	(173)
§ 6 定积分的应用	(176)
习题(六).....	(176)
§ 7 广义积分	(182)
习题(七).....	(182)
总复习题六.....	(185)
第七章 无穷级数	(194)

§ 1 数项级数的概念和性质	(194)
习题(一).....	(194)
§ 2 正项级数收敛性的判别法	(198)
习题(二).....	(198)
§ 3 任意项级数收敛性的判别法	(203)
习题(三).....	(203)
§ 4 幂级数	(205)
习题(四).....	(205)
§ 5 泰勒公式与泰勒级数	(211)
习题(五).....	(211)
总复习题七.....	(217)
第八章 多元函数的微分学	(229)
§ 1 多元函数概念	(229)
习题(一).....	(229)
§ 2 二元函数的极限与连续	(233)
习题(二).....	(233)
§ 3 偏导数	(236)
习题(三).....	(236)
§ 4 全微分	(242)
习题(四).....	(242)
§ 5 复合函数求偏导数法则	(247)
习题(五).....	(247)
§ 6 隐函数的求导法则	(251)
习题六.....	(251)
§ 7 多元函数的极值	(255)
习题(七).....	(255)

总复习题八	(259)
第九章 重积分	(274)
§ 1 二重积分概念及性质	(274)
习题(一)	(274)
§ 2 二重积分的计算	(275)
习题(二)	(275)
§ 3 三重积分	(283)
习题(三)	(283)
§ 4 重积分的应用	(286)
习题(四)	(286)
总复习题九	(289)
第十章 常微分方程	(300)
§ 1 微分方程的基本概念	(300)
习题一	(300)
§ 2 一阶常微分方程	(303)
习题(二)	(303)
§ 3 可降阶的高阶微分方程	(311)
习题(三)	(311)
§ 4 二阶常系数线性微分方程	(317)
习题(四)	(317)
§ 5 微分方程在经济等方面的应用	(326)
习题(五)	(326)
总复习题十	(328)

第一章 函数及其图形

§ 1 集合

习题(一)

1 证明交对并运算的分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证:先证 $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

事实上,任取 $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B$, 或 $x \in A$ 且 $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1)$$

再证 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

事实上,任取 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B$, 或 $x \in A$ 且 $x \in C \Rightarrow x \in A$, 且 $x \in B$ 或 $x \in C \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (2)$$

由(1)与(2)式知: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

注:我们证明集合 A 与 B 相等的一般方法是:只需证 $A \subset B$ 且 $B \subset A \Rightarrow A = B$.

2 证明摩根律性质 4 (i)

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

证:先证 $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$.

事实上,任取

$$x \in (A \cap B)' \xrightarrow{\text{补集定义}} x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$$

$$\text{或 } x \notin B \xrightarrow{\text{补集定义}} x \in A' \text{ 或 } x \in B' \Rightarrow x \in A' \cup B',$$

$$\text{所以 } (A \cap B)' \subset A' \cup B' \quad (3)$$

$$\text{再证 } A' \cup B' \subset (A \cap B)'$$

$$\text{事实上,任取 } x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in A' \text{ 或 } x \in B' \Rightarrow x \notin A \text{ 或 } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)'$$

$$\text{所以 } A' \cup B' \subset (A \cap B)' \quad (4)$$

由(3)与(4)式知, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

3 证明性质 6,即证明对任意两个集合 A, B , 有 $A - B = A - A \cap B$.

证 先证 $A - B \subset A - A \cap B$

$$\text{事实上,任取 } x \in A - B \Rightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A - A \cap B, \text{ 所以}$$

$$A - B \subset A - A \cap B \quad (5)$$

$$\text{再证 } A - A \cap B \subset A - B$$

$$\text{事实上,任取 } x \in A - A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin B \text{ (因 } x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin B) \Rightarrow x \in A - B.$$

$$\text{所以 } A - A \cap B \subset A - B \quad (6)$$

由(5)或(6)式知: $A - B = A - A \cap B$.

4 画出分配律的文氏图。

$$(i) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(ii) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

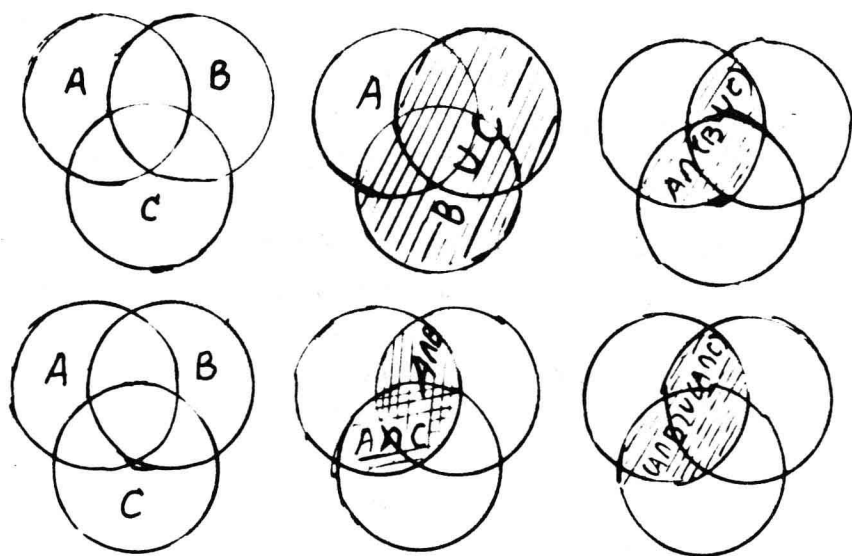


图 1

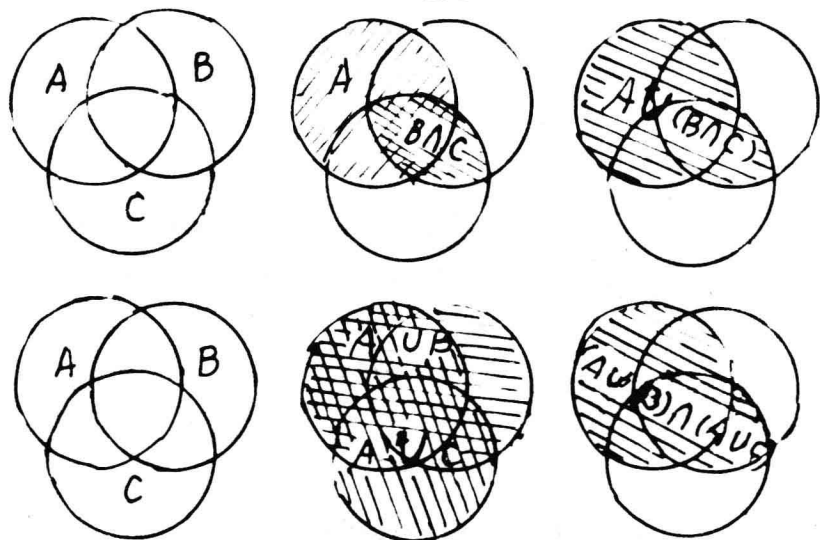


图 2

5 写出 $A=\{1,2,3,4\}$ 的所有子集。

解 A 的子集共有 16 个, 即 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$

注: 用列举法表示集合时, 与集合中元素列举先后次序无关, 如 $\{1,2,3\}, \{3,2,1\}, \{1,3,2\}$ 等都视为同一集合。

6 若集合 A 有 n 个元素, 则 A 共有多少个不同的子集。

解: 由于集合 A 含有 i 个元素的子集共有 $C_n^i (i=0,1,2,\dots,n)$ 个, 所以 A 共有 $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$ 个不同的子集。

7 Z 为整数集, $A=\{2n|n\in Z\}$, 则 $Z-A=?$

解: 设 $B=\{2n+1|n\in Z\}$, 则 $A\cup B=Z$,

故 $Z-A=B=\{2n+1|n\in Z\}$

8 设 $A=\{1,3,5,7\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{1,2,4,8\}$, 写出 $A\cap B, A\cup B, A-B, A\cap(B\cup C)$ 。

解 $A\cap B=\{1,3\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$

$A-B=\{5,7\}$

$A\cap(B\cup C)=\{1,3\}$,

注: 用列举法来表示集合时, 注意集合中不能有重复的元素出现, 例如在上题中, $A\cup B$ 不能写为 $A\cup B=\{1,2,3,3,4,5,7\}$ 。

§ 2 映射

习题(二)

1 举出二个日常生活中见到的映射例子。

解 (i) 从郑州开往广州的火车, 在郑州上车的所有人组成的

集合为 A , 沿途所有的车站组成的集合为 B 。对 A 中的每一人, 根据他的火车票, 都在 B 中确定一个车站下车, 这样就建立了从 A 到 B 的一个映射。

(ii) 所有中国人组成的集合为 A , 十二生肖属象组成的集合为 B , 对 A 中每一个中国人, 根据他出生的年份, 就能在 B 中唯一确定一个属象。这样就建立了从 A 到 B 的一个映射。

2 分别举出单射, 满射, 一一对应的例子。

解 设 $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

(i) 单射: 我们规定 A 到 B 中的元素按下规则对应: 即 $f_1: 2n \mapsto n$ (n 为正整数)。这样 f_1 把 A 中每个偶数 $2n$ 都映成 B 中的偶数 n , 显然规则 f_1 是 A 到 B 的一个映射。由于 f_1 把 A 中两个不同的元素映为 B 中两个不同元素, 所以 f_1 是单射。

(ii) 满射: 我们规定 A 到 B 中元素按下规则对应, 即 $f_2: 4n \mapsto n, n$ 为正整数 这样 f_2 把 A 中每个被 4 整除的偶数 $k = 4n$, $2n \mapsto 2n, n$ 为奇数 映成 B 中的 $n \left(= \frac{k}{4} \right)$ 而把 A 中不能被 4 整除的偶数 $2n$ (n 为奇数), 都映成 B 中的 $2n$ (n 为奇数), 显然, 规则 f_2 是 A 到 B 的一个映射, 由于 B 中的每一个元素, 按上述规则 f_2 , 都至少有 A 中的一个元素与之对应, 所以 f_2 是满射。

(iii) 一一对应: 我们规定 A 到 B 中元素按下规则对应, 即 $f_3: 2n \mapsto n$ (n 为正整数), 这样, f_3 把 A 中每个偶数 $2n$, 映成 B 中的元素 n , 显然规则 f_3 是从 A 到 B 的一个映射, 不难看出它是单射又是满射, 所以 f_3 是一一对应(映射)。

注: 从上看出: 对给定的两个集合, 可能建立从 A 到 B 的各种类型的映射。

3 某单位职工姓名构成的集合为 A , 在作数据处理, 特别是

借助于计算机进行管理时,往往对性别作数字化处理。建 A 到数集 $B = \{0, 1\}$ 的映射, A 中男性职工对应 0, 女性职工对应 1, 问此映射为单射否? 满射否? 一一对应否?

解 该映射不是单射, 是满射, 不是一一对应。

其理由如下:

(i) 不是单射, 这是因为 A 中两个不同的男职工都对应 B 中的同一元素 0, 所以不是单射。

(ii) 是满射, 这是因为 B 中的任一元素(0 或 1), 按照对应规则, 在 A 中都至少有一个元素与之对应(如对于 B 中的 0, A 中有男职工与之对应; 对于 B 中的 1, A 中有女职工与之对应), 所以是满射。

(iii) 不是一一对应: 一一对应要求对应规则 f 既是单射又是满射, 由于该题映射不是单射, 所以不是一一对应。

4 整数集 Z 能否与偶数集 $A = \{2n | n \in Z\}$ 建立一一对应? 如果能, 请找出一种对应关系。

解 能建立 Z 到 A 的一一对应, 我们规定 Z 到 A 中元素按下规则对应, 即

$$f: n \mapsto 2n \quad (n \text{ 为任意整数})$$

这表明 f 把 Z 中每个元素 n (任意整数), 映成 B 中的元素 $2n$ 。显然 f 是从 Z 到 A 的一个映射, 它既是单射又是满射, 所以它是一一对应关系。

§ 3 函数

习题(三)

1 下列函数是否表示同一函数?

$$(1) y = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ 与 } y = x+1$$

$$(2) y = \frac{1}{2}gx^2 \text{ 与 } s = \frac{1}{2}gt^2 (g \text{ 为常数})$$

$$(3) y = x \text{ 与 } y = (\sqrt{x})^2$$

$$(4) y = |x| \text{ 与 } y = \sqrt{x^2}$$

解 判别两个函数表示同一函数(即两个函数相等)的方法是:它们的定义域相同,对应规则一样。

(1) 由于函数 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域 $D_1 = \{x | -\infty < x < 1\} \cup \{x | 1 < x < +\infty\}$ 与函数 $y = x+1$ 的定义域 $D = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ 不同,所以它们不是同一个函数。

(2) $y = \frac{1}{2}gx^2$ 与 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 只是它的自变量和因变量的记号不一样,但是它们的定义域和对应规律都是一样的。所以它们表示同一个函数。

(3) 因 $y = x$ 的定义域 $D_1 = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, 而 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域 $D_2 = \{x | 0 \leq x < +\infty\}$, 它们的定义域不同,所以它们不是同一个函数。

(4) 显然函数 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域及对应规律都一样,所以它们表示同一个函数。

2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \ln(\sin x) \quad (2) y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(3) y = \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad (4) y = \frac{x}{\sin x}$$

解 (1) 显然当 $\sin x > 0$ 时, $\ln \sin x$ 才有意义, 由于 $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ 时, $\sin x > 0$, 故函数的定义域 $D = \{x | 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 。

(2) 由于当 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, 且 $1-x \neq 0$ 时, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 才有意义, 因此

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x \leq 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$$

显然没有 x 满足上面第二个(右边)不等式组,故函数的定义域 $D = \{x | -1 \leq x < 1\}$.

(3) 当 $-1 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1$ 时, $\arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 才有意义,所以函数定义域 $D = \{x | -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$.

(4) 当 $\sin x \neq 0$ 时, $\frac{x}{\sin x}$ 才有意义。所以函数的定义域 $D = \{x | x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

3 讨论下列函数奇偶性

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(2) $f(x) = \frac{x^3}{2 + \cos x}$

(3) $f(x) = \cos x - \sin x$

解 (1) 显然函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的定义域为 $-\infty < x < +\infty$, 对任 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数。

(2) 函数 $f(x) = \frac{x^3}{2 + \cos x}$ 的定义域为 $-\infty < x < +\infty$, 对任 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2 + \cos(-x)} = -\frac{x^3}{2 + \cos x} = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数。