北大燕园

2013年 李永乐·李正元

考研数学 4

数学历年试题解析

数学一

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
中国人民大学 袁荫棠

您的最佳选择

一清二楚：本书将1998年～2012年同一内容的试题归纳在一起，分类解析。已(或未)考考点、命题广度或深度尽在其中

出类拔萃：本书在各题型中精选了数学二、三及原数学四相关内容的典型考题(含解答)，独一无二地能让考生全面了解该题型的命题情况

高屋建瓴：本书在各题型后归纳总结该题型的解题思路、方法和技巧，并归纳总结常用结论或公式

国家行政学院出版社

北大燕园

2013年李永乐·李正元考研数学④

数学

数学一

历年试题解析

主编　北　京　大　学　李正元
　　　清　华　大　学　李永乐
　　　中国人民大学　袁荫棠

编者　（按姓氏笔画）
　　　北　京　大　学　李正元
　　　清　华　大　学　李永乐
　　　北　京　大　学　刘西垣
　　　中国人民大学　严　颖
　　　北　京　大　学　范培华
　　　中国人民大学　袁荫棠

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析.1/李永乐,李正元,袁荫棠主编.—北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)
ISBN 978-7-80140-322-3

Ⅰ.数... Ⅱ.①李... ②李... ③袁... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004374 号

书　　名	数学历年试题解析[数学一]
作　　者	李正元　李永乐　袁荫棠
责任编辑	李锦慧　樊克克
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话	(010)82771887
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2012 年 2 月北京第 9 版
印　　次	2012 年 2 月北京第 1 次印刷
开　　本	787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张	25
字　　数	660 千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-322-3/O·29
定　　价	38.00 元

前 言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了1998年~2012年全国硕士研究生入学统考数学一试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地察出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学一的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学二、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了1997年（含）以前数学一相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学一的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后部归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李正元、李永乐、袁荫棠**等主编的**《考研数学复习全书》（理工类·数学一）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2～3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2012年2月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一篇　2012年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　1998~2011年考研数学一试题

第三篇　1998~2011年考研数学一试题分类解析

第一篇　2012 年考研数学一试题及答案与解析

2012 年考研数学一试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【　】

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

【　】

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

【　】

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\ (k=1,2,3)$，则有

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_3<I_2<I_1$.

(C) $I_2<I_3<I_1$.　　(D) $I_2<I_1<I_3$.

【　】

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+$

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

【　】

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $\boldsymbol{P}\{X<Y\}=$

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

【　】

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为

(A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1.

【　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

(11) $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\,dS=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$\boldsymbol{P}(AB)=\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{P}(C)=\frac{1}{3}$，则 $\boldsymbol{P}(AB\mid\overline{C})=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>$

$0\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为1,求函数 $f(t)$ 的表达式,并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)(**本题满分10分**)

已知 L 是第一象限中从点(0,0)沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点(2,0),再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点(0,2)的曲线段.计划曲线积分 $I = \int_L 3x^2y\,dx + (x^3 + x - 2y)\,dy$.

(20)(**本题满分11分**)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(**本题满分11分**)

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$,二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

(22)(**本题满分11分**)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{P}\{X = 2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X - Y, Y)$.

(23)(**本题满分11分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$,其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$.记 $Z = X - Y$.

(Ⅰ)求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

（Ⅱ）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

（Ⅲ）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量．

2012 年考研数学一试题答案与解析

一、选择题

(1)【**分析**】 函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的间断点只有 $x=\pm 1$．

由于 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$，故 $x=1$ 是垂直渐近线．

$\left(\text{而} \lim\limits_{x\to -1} y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}，\text{故 } x=-1 \text{ 不是渐近线}\right)$．

又 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$，故 $y=1$ 是水平渐近线．(无斜渐近线)．

综上可知，渐近线的条数为 2．故选(C)．

---

(2)【**分析一**】 按定义

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)}{x}\\&=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!,\end{aligned}$$

故选(A)．

【**分析二**】 用乘积求导公式．含因子 e^x-1 项在 $x=0$ 为 0，故只留下一项．于是

$$\begin{aligned}f'(0)&=\left[e^x(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)\right]\Big|_{x=0}\\&=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!.\end{aligned}$$

故选(A)．

---

(3)【**分析一**】 若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{记}}A(\exists)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$．

又 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 $\Rightarrow f(0,0)=0$．于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=A.$$

由极限与无穷小的关系 $\Rightarrow$

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=A+o(1)\ \begin{pmatrix}x\to 0\\y\to 0\end{pmatrix},$$

其中 $o(1)$ 为无穷小．$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=A(x^2+y^2)+(x^2+y^2)o(1)\\&=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho)\ (\rho\to 0),\end{aligned}$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$．因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微．故选(B)．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

【分析二】 (A)不正确,如 $f(x,y)=|x|+|y|$ 满足条件,但 $f(x,y)$ 在(0,0)不∃偏导数,故不可微.(C)不正确,如 $f(x,y)=x$ 在(0,0)可微,但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x}{|x|+|y|}$ 不∃.(D)也不正确.如 $f(x,y)=x$ 在(0,0)可微,但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x}{x^2+y^2}$ 不∃.因此选(B).

---

(4)【分析】 $I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,\quad I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x.$

先比较 I_1 与 I_2:由

$$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0\Rightarrow I_1>I_2.$$

再比较 I_2 与 I_3:由

$$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>0\Rightarrow I_2<I_3.$$

还需比较 I_1 与 I_3:由

$$\begin{aligned}I_3-I_1&=\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{(t-\pi)^2}\sin(t-\pi)\mathrm{d}t+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_{2\pi}^{3\pi}[e^{x^2}-e^{(x-\pi)^2}]\sin x\mathrm{d}x>0\Rightarrow I_3>I_1.\end{aligned}$$

因此 $I_3>I_1>I_2$.故选(D).

---

(5)【分析】 n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$,显然

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.故选(C).

---

(6)【分析】 本题考查初等变换与初等矩阵.由于 $\boldsymbol{P}$ 经列变换为 $\boldsymbol{Q}$,有

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1),$$

那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{12}(1)]=\boldsymbol{E}_{12}^{-1}(1)(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{E}_{12}(1)\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

故选(B).

---

(7)【分析】 依题设知 X,Y 的概率密度分别为

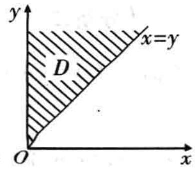
$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},&x>0,\\0,&x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y},&y>0,\\0,&y\leqslant 0,\end{cases}$$

又 X 与 Y 相互独立,从而 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)},&x>0,y>0,\\0,&其他.\end{cases}$$

于是 $P\{X<Y\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x<y}4\mathrm{e}^{-(x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4\mathrm{e}^{-(x+4y)}\mathrm{d}y=\frac{1}{5}.$$



故选(A).

---

(8)【分析】 设其中一段木棒长度为 X,另一段木棒长度为 Y,显然 $X+Y=1$,即 $Y=1-X$,Y 与 X 之间有明显的线性关系,从而 $\rho_{XY}=-1$.

故选(D).

二、填空题

(9)【分析】 因 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0, & ①\\ f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x, & ②\end{cases}$$

由 ② 得 $f''(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$,代入 ① 得

$$f'(x)-3f(x)=-2\mathrm{e}^x,$$

两边乘 e^{-3x} 得 $[\mathrm{e}^{-3x}f(x)]'=-2\mathrm{e}^{-2x}$.

积分得 $\mathrm{e}^{-3x}f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+C$, 即 $f(x)=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}$.

代入 ② 式得 $\mathrm{e}^x+9C\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}=2\mathrm{e}^x$.

$\Rightarrow C=0$,于是 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

代入 ① 式自然成立.因此求得

$$f(x)=\mathrm{e}^x.$$

---

(10)【分析一】 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x\xlongequal[t=x-1]{}\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t+\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

其中 $\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ 是半单位圆的面积.

【分析二】 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x-1=\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos t\mathrm{d}(1+\sin t)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{2}.$$

---

(11)【分析】 记 $u=xy+\dfrac{z}{y}$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{grad}u\Big|_{(2,1,1)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(2,1,1)}=(1,1,1).$$

因此 $\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$.

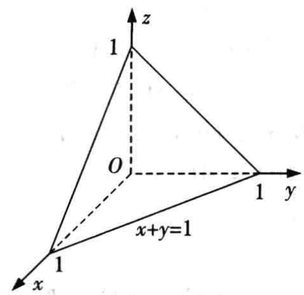
---

(12)【分析】 投影到 xy 平面上. Σ 在 xy 平面上的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}.$$

由 Σ 的方程 $z = 1 - x - y \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$



现将曲面积分化为二重积分,然后求出积分值.

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}S &= \iint_{D_{xy}} y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} y^2 \mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 (1-x)^3 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4} \left[-(1-x)^4\right] \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{12}.\end{aligned}$$

---

(13)【分析】 设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$,则有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$,又

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix},$$

易见秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 那么

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 = \lambda^3 - \lambda^2,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,0,0,从而 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,1.

又因 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,从而 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 2$.

---

(14)【分析】 由于 A 与 C 互不相容,所以 $AC = \varnothing, ABC = \varnothing$,从而 $\boldsymbol{P}(ABC) = 0$. 于是

$$\boldsymbol{P}(AB \mid \overline{C}) = \frac{\boldsymbol{P}(AB\overline{C})}{\boldsymbol{P}(\overline{C})} = \frac{\boldsymbol{P}(AB) - \boldsymbol{P}(ABC)}{1 - \boldsymbol{P}(C)} = \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{1 - \boldsymbol{P}(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

三、解答题

(15)【分析与证明】 令 $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}(-1 < x < 1)$,则转化为证明 $f(x) \geqslant 0 (x \in (-1,1))$.

因 $f(x) = f(-x)$,即 $f(x)$ 为偶函数,故只需考察 $x \geqslant 0$ 的情形.

用单调性方法.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\frac{1+x}{1-x} + x\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) - \sin x - x \\ &= \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \sin x - x, \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - \cos x - 1,$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x>0(x\in(0,1]),$$

其中$\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$, $2\left[\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]>0$, $\sin x>0(x\in(0,1))$.

因 $x\in(0,1)$ 时$f^{(3)}(x)>0$,又 $f''(x)$ 在$[0,1)$ 连续 $\Rightarrow f''(x)$ 在$[0,1)\nearrow$, $f''(x)>f''(0)=2>0(x\in(0,1])$,同理$f'(x)$ 在$[0,1)\nearrow$, $f'(x)>f'(0)=0(x\in(0,1])\Rightarrow f(x)$ 在$[0,1)\nearrow$, $f(x)>f(0)=0(x\in(0,1])$. 又因$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)>0(x\in(-1,1),x\neq 0)$, $f(0)=0$. 即原不等式成立.

---

(16)**【分析与求解】** 先求驻点.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

由$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\ y=0.\end{cases}$

再求驻点处的二阶偏导数.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+(1-x^2)(-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y)=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

由于在点(1,0) 处,

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}},\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow AC-B^2=2e^{-1}>0$,又 $A<0$

$\Rightarrow$ 点(1,0) 为极大值点, $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

同样在点(-1,0) 处,

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}},\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow AC-B^2=2e^{-1}>0$,又 $A>0$

$\Rightarrow$ 点(-1,0) 为极小值点, $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

---

(17)**【分析与求解】** (Ⅰ) 先求收敛域. 这是缺项幂级数(有无穷多项系数为0).

方法1° 令 $t=x^2$,原级数变成$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}t^n\xlongequal{记}\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\Big/\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right]=1$$

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R=1$. 回到原幂级数,它的收敛半径 $R=1$.

方法 2° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}\xlongequal{\text{记}}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. 与方法 1° 类似可求得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2.$$

当 $x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时幂级数收敛,当 $|x|>1$ 时幂级数发散,所以收敛半径 $R=1$.

收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时原幂级数发散(一般项为无穷大量),因此收敛域为 $(-1,1)$.

(Ⅱ) 求和函数. 先作分解

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n},$$

分别求 $$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}\text{与}S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}.$$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\ (|x|<1);$$

由 $$xS_2(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\Rightarrow$ $$[xS_2(x)]'=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$$

$\Rightarrow$ $$xS_2(x)=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^x=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$\Rightarrow$ $$S_2(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (x\neq0,|x|<1),$$

$$S_2(0)=2.$$

又 $S_1(0)=1$,因此

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|<1,x\neq0,\\ 3, & x=0.\end{cases}$$

评注 由逐项积分或逐项求导保持收敛半径不变,不必先求收敛半径就可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}\text{与}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$$

的收敛半径均为 1,它们相等,所以不能保证

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)+\frac{2}{2n+1}\right]x^{2n}$$

的收敛半径也是 1. 因此先求收敛域是必要的步骤.

---

(18)【分析与求解】 (Ⅰ) 求 $f(t)$.

当 $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$ 时曲线 L 在切点 $A(f(t),\cos t)$ 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin t}{f'(t)},$$

切线方程为 $$y=\cos t-\frac{\sin t}{f'(t)}[x-f(t)].$$

令 $y=0$ 得切线与 x 轴的交点 B 的 x 坐标为

$$x=f(t)+\frac{\cos t f'(t)}{\sin t},$$

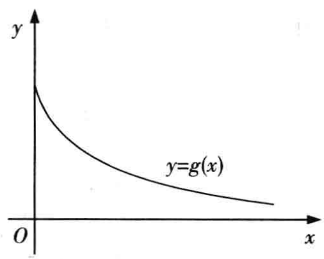
于是 B 点坐标为 $\left(f(t)+\dfrac{\cos t f'(t)}{\sin t},0\right)$,切点 A 的坐标为 $(f(t),\cos t)$.

A 与 B 的距离为 $\sqrt{\dfrac{f'^2(t)\cos^2 t}{\sin^2 t}+\cos^2 t}\xlongequal{\text{依题设}}1$,

化简得 $$f'(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos t},$$

积分得 $$\begin{aligned}f(t)&=f(0)+\int_0^t\frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{\sin^2 x-1+1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}\sin x\\&=-\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}\sin x\\&=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}\\&=-\sin t+\ln(\sec t+\tan t).\end{aligned}$$

(Ⅱ)求无界区域的面积 S.



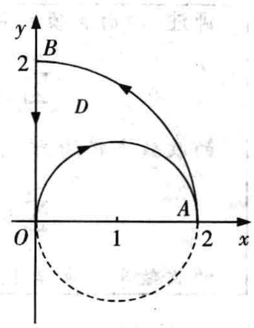
曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可表为 $y=g(x)(0\leqslant x<+\infty)$,当 $t\to\dfrac{\pi}{2}-0$ 时 $x\to+\infty$.

当 $x=f(t)$ 时 $g(x)=\cos t$,于是

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=f(t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}f(t)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

---

(19)**【分析与求解一】** 用格林公式来计算.



记 $J=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,曲线 L 如图所示.

1° $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+1)-3x^2=1$;

2° 曲线 L 不封闭,添加辅助线 L_1:沿 y 轴由点 $B(0,2)$ 到点 $O(0,0)$.

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1}Q(0,y)\mathrm{d}y=\int_2^0-2y\mathrm{d}y=\int_0^2 2y\mathrm{d}y=4;$$

3° 在 L_1 与 L 围成的区域 D 上用格林公式(边界取正向,即逆时针方向):

$$\begin{aligned}\int_{L\cup L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{4}\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

因此 $$J=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-4.$$

【分析与求解二】 先分项积分,即

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com