21世纪高校教材

矩阵分析

Matrix Analysis

蒋家尚 袁永新 陈静 编著

苏州大学出版社

矩阵分析

蒋家尚　袁永新　陈　静　编著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析／蒋家尚，袁永新，陈静编著．—苏州：苏州大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5672-0079-1

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①蒋… ②袁… ③陈… Ⅲ.①矩阵分析-研究生-教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第134116号

矩阵分析
蒋家尚 袁永新 陈 静 编著
责任编辑 肖 荣

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街1号 邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路58号 邮编：214217)

开本 787×960 1/16 印张 11.5 字数 207千
2012年6月第1版 2012年6月第1次印刷
ISBN 978-7-5672-0079-1 定价：24.00元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话：0512—65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言

矩阵理论是学习经典数学的基础，同时又具有很强的实用价值. 近年来，矩阵理论的重要性愈加显著，应用日益广泛. 矩阵理论作为基本的数学工具，在数学和其他学科，包括理科、管理学乃至经济学科都有广泛的应用，所以学习并掌握矩阵的基本理论和方法对研究生来说十分重要. 从 20 世纪 80 年代起，此课程就已经成为研究生的基本理论课.

编者从事矩阵理论教学与研究工作多年，并在大学本科高年级学生中多次开设相关的选修课. 本书是在使用了多年的讲义并参考了国内外的有关教材的基础上编写而成. 作者认为，一本合适的研究生教材应当有一定的理论深度，又应具有深入浅出、简单易懂、便于自学的特色. 为此本书与同类教材相比，在内容取舍及体系安排上均有所变动. 本书需要 48 学时左右，各专业可根据需要灵活使用.

本书由蒋家尚策划，由蒋家尚(第 3 章，第 5 章，第 6 章)、袁永新(第 4 章，第 7 章，第 8 章)、陈静(第 1 章，第 2 章)编写，最后由蒋家尚统稿.

本书的编写和出版得到了江苏科技大学研究生部、教务处和数理学院领导的关心与支持，在此表示衷心的感谢，同时还要感谢为本书出版做了大量工作的苏州大学出版社.

由于水平有限，书中疏漏与错误在所难免，敬请广大读者指正.

编著者

2012 年 5 月

本书部分常用符号

V_n:数域 $\mathbf{P}$ 上的 n 维线性空间

$\mathbf{P}^n$:以数域 $\mathbf{P}$ 中的数为分量的 n 维列向量的集合

$\mathbf{P}^{m\times n}$:以数域 $\mathbf{P}$ 中的数为元素的 $m\times n$ 阶矩阵集合

$\mathbf{P}[x]_n$:次数不超过 $n-1$ 次的实系数多项式集合

$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$:由线性空间中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 生成的子空间

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$\dim(V)$:线性空间 V 的维数

$\mathbf{C}^{m\times n}$:所有 $m\times n$ 复矩阵的全体构成的集合

$\mathbf{C}^n$:所有 n 维复向量的全体构成的集合

$\mathbf{R}^n$:所有 n 维实向量的全体构成的集合

$\bar{\alpha}$:复数 α 的共轭转置复数

$\rho(\boldsymbol{A})$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$:复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵

$R(\boldsymbol{A})$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域空间

$N(\boldsymbol{A})$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间

$V_1\oplus V_2$:子空间 V_1 与 V_2 的直和

$V^{\perp}$:子空间 V 的正交补空间

$\boldsymbol{P}_{L,M}$:沿子空间 $\boldsymbol{M}$ 到子空间 $\boldsymbol{L}$ 上的投影算子

$\boldsymbol{P}_L$:沿子空间 $\boldsymbol{L}^{\perp}$ 到子空间 $\boldsymbol{L}$ 上的投影算子

$\boldsymbol{A}^{+}$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆矩阵

$\boldsymbol{A}^{(i,j,\cdots,l)}$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,\cdots,l\}$-逆矩阵

$\boldsymbol{A}\{i,j,\cdots,l\}$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,\cdots,l\}$-递矩阵的集合

$\|\boldsymbol{A}\|$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种范数

$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数

$\boldsymbol{e}_j$:单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 列

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵

目录

第1章

线性空间

矩阵是处理有限维空间形式和数量关系的重要工具，线性空间是其中的基本研究对象. 在这一章中，我们将线性代数中介绍过的向量空间的概念进行推广，建立一般的线性空间的概念，介绍其中的基本理论及其方法.

§1.1 数 域

数是数学的一个最基本的概念，按照所研究的问题，我们常常需要明确规定所考虑的数的范围. 比如，在解决一个实际问题中列出了一个二次方程，这个方程有没有解就与未知量所代表的对象有关，也就是与未知量所允许的取值范围有关. 因此，在数的不同范围内同一个问题的回答可能是不同的. 我们经常会遇到的数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数，它们显然具有一些不同的性质. 当然，它们也有很多共同的性质，在代数中经常是将有共同性质的对象统一进行讨论. 关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的代数性质. 代数所研究的问题主要涉及数的代数性质，这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的. 有时我们还会碰到一些其他的数的范围，为了方便起见，当我们把这些数当做整体来考虑的时候，常称它为一个数的集合，简称数集. 有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质. 为了在讨论中能够把它们统一起来，我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 $\mathbf{P}$ 是由一些复数组成的集合，其中包含 0 和 1，若 $\mathbf{P}$ 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 $\mathbf{P}$ 中的数，那么，$\mathbf{P}$ 就称为一个数域.

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合以及全体复数组成的集合都是数域. 这三个数域我们分别用字母 $\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$,$\mathbf{C}$ 来代表. 全体整数组成的集合 $\mathbf{Z}$ 就

不是数域,因为不是任意两个整数的商都是整数.

如果数的集合 **P** 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 **P** 中,我们就说数集 **P** 对这个运算是封闭的. 因此,数域的定义也可以说成,如果一个包含 0,1 在内的数集 **P** 对于加法、减法、乘法与除法(除数不为 0)是封闭的,那么 **P** 就称为一个数域.

下面来举一些例子.

例 1.1.1 所有具有形式 $a+b\sqrt{2}$的数(其中 a,b 是任何有理数)构成一个数域. 通常用 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$来表示这个数域. 显然,数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$包含 0 与 1 并且它对于加法、减法是封闭的. 现在证明它对乘法、除法也是封闭的.

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

因为 a,b,c,d 都是有理数,所以 $ac+2bd,ad+bc$ 也是有理数. 这就说明$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})$还在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$内,所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对乘法封闭.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$,于是 $a-b\sqrt{2}$也不为零,而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}.$$

因为 a,b,c,d 是有理数,所以$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2},\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$也是有理数. 这就证明了 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对于除法的封闭性.

例 1.1.2 所有奇数组成的数集,它对于乘法是封闭的,但对于加法、减法不是封闭的. $\sqrt{2}$的整倍数的全体组成一个数集,它对于加法、减法是封闭的,但对于乘法、除法不封闭. 当然,以上这两个数集都不是数域.

下面,我们指出数域的一个重要性质.

定理 1.1.1 有理数域 **Q** 是最小的数域.

证明 假设有一个数域 **P** 比 **Q** 小,因为 $0,1\in \mathbf{P}$,且 **P** 对加、减法封闭,因此$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{P}$;

又因为 **P** 对除法封闭,所以所有的有理数 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{P}$.

所以 **Q** 为最小数域.

§1.2 线性空间及其基本性质

我们从线性代数中了解的向量空间 $\mathbf{R}^n$,从数字的角度看,它涉及一个集合和一个数域,并定义了集合中元素的加法运算和数域中数与集合中元素的数乘运算,

由此出发我们来推广建立线性空间的概念.

定义 1.2.1 设 V 是一个以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 为元素的非空集合，$\mathbf{F}$ 是一个数域. 在其中定义两种运算，一种为加法：$\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$；另一种为数乘：$\forall k\in \mathbf{F},\boldsymbol{\alpha}\in V$，$k\boldsymbol{\alpha}\in V$. 且满足以下八条运算法则：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) V 中存在零元素：$\boldsymbol{\alpha}_0\in V,\forall \boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}$，记 $\boldsymbol{\alpha}_0=\mathbf{0}$；

(4) 负元素存在：$\forall \boldsymbol{\alpha}\in V,\exists \boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，记 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$；

(5) 数乘结合律：$(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；

(6) 存在 $1\in \mathbf{F},1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(7) 分配律：$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(8) 分配律：$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

则称 V 为数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. V 中元素称为向量. 当 $\mathbf{F}$ 为实(复)数域时，称 V 是实(复)线性空间.

在线性代数中，我们将有序数组称为向量，并对它定义了加法和数乘运算，容易验证这些运算满足上述八条运算法则. 把对于运算封闭的有序数组的集合称为向量空间. 显然，这只是现在定义的特殊情形，比较起来，现在的定义有了很大的推广：

1. 向量不一定是有序数组；

2. 线性空间中的运算只要求满足上述八条运算法则，当然也就不一定是有序数组的加法及数乘运算.

下面举一些例子.

例 1.2.1 次数不超过 n 的多项式的全体，记作 $\mathbf{P}[x]_n$，即

$$\mathbf{P}[x]_n=\{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{R}\},$$

对于通常的多项式加法、数乘多项式的乘法构成线性空间. 这是因为：通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算显然满足线性运算规律，故只要验证 $\mathbf{P}[x]_n$ 对运算封闭：

$$(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in\mathbf{P}[x]_n,$$
$$\lambda(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in\mathbf{P}[x]_n,$$

所以 $\mathbf{P}[x]_n$ 是一个线性空间.

例 1.2.2 对于给定的数域 $\mathbf{F}$，集合 $\mathbf{F}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{F}\}$，对通常的向量的加法和数乘运算封闭，$\mathbf{F}^n$ 为数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. 当 $\mathbf{F}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 和复数

域 $\mathbf{C}$ 时，$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 是它的两种具体形式.

例 1.2.3 $V=\mathbf{F}^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{F}\}$，它在矩阵的加法与数乘运算下构成数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，称为矩阵空间. 其中 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 为由一切 $m\times n$ 实矩阵构成的实矩阵空间.

例 1.2.4 n 次多项式的全体

$$\mathbf{Q}[x]_n=\{f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{R},\text{且 } a_n\neq 0\},$$

对于通常的多项式加法和数乘运算不构成向量空间. 这是因为

$$0\cdot f(x)=0x^n+\cdots+0x+0\notin\mathbf{Q}[x]_n,$$

即 $\mathbf{Q}[x]_n$ 对运算不封闭.

由例 1.2.4 可见，检验一个集合是否构成向量空间，当然不能只检验对运算的封闭性. 若所定义的加法和数乘运算不是通常的实数间的运算，则应仔细检验是否满足八条线性运算法则.

例 1.2.5 n 个有序实数组成的数组的全体

$$S^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\},$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的乘法

$$\lambda\circ(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

不构成线性空间.

可以验证 S^n 对运算封闭，但因 $1\circ\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不满足运算规律，即所定义的运算不是线性运算，所以 S^n 不是线性空间.

比较 S^n 与 $\mathbf{R}^n$，作为集合它们是一样的，但由于在其中所定义的运算不同，以致 $\mathbf{R}^n$ 构成线性空间而 S^n 不是线性空间. 由此可见，线性空间的概念是集合与运算二者的结合. 一般来说，同一个集合，若定义两种不同的线性运算，就构成不同的线性空间；若定义的运算不是线性运算，就不能构成线性空间. 所以，所定义的线性运算是线性空间的本质.

为了对线性运算的理解更具一般性，请看下面的例子.

例 1.2.6 正实数的全体记作 $\mathbf{R}_+$，在其中定义加法及数乘运算为

$$a\oplus b=ab\,(a,b\in\mathbf{R}_+),$$
$$\lambda\circ a=a^\lambda\,(\lambda\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}_+),$$

验证 $\mathbf{R}_+$ 对上述加法与数乘运算构成线性空间.

证明 实际上要验证十条：

(1) 对加法封闭：对任意的 $a,b\in\mathbf{R}_+$，有 $a\oplus b=ab\in\mathbf{R}_+$；

(2) 对数乘封闭：对任意的 $\lambda\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}_+$，有 $\lambda a=a^\lambda\in\mathbf{R}_+$；

(3) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$；

(4) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(b\oplus c)$;

(5) $\mathbf{R}_+$ 中存在零元素 1,对任何 $a\in\mathbf{R}_+$,有 $a\oplus 1=a\cdot 1=a$;

(6) 对任何 $a\in\mathbf{R}_+$,有负元素 $a^{-1}\in\mathbf{R}_+$,使 $a\oplus a^{-1}=aa^{-1}=1$;

(7) $1\circ a=a^1=a$;

(8) $\lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^{\mu}=(a^{\mu})^{\lambda}=a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ a$;

(9) $(\lambda+\mu)\circ a=a^{\lambda+\mu}=a^{\lambda}a^{\mu}=a^{\lambda}\oplus a^{\mu}=\lambda\circ a\oplus\mu\circ a$;

(10) $\lambda\circ(a\oplus b)=\lambda\circ(ab)=(ab)^{\lambda}=a^{\lambda}b^{\lambda}=a^{\lambda}\oplus b^{\lambda}=\lambda\circ a\oplus\lambda\circ b$.

因此,$\mathbf{R}_+$ 对于所定义的运算构成线性空间.

下面讨论线性空间的性质.

1. 零元素是唯一的.

证明 设 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素,即对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}_1=\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}_2=\boldsymbol{\alpha}$,于是有

$$\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2,\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1,$$

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2.$$

2. 任一元素的负元素是唯一的,$\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两个负元素 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$,即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}.$$

3. $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,所以 $0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=[1+(-1)]\boldsymbol{\alpha}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,所以 $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.

$$\lambda\mathbf{0}=\lambda[\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}]=\lambda\boldsymbol{\alpha}+(-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

4. 如果 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证明 若 $\lambda\neq 0$,则在 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 两边同乘 $\dfrac{1}{\lambda}$,得

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{\lambda}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

而
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},$$

所以
$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

§1.3 向量的线性相关性

在线性代数中，我们用线性运算来讨论 n 维数组向量之间的关系，介绍了一些重要概念，如线性组合、线性相关与线性无关等. 这些概念以及有关的性质只涉及线性运算，因此，对于一般的线性空间中的元素仍然适用.

定义 1.3.1 设 V 是数域 $\mathbf{F}$ 上的一个线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geqslant 1)$ 是 V 中的一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是数域 $\mathbf{F}$ 中的数，那么向量

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个线性组合. 有时，我们也说向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

定义 1.3.2 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r; \tag{1.3.1}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s \tag{1.3.2}$$

是 V 中的两个向量组. 如果(1.3.1)中每个向量都可以用向量组(1.3.2)线性表出，那么称向量组(1.3.1)可以用向量组(1.3.2)线性表出. 如果(1.3.1)与(1.3.2)可以互相线性表出，那么向量组(1.3.1)与(1.3.2)称为等价的.

定义 1.3.3 设线性空间 V 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geqslant 1)$，若在数域 $\mathbf{F}$ 中有 r 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}, \tag{1.3.3}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 不线性相关，就称为线性无关. 也就是说，若等式(1.3.3)只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才成立，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

以上定义是大家过去已经在线性代数中学习过的，不仅如此，在线性代数中，从这些定义出发对 n 元数组所作的那些论证也完全可以推广至数域 $\mathbf{F}$ 上的抽象的线性空间中来，并得到相同结论. 我们不再重复这些论证，只是将几个常用的结论叙述如下：

1. 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 两个以上向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充分必要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合.

2. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而且可以被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，那么 $r\leqslant s$. 由此推出，两个等价的线性无关的向量组，必定含有相同个数的向量.

3. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，但向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，而且表法唯一.

例 1.3.1 证明:在实函数空间中,$1,\cos^2 t,\cos 2t$ 是线性相关的.

证明 因为 $\cos 2t=2\cos^2 t-1$,即 $\cos 2t$ 可由 $\cos^2 t$ 与 1 线性表出,

所以 $1,\cos^2 t,\cos 2t$ 是线性相关的.

例 1.3.2 如果 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$是线性空间 $\mathbf{P}[x]$中三个互素的多项式,但其中任意两个都不互素,那么它们线性无关.

证明 若有不全为零的数 k_1,k_2,k_3,使

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=0.$$

不妨设 $k_1\neq 0$,则

$$f_1(x)=-\frac{k_2}{k_1}f_2(x)-\frac{k_3}{k_1}f_3(x).$$

上式说明 $f_2(x),f_3(x)$的公因式就是 $f_1(x)$的因式,由已知 $f_2(x),f_3(x)$有非常数的公因式,从而 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$有非常数因式.这与已知矛盾.

所以 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$线性无关.

§1.4 基、维数与坐标

我们知道,对于几何空间中的向量,线性无关的向量最多是 3 个,而任意 4 个向量都是线性相关的. 对于 n 元数组所构成的向量空间,有 n 个线性无关的向量,而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的. 在一个线性空间中,究竟最多能有几个线性无关的向量,显然是线性空间的一个重要属性.

定义 1.4.1 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量,且任何 $n+1$ 个向量均线性相关,那么 V 就称为 n 维的;如果 V 中可以找到任意多个线性无关的向量,那么 V 就称为无限维的.

按照这个定义,不难看出,几何空间中向量所成的线性空间是三维的;n 元数组所成的空间是 n 维的;由所有实系数多项式所成的实线性空间是无限维的,因为对于任意的 N,都有 N 个线性无关的向量

$$1,\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{x}^{N-1}.$$

定义 1.4.2 在 n 维线性空间 V 中,任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出,即存在系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

则称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组基,其中系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是被向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 唯一确定的,这组数就称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标,记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

由以上定义,在给出空间 V 的一组基之前,先要确定 V 的维数. 实际上,这两

个问题常常是同时解决的.

定理 1.4.1 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，且 V 中任一向量都可以用它们线性表出，那么 V 是 n 维的，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 即为 V 的一组基.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 V 的维数至少是 n. 为了证明 V 是 n 维的，只需证 V 中任意 $n+1$ 个向量必定线性相关. 设

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$$

是 V 中任意 $n+1$ 个向量，它们可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 假如它们线性无关，就有 $n+1\leqslant n$，于是得出矛盾.

例 1.4.1 设线性空间 $V=\mathbf{F}[x]_4$ 为数域 $\mathbf{F}$ 上次数小于 4 的多项式全体构成的 4 维线性空间，容易验证

$$\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x+1,\boldsymbol{\alpha}_3=x^2+x+2,\boldsymbol{\alpha}_4=x^3+x^2+2x+3$$

是线性无关的.

设 $a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+a_3\boldsymbol{\alpha}_3+a_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，则

$$a_4x^3+(a_4+a_3)x^2+(2a_4+a_3+a_2)x+3a_4+2a_3+a_2+a_1=0.$$

由此得 $a_4=a_4+a_3=2a_4+a_3+a_2=3a_4+2a_3+a_2+a_1=0$，

即 $a_1=a_2=a_3=a_4=0$.

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbf{V}$ 的一组基，且 $\boldsymbol{\alpha}=2x^3+3x^2+4x+5$ 在这组基下的坐标为 $(-2,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

例 1.4.2 在 n 维空间 $\mathbf{P}^n$ 中，显然

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)\end{cases}$$

是一组基，对每个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

所以 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 就是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标.

不难证明，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}'_1=(1,1,\cdots,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2=(0,1,\cdots,1),\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n=(0,0,\cdots,1)\end{cases}$$

是 $\mathbf{P}^n$ 中 n 个线性无关的向量. 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 下，对于向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1'+(a_2-a_1)\boldsymbol{\varepsilon}_2'+\cdots+(a_n-a_{n-1})\boldsymbol{\varepsilon}_n'.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 下的坐标为

$$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1})^{\mathrm{T}}.$$

定理 1.4.2 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个向量必线性相关.

证明 设 V 是 n 维线性空间，则存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 再设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 是 V 中任意 $n+1$ 个向量，由定义 1.4.2 可知，每个 $\boldsymbol{\beta}_j(1\leqslant j\leqslant n+1)$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合，即存在数 a_{ij}，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n+1$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\ 1\leqslant j\leqslant n+1.$$

可见考查 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 的线性相关性. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 是未定元，满足

$$\sum_{j=1}^{n+1}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}. \tag{1.4.1}$$

上式是一个齐次线性方程组，它等价于方程组

$$\sum_{j=1}^{n+1}x_j\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\Big)=\mathbf{0},$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n+1}x_ja_{ij}\Big)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，故有 $\sum\limits_{j=1}^{n+1}x_ja_{ij}=0,1\leqslant i\leqslant n.$

这是一个含 $n+1$ 个未知数、n 个方程的齐次线性方程组，故有非零解，即有不全为零的数 x_j 满足(1.4.1)式，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 线性相关.

推论 1.4.1 n 维线性空间中任意 n 个线性无关的向量均构成一组基.

建立了坐标以后，就把抽象的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与具体的数组向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 联系起来了，并且还可把 V 中抽象的线性运算与数组向量的线性运算联系起来.

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(x_n+y_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda x_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的坐标是 $(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}+(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标是 $(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}=\lambda(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

总之，设在 n 维线性空间 V_n 中取定一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，则 V_n 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 n 维数组向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 之间就有一个一一对应的关系，且这个对应关系具有下述性质：

设 $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，则

(i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}+(y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$；

(ii) $\lambda\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow \lambda(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

也就是说，这个对应关系保持线性组合的对应．因此，我们可以说 V_n 与 $\mathbf{R}^n$ 有相同的结构，我们称 V_n 与 $\mathbf{R}^n$ 同构．

一般地，设 V 与 U 是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，那么就说线性空间 V 与 U 同构．

显然，任何 n 维线性空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构，即维数相等的线性空间都同构，从而可知线性空间的结构完全被它的维数所决定．

同构的概念除元素一一对应外，主要是保持线性运算的对应关系．因此，V_n 中抽象的线性运算就可以转化为 $\mathbf{R}^n$ 中的线性运算，并且 $\mathbf{R}^n$ 中凡是只涉及线性运算的性质就都适用于 V_n，但 $\mathbf{R}^n$ 中超出线性运算的性质，在 V_n 中就不一定具备，例如 $\mathbf{R}^n$ 中的内积概念在 V_n 中就不一定有意义．

§1.5 基变换与坐标变换

在 n 维线性空间中，任意 n 个线性无关的向量都可以取作空间的基．对不同的基，同一个向量的坐标一般是不同的．§1.4 的例 1.4.2 已经说明了这一点．那么，不同的基与不同的坐标之间有怎样的关系呢？

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维线性空间 V_n 中的两个基，

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 这 n 个有序元素记作 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，利用向量和矩阵的形式，(1.5.1) 式可表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}. \tag{1.5.2}$$

(1.5.1)或(1.5.2)式称为基变换公式，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，