曾昭煌 主编

工程力学

上册（二）

山西高校联合出版社

工程力学

上册

刁　璞　　王月梅　　王复兴
　　　　　　　　　　　　　　　编
陈昭怡　　邢继文　　曾昭煌

山西高校联合出版社

动　力　学

动力学概述

静力学中只研究力，不考虑物体的运动，运动学只研究运动，不考虑力。动力学则将两者结合起来，研究物体运动的变化和作用于物体上的力之间的关系。因此静力学与运动学各研究了动力学的一个侧面。它们既有其独立的意义，又为动力学的研究提供了条件。静力学提供了力系的简化及分析力的方法，运动学提供了运动的描述及运动的几何性质。

动力学的研究对象决定了动力学的两类基本问题。动力学的第一类基本问题：已知物体的运动，求作用于物体上的力；动力学的第二类基本问题：已知作用于物体上的力，求物体的运动。动力学的主要任务就是要解决简单的结构或机构中两类动力学基本问题，以作为工程中按动力设计问题的基础。

动力学理论的应用非常广泛。设计各种机器、仪表，火箭技术及宇宙航行等问题都要用动力学理论。

动力学中关于物体的模型——质点，质点系和刚体。

质点及刚体的概念已分别在运动学和静力学中介绍过，这里着重介绍质点系的概念。

一群相互有联系的质点称为质点系(系统)。质点系既可以代表一个物体，也可以代表一个物体系统；既可以代表刚体、刚体系统，也可以代表弹性体、弹性体系统或流体。所以质点系是动力学中关于物体的最广泛的抽象化模型。若质点系中各质点都不受限制，则此质点系称为自由质点系。太阳系

可以作为自由质点系的例子。若质点系中的各质点受到限制，则此质点系称为**非自由质点系**。工程中的结构或机构都是非自由质点系。刚体为不变质点系。

动力学主要研究质点系特别是非自由质点系的动力学问题。

第十一章 动力学基本定律

及质点运动微分方程

11.1 动力学基本定律

作为动力学基础的动力学四个定律，是由牛顿三定律以及作为牛顿第二定律的补充“力的独立作用定律”组成。

牛顿在总结前人经验、成果的基础上，通过观察、实验和概括，得到了动力学的三个定律——牛顿三定律。以现代的形式可叙述如下。

11.1.1 牛顿第一定律（惯性定律）

质点不受力作用时，静止的保持静止；运动的作匀速直线运动。即质点不受力作用时保持运动状态不变。称为牛顿第一定律。

牛顿第一定律说明质点具有保持运动状态不变的性质。称为质点的**惯性**。因此牛顿第一定律又称为**惯性定律**。匀速直线运动称为**惯性运动**。牛顿第一定律既说明了质点具有惯性，又定性地说明了力与质点运动变化之间的关系。更重要的是肯定了惯性运动的存在。

11.1.2 牛顿第二定律

质点受力作用时就要产生加速度。其方向与力的方向相同，其大小与力的大小成正比，与质点的质量成反比。称为牛顿第二定律。

设质量为m的质点M，在力$\vec{F}$作用下产生加速度$\vec{a}$，则

质量、力与加速度三者之间的关系为

$$m\vec{a}=\vec{F} \tag{11—1}$$

方程(11—1)称为**动力学基本方程**。是动力学理论的出发点。

牛顿第二定律定量地给出了运动的变化与作用于质点上的力之间的关系。

由牛顿第二定律知，当力一定时，质点的质量越大，所产生的加速度越小，则质点的惯性越大。反之，质点的质量越小，所产生的加速度越大，则质点的惯性越小。因此，质点的质量是**质点惯性的度量**。

在国际单位制中，力学方面的基本单位有三个。即长度单位〔米(m)〕、质量单位〔公斤(kg)〕和时间单位〔秒(s)〕。力的单位是导出单位。力的单位是牛顿(N)或千牛顿(kN)。

1牛顿(N)=1公斤·米/秒^2(kg·m/s^2)

1千牛顿(kN)=1000牛顿(N)

设物体的重量为P，重力加速度为g则

$$mg=P \tag{1}$$

$$m=\frac{P}{g} \tag{2}$$

若测得重力和重力加速度，则可由式(2)求得物体的质量。重量是物体所受重力的大小。质量是物体所含物质的数量，是质点或平动刚体惯性的量度。重力和重力加速度都随物体在地面上的位置而变化，但其比值不变。可见，物体的质量为常量。

11.1.3 牛顿第三定律（反作用定律）

物体之间的作用力与反作用力同时存在，大小相等、方向相反，沿同一直线分别作用在相互作用的两个物体上。

11.1.4 力的独立作用定律

若干个力同时作用于一个质点上，所产生的加速度，等于各个力单独作用于质点上所产生加速度的矢量和。

设质量为m的质点M，在力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、……、$\vec{F}_n$作用下产生的加速度为$\vec{a}$，各力分别作用时所产生的加速度为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$，则

$$\vec{a}=\Sigma\vec{a}_i$$

设$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、……、$\vec{F}_n$的合力为$\vec{R}$，则

$$\vec{R}=m\vec{a}=m\Sigma\vec{a}_i=\Sigma m\vec{a}_i=\Sigma\vec{F}_i$$

所以

$$\vec{R}=\Sigma\vec{F}_i \tag{11-2}$$

即由力的平行四边形法则导出的，"汇交力系的合力等于各分力的矢量和"在动力学中亦成立。

从本质上说，力的独立作用定律是说明力的平行四边形法则在动力学中亦成立（$n=2$时）。因而静力学中基于力的平行四边形法则所导出的力系的合成及简化理论在动力学中亦成立。

11.2 质点运动微分方程

设质量为m的质点M，在力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、……、$\vec{F}_n$作用下产生加速度$\vec{a}$，则由动力学基本方程及力的独立作用定律，得

$$m\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{11—3}$$

由运动学 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

将其分别代入式（11—3）得

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{11-4}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{11-5}$$

方程(11-4)、(11-5)都称为**质点运动微分方程的矢量形式**。

若将式(11-4)、(11-5)分别在直角坐标轴上投影。得

$$m\frac{dv_x}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix},\quad m\frac{dv_y}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy},\quad m\frac{dv_z}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz} \tag{11-6}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz} \tag{11-7}$$

式中v_x、v_y、v_z；F_{ix}、F_{iy}、F_{iz}分别为质点M的速度以及作用于质点M上的任一个力$\vec{F}_i$在直角坐标系上的投影。x、y、z为质点M在直角坐标系中的坐标。

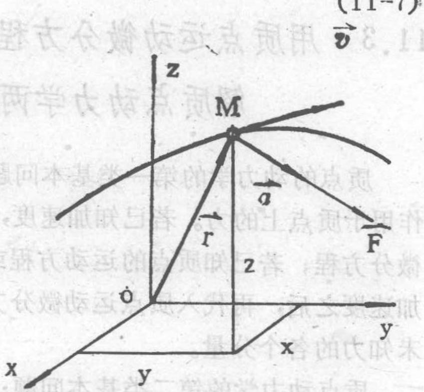

图 11.1

微分方程组(11-6)、(11-7)都称为**质点运动微分方程的直角坐标形式**。

若将式（11-4)、(11-5）在自然坐标轴上投影，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}F_{i\tau},\quad m\frac{v^2}{\rho}=\sum_{i=1}^{n}F_{in},\quad \sum_{i=1}^{n}F_{ib}=0 \tag{11-8}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{i\tau},\quad m\frac{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}{\rho}=\sum_{i=1}^{n}F_{in},\quad \sum_{i=1}^{n}F_{ib}=0 \tag{11-9}$$

式中v为速度的大小，s为质点M沿其轨迹的弧坐标，$F_{i\tau}$、F_{in}、F_{ib}为作用于质点M上的任一个力$\vec{F}_i$在自然坐标轴上的投影。

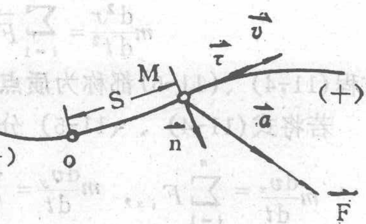

图 11.2

微分方程组(11-8)、(11-9)都称为**质点运动微分方程的自然坐标形式**。

11.3 用质点运动微分方程解质点动力学两类基本问题举例

质点的动力学的第一类基本问题：已知质点的运动，求作用于质点上的力。若已知加速度，则可直接代入质点运动微分方程；若已知质点的运动方程或速度方程则经微分求得加速度之后，再代入质点运动微分方程，即可求得未知力或未知力的各个分量。

质点动力学的第二类基本问题：已知作用于质点上的力，求质点的运动。这类问题可以归结为以初始条件为定解条件的解常微分方程问题。

下面举例说明用质点运动微分方程解质点动力学两类基本问题的方法和步骤。

例11.1 图11.3所示的电梯以匀加速度a上升，求重W的物体M对电梯底板的压力。

解 1. 取研究对象 物体M。

2. 分析力 ($\vec{W}$, $\vec{N}$)。

3. 分析运动

物体M在电梯底板的反力作用下，以加速度a上升。

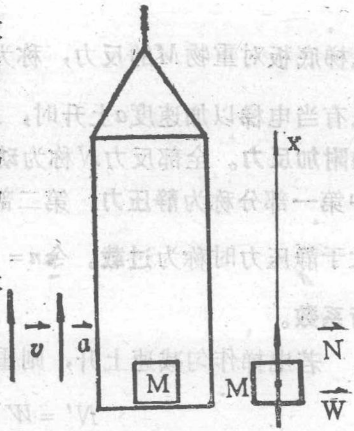

图 11.3

4. 列质点运动微分方程

取坐标轴如图11.3所示。沿x轴的质点运动微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma F_{ix}$$

由题意，$m=\dfrac{W}{g}$，$a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\Sigma F_x=N-W$，

得 $$\frac{W}{g}a=N-W \tag{1}$$

由式(1) 解得，电梯底板对物体M的反力

$$N=W+\frac{W}{g}a=W\left(1+\frac{a}{g}\right)$$

重物M对电梯底板的压力

$$N'=N=W+\frac{W}{g}a$$

可见，电梯底板对物体M的反力由两部分组成。第一部分为物体M的重量W。即当电梯静止时或作匀速直线运动时

电梯底板对重物M的反力，称为**静反力**。第二部分为$\frac{W}{g}a$，只有当电梯以加速度a上升时，才能产生这部分反力，称为**动附加反力**。全部反力N称为**动反力**。N'称为**动压力**，其中第一部分称为**静压力**，第二部分称为**动附加压力**。动压力大于静压力时称为**过载**。令$n=1+\frac{a}{g}$，n称为**过载系数**或**动荷系数**。

若电梯作匀减速上升，则重物对电梯底板的动压力为

$$N'=W-\frac{W}{g}a$$

可见，此时重物对电梯底板的动压力小于物体的重量，称为**失重**。当$a=g$时，动压力$N'=0$，此时重物各部分因重力而引起的压力完全消失，称为**完全失重**。

例11.2 质量为m的小球M，从静止开始沿图11.4所示的四分之一圆形轨道下滑，设轨道的半径为r。不计轨道与小球的摩擦。求小球M下滑到最低位置时对轨道的压力。

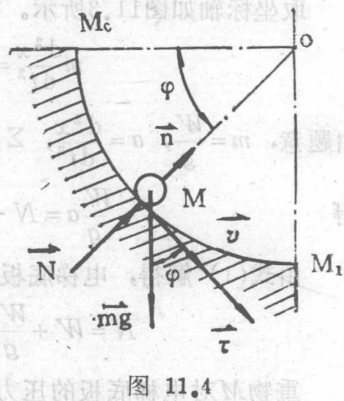

图 11.4

解 1．取研究对象 小球。

2．分析力 $(\vec{mg}, \vec{N})$。

3．分析运动

小球M在重力作用下，沿轨道作圆周运动；$t=0$，$v_0=0$。

4．列质点运动微分方程

取自然坐标系的$\vec{\tau}$、$\vec{n}$如图11.4所示。取$t=0$时小球M所在位置M_0为量弧长的起点，向下量弧长为正。由质点运动微分方程的自然形式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\Sigma F_{\tau} \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=\Sigma F_{n} \qquad (2)$$

由题意，$\Sigma F_{\tau}=mg\cos\varphi$，$\Sigma F_{n}=N-mg\sin\varphi$

代入式(1)，

得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg\cos\varphi \qquad (3)$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=N-mg\sin\varphi \qquad (4)$$

小球的运动方程为

$$s=r\varphi,\ \ v=r\dot{\varphi},\ \ a_{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\ddot{s}=r\ddot{\varphi}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{\dot{s}^2}{\rho}=r\dot{\varphi}^2$$

代入式(3)、(4)，得

$$mr\ddot{\varphi}=mg\cos\varphi \qquad (5)$$

$$mr\dot{\varphi}^2=N-mg\sin\varphi \qquad (6)$$

式(5)显含$\dot{\varphi}$、φ和t三个变量，为了便于分离变量作如下的变换

$$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\dot{\varphi})\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\dot{\varphi}) \qquad (7)$$

将式(7)代入式(5)，得

$$r\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\dot{\varphi})=g\cos\varphi \qquad (8)$$

积分 $$\int_0^{\varphi} r\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = g\int_0^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi$$

得 $$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 = g\sin\varphi$$

所以 $$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{r}\sin\varphi}$$

当$\varphi = \frac{\pi}{2}$时。小球M运动到M_1点、对M_1点的压力

$$N_1' = N_1 = \left[mr\dot{\varphi}^2 + mg\sin\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[mr\left(\frac{2g}{r}\sin\varphi\right) + mg\sin\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2mg\sin\varphi + mg\sin\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 3mg$$

由此可见：（Ⅰ）和运动学一样，在动力学中，解点作圆周运动问题时，用自然坐标法比用直角坐标法方便。

（Ⅱ）当运动微分方程显含三个变量$\dot{\varphi}$、φ和t时，不能分离变量。常常通过如式(7)的“循环求导”变换后，变成可分离变量的情况。

例11.3 求第二宇宙速度（逃逸速度、摆脱地球引力的最小初速度）。不计空气阻力。

解 1．取研究对象 飞船。

2．分析力 $(\vec{F})$。

不计空气阻力，飞船仅受地球引力作用。由万有引力公式

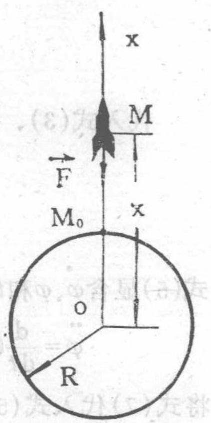

图 11.5

$$F = \frac{KMm}{x^2} \tag{1}$$

式中K为万有引力常数，M为地球的质量，m为飞船的质量，x为地球质心与飞船质心之间的脱离。

在地球表面（$x=R$），地球对飞船的引力为

$$F = \frac{KMm}{R^2} = mg$$

所以
$$KM = R^2 g \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$F = \frac{R^2 gm}{x^2} \tag{3}$$

3．列质点运动微分方程

取坐标系如图11.5所示。质点沿x轴的运动微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \Sigma F_x$$

得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{R^2 mg}{x^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{R^2 g}{x^2} \tag{4}$$

飞船的运动微分方程(4)中，显含v、t、x三个变量，作“循环求导变换”

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x} = -\frac{R^2 g}{x^2}$$

积分 $$\int_{v_2}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}v^2=\int_{R}^{\infty}-\frac{R^2g}{x^2}\mathrm{d}x,$$

$$0-\frac{1}{2}v_2^2=0-\frac{R^2g}{R},\quad v_2^2=2Rg$$

若地球半径 取$R=6400\mathrm{km}$，则 第 二 宇 宙 速 度$v_2=\sqrt{2Rg}$ $=11.2\mathrm{km/s}$

注意：(Ⅰ)重力公式$W=mg$只是在地面附近才适用。当物体离地球较远时，则需要用万有引力公式求地球对重物的引力。

(Ⅱ)摆脱地球引力的的初速度的最小值是当飞船到达无穷远点时速度为零。否则需要更大的初速度。

例11.4　质 量$m=48\mathrm{kg}$的小船M，以初 速 度$v_0=10\mathrm{m/s}$沿直 线 航 行，水 的 阻 力$R=kv$，其 中k为 常 数，v为 小船的速度。

(1) 若 小 船 航 行 距 离$s=50\mathrm{m}$时，速 度$v=5\mathrm{m/s}$，求阻力系数k；

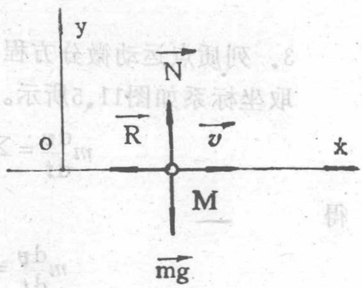

图 11.6

(2) 求小船能航行的最远距离及航完这段距 离 所 需 时间。

解　1. 取研究对象　小船M。

2. 分析力　($\vec{mg}$, $\vec{N}$, $\vec{R}$)。

3. 分析运动：

因为小船作直线运动，所以重力$\vec{mg}$与浮力$\vec{N}$相平衡。小船在水的阻力$\vec{R}$作用下，作减速运动。

4. 列运动微分方程:

取坐标轴x如图11.6所示。沿x轴质点的运动微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\Sigma F_x \tag{1}$$

由题意，$\Sigma F_x=-R=-kv$ (2)

将式(2)代入式(1)，

得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv \tag{3}$$

小船的运动微分方程(3)中，虽然只显含两个变量v、t，是可以分离变量的，积分后，得到v与t的关系式，但是已知条件是距离与速度的关系。为了确定阻力系数k，而作"循环求导"变换

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

将式(4)代入式(3)，得

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv$$

积分 $\int_{10}^{v}m\mathrm{d}v=-\int_{0}^{x}k\mathrm{d}x$，$m(v-10)=-kx$ (5)

当$x=50\mathrm{m}$时，$v=5\mathrm{m/s}$，由式(5)得

$48(5-10)=-50k$

所以。

水的阻力系数$k=-\frac{48}{50}(5-10)=4.8\mathrm{N\cdot s/m}$

当$x=x_{max}$时，$v=0$。由式(5)，得

小船航行的最大距离

$$x_{max}=-\frac{m}{k}(v-10)_{v=0}$$

$$= -\frac{48}{4.8}[0-10] = 100\text{m}$$

为了求时间，需要将小船的运动微分方程对t积分。由式(3)得

$$\int_{10}^{v} m\frac{dv}{v} = -\int_{0}^{t} k dt, \qquad m\ln v\Big|_{10}^{v} = -kt\Big|_{0}^{t}$$

即

$$m\ln\frac{v}{10} = -kt$$

所以 $$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{v}{10} = \frac{48}{4.8}\ln\frac{10}{v} = 10\ln\frac{10}{v}$$

即 $$t = 10\ln\frac{10}{v} \tag{6}$$

当$x = 50$m时，$v = 5$m/s。由式(6)得小船航行50m时所需时间

$$t_1 = 10\ln\frac{10}{5} = 10\ln 2 \text{ s}$$

当$x = x_{max}$时，$v = 0$。代入式(6)得

小船航行到最大距离时所需时间$t_2 = \lim\limits_{v \to 0} 10\ln\frac{10}{v} = \infty$

动力学中的问题，除可以分为两类基本问题外，还可以按照以下方法进行分类。

凡满足守恒定律之一的问题，称为**守恒问题**。否则称为**不守恒问题**。

不守恒问题又可分为无历程问题和有历程问题。凡求任一瞬时的加速度、角加速度、反力或其逆问题（如已知力、加速度求质量等），称为**无历程时间问题**。凡求某一位置或任一位置的加速度、角加速度、反力或其逆问题，称为**无历程空间问题**。二者难于截然分开，故统称为**无历程问题**。凡求经历一段时间之后的运动参量（位移、角位移、速度、角