国内外数学竞赛试题选解

(1956——1979)

下册

铁岭县教师学校

目　　录

第一章　国内部分

第二章　国外部分

十八　1978年重庆市数学竞赛试题选解

问题148

证明△ABC中，如果 $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，则此三角形必为直角三角形。

【证明】

由 $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$

$$\because\quad \sin C=\sin(A+B)=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

而
$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}$$

$$\therefore\quad 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}$$

因A、B是三角的内角，故 $\sin\frac{A+B}{2}\neq 0$

两边除以 $\sin\frac{A+B}{2}$，则得

$$2\cos^2\frac{A+B}{2}=1$$

即

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad（不取负）$$

于是

$$\frac{A+B}{2}=45°，即\quad A+B=90°$$

∴ △ABC是直角三角形。

问题149

方程 $y^2-4x-2y+1=0$ 表示什么曲线？若直线 $y=Kx+2$ 与此曲线相切，问K应取何值？

【解】

曲线方程可化为

$$(y-1)^2=4x \qquad (1)$$

其图象为抛物线。将直线方程与此方程联立，可得交点坐标。以

$$y=Kx+2$$

代入(1)，得

$$(Kx+2-1)^2=4x$$

即

$$K^2x^2+(2K-4)x+1=0 \qquad (2)$$

因直线与抛物线相切，此方程(2)必为相等二实根，故应有判别式

$$\triangle=(2K-4)^2-4K^2=0$$

解之得 $K=1$。

问题１５０

以直角三角形△ABC的直角边AB为直径作元交斜边于D，过D作元的切线交另一直角边于E，则E与元心的联线必平行于斜边，试加证明。

【证明】

如图，设元心为O，联BD因EB、ED都是切线，

∴　$EB=ED$

又　$OB=OD$（都是半径）

在△OBD中，OE平分$\angle BOD$，故$OE\perp BD$又$BD\perp AC$（$\angle ADB=\angle R$），

∴　$OE\perp AC$。

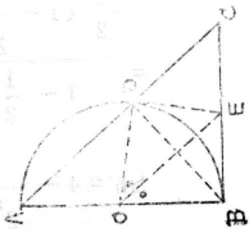


图 1－88

问题１５１

求数列：

$$\frac{2}{2},\ \frac{4}{2^2},\ \frac{6}{2^3},\ \cdots,\ \frac{2n}{2^n}$$

前n项的和。

积和体积。

【解】(一)

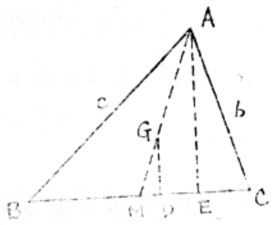


图 1 86

设 BC＝a，G到BC的距离为GD，BC边上高为AE，令AE＝h(如图)，则由

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \tag{1}$$

且由$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$及$\triangle=\frac{1}{2}ah$,

$$\therefore\quad ah=bc\sin\alpha$$

$$\therefore\quad h=\frac{bc\sin\alpha}{a} \tag{2}$$

由(1)中求出a，代入(2)，则得

$$h=\frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}$$

$$=\frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$$=\frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \tag{3}$$

但$GD=\frac{h}{3}$，将(3)式结果代入此式，则

$$GD=\frac{bc\sin\alpha}{3\cdot\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

【解】(二)

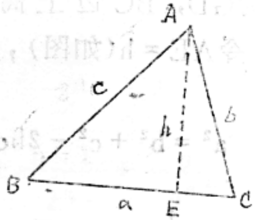


图 1—90

设AB绕BC旋转产生元锥S_1，AC产生S_2。则

$$S_{1侧}=\pi hc$$

$$S_{2侧}=\pi hb$$

$$\therefore\ S_{全}=S_{1侧}+S_{2侧}=\pi(b+c)h\text{ (由前面结果)}$$

$$=\frac{\pi(b+c)bc\sin\alpha}{\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

而

$$V_{旋转体}=\frac{1}{3}\pi h^2(BE+EC)=\frac{1}{3}\pi ah^2$$

$$=\frac{\pi}{3}(ah)h=\frac{\pi}{3}(bc\sin\alpha)\frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\frac{\pi(bc\sin\alpha)^2}{3\cdot\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

（注：$ah=bc\sin\alpha$）

问题153

某煤矿某一年度产煤总量中，除每年以一定数量的煤作为民用，出口等非工业用煤外，其余留作工业用煤。按照该年度某一工业城市的工业用煤总量为标准计算，可供这样的

位。求这直线的方程，并作图形。

【解】

由于二直线

$x-2y-3=0$

$2x-3y-2=0$

的交点为$(-5,\ -4)$，故所求的三角形不可能在Ⅲ象限。因为假若能在Ⅲ象限，那么它的面积就要大于$(-5)(-4)=20$，因而必大于5。所以它必将出现在Ⅱ、Ⅳ象限。即此直线在两轴上的截距必反号。

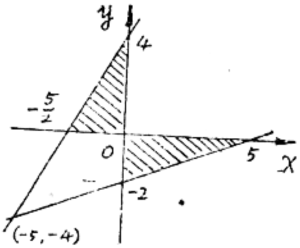


图1—91

设所求直线为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

因它通过点$(-5,\ -4)$，故有

$$\frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1 \qquad (1)$$

所求三角形的面积应为$\frac{1}{2}\left|ab\right|=5$。但a、b反号，故知

$$ab=-10 \qquad (2)$$

化(2)为

$$\frac{-5}{a}=\frac{b}{2}$$

代入(1)，即得

$$\frac{b}{2}-\frac{4}{b}=1$$

解之得

$$\begin{cases} b=-2 \\ a=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=4 \\ a=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

即所求之直线有=解为

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1 \text{ 或 } \frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{4}=1$$

化简：$2x-5y-10=0$ 或 $3x-5y+20=0$

【解 2】

过二直线交点之直线系为

$$x-2y-3+\lambda(2x-3x-2)=0$$

化截距式得

$$\frac{x}{\dfrac{2\lambda+3}{2\lambda+1}}+\frac{y}{-\dfrac{2\lambda+3}{3\lambda+2}}=1$$

因所求三角形不可能在Ⅲ象限，故两截距必反号，即其乘积必为负(理由如前所述)。所以

$$\frac{2\lambda+3}{2\lambda+1}\left(-\frac{2\lambda+3}{3\lambda+2}\right)=-10$$

于是

$$(2\lambda+3)^2=10(2\lambda+1)(3\lambda+2)$$

展开整理

$$56\lambda^2+58\lambda+11=0$$

解之

$$\lambda=-\frac{1}{4},\qquad \lambda=-\frac{11}{14}$$

故所求之直线为

$$x-2y-3-\frac{1}{4}(2x-3x-2)=0$$

或 $$x-2y-3-\frac{11}{4}(2x-3y-2)=0$$

化简得：

$$2x-5y-10=0;$$

$$3x-5y+20=0$$

【问题155】

已知等比数列的第p、q、r项的值分别为x、y、z。求证：$(q-\gamma)\lg x+(\gamma-p)\lg y+(p-q)lzy=0$

【证明】

设此等比数列的首项为a，公比为s，则

$$x=a_p=as^{p-1}$$

$$y=a_q=as^{q-1}$$

$$z=a_r=as^{r-1}$$

因此有

$$x^{q-r} = (as^{p-1})^{q-r} \quad (1)$$

$$y^{r-p} = (as^{q-1})^{r-p} \quad (2)$$

$$z^{p-q} = (as^{r-1})^{p-q} \quad (3)$$

(1)(2)(3)相乘

$$x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q} = a^{o}s^{o} = 1$$

$$\therefore \quad (q-r)\lg x + (r-p)\lg y + (p-q)\lg yz = 0$$

问题156

(一)　已知$P\sin\theta\cos^2\theta = a$，$P\cos\theta\sin^2\theta = b$，θ为锐角，$P \neq 0$。求证$P = \dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

(二)　设$a > b > 0$，试把

$$\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-1}} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1}}$$

化为三角函数积的形式。

【证明】（一）

$$p\sin\theta\cos^2\theta = a$$

$$p\cos\theta\,\mathrm{si}^2\theta = b$$

将两式分别平方，则有

$$p^2\sin^2\theta\cos^4\theta = c^2$$

$$p^2\cos^2\theta\sin^4\theta=b^2 \tag{4}$$

(1)(2)两式相乘，得

$$p^2\sin^3\theta\cos^3\theta=ab \tag{5}$$

(3)+(4)

$$p^2\sin^2\theta\cos^2\theta=a^2+b^2 \tag{6}$$

(6)式立方，则有

$$p_6\sin^6\theta\cos^6\theta=(a^2+b^2)^3 \tag{7}$$

再由(5)得

$$\sin^6\theta\cos^6\theta=\left(\frac{ab}{p^2}\right)^2 \tag{8}$$

(8)代入(7)

$$p^6\left(\frac{ab}{p^2}\right)^2=(a^2+b^2)^3$$

$$\therefore\quad p^2=\frac{(a^2+b^2)^3}{(ab)^2}$$

$$\therefore\quad p=\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

【解】（二）

$\because\quad a>b>c$，$\therefore\quad a-b>0$，且有

$$0<\frac{a-b}{a+b}<1$$

于是

$$0<\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}<1$$

故存在锐角θ，满足

因EF和HG都平行于AB，且为AB之长的一半，故知EFGH是平行四边形。于是

$$|S| = EF \cdot \left(\frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2} \right) = \frac{1}{4}(h_2 - h_1)$$

其中EF是平行四边形的底，$\frac{1}{2}(h_2 - h_1)$是它的高。所以

$$|S| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} l h_2 - \frac{1}{2} l h_1 \right) = \frac{1}{2}(\triangle ABD - \triangle ABC)$$

问题158

已知函数 $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

（1） 求这个函数的定义域；

（2） 绘出图象；

（3） 求这个函数的极值。

【解】

（1） $y = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{当} x > 2 \text{时；} \\ 2, & \text{当} 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{时。} \end{cases}$$

因此，函数的定义域是$x \geqslant 1$。

（2） 其图象如后。

（一段抛物线弧，一段直线。）

（3） 当$x = 1$时，$y = 2$。

故函数y的极小值是2。

同理有

$$\angle P'CB = \angle CP'E$$

$$\therefore \quad \angle CP'E > \angle BP'G \qquad (2)$$

由(1)(2)两端相加，将有

$$\angle APB < \angle APC$$

这又与已知条件矛盾。

$\therefore$ 只能有$\angle BAP < \angle CAP$。

问题１６０

大于7公斤的任何一个整公斤的重量，都可以用3公斤和5公斤的两种砝码来称，而用不着添其它不同重量砝码。试用数学归纳法加以证明。

【证明】

由数学归纳法，大于7的整数中最小的是8，而 $8=3+5$ 是可以的。

假设K是大于8的任何整数，并设

$K=3m+5n$ （m、n是非负整数，且不同时为0。）

则需要证明$K+1=3m+5n+1$也可以通过3与5的整倍数之和来表示。

下百分两种情况来考虑$K+1$

(1) $3m+5n+1$中5的系数不是0 即$n\neq 0$，则有

$$K+1=3m+5n+1=3m+5(n-1)+5+1$$

$$=3m+5(n-1)+6=3(m+2)+5(n-1)$$

这说明是可以的。

(2) 差上面的讨论中$n=0$，由于$K+1\geq 9$，故知$m\geq 3$，可设$m=3+r$ （r为非负整数）

于是

$$K+1=3m+5n+1=3(3+r)+1$$
$$=3r+10=3r+5\cdot 2$$

这说明，只要K可以，那么K＋1也可以。

因此，对大于8的任何整数都可以。

十九　1978年安徽省数学竞赛试题选解

问题161

解方程：

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}=5$$

【解】

化原方程为

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}=5-\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}$$

两边平方，整理

$$14+\sqrt{x-3}=5\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}$$

再平方，整理

$$x-7=-3\sqrt{x-3}$$

再次平方，整理

$$x^2-23x+76=0$$

$$(x-4)(x-19)=0$$

$$x_1=4, \quad x_2=19$$

经验算x_2是增根，舍去。$\therefore x=4$。

【解 2】

化原方程为

$$\sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2}=5$$

当$x \geqslant 3$时，有

$$\sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}+2=5$$

$$\therefore \sqrt{x-3}=1, \quad 即x=4。$$

当$x<3$时，本题无意义。

问题1 6 2

在△ABC中、a、b、c分别是角A，B，C所对的边长。

求证：$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

【证明】

$$\because \quad A+B+C=\pi$$

$$\therefore \quad \sin(B+C)=\sin A$$

两边同乘$\cos(B-C)$，则有

$$\sin(B+C)\cos(B-C)=\sin A\cos(B-C)$$

$$\frac{1}{2}[\sin 2B+\sin 2C]=\sin A\cos(B-C)$$

$$\sin B\cos B+\sin C\cos C=\sin A\cos(B-C)$$

$$2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C=2R\sin A\cos(B-C)$$

其中R为△ABC的外接元半径。

问题1 6 4

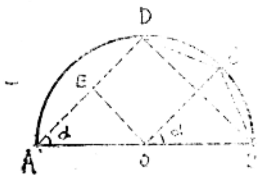
图中ABCD是以O为元心的半元，其中AD∥OC，且△BCD的面积是梯形AOCD的一半。证明△OBC是正三角形。

【证明】

如图，引OE⊥AD，令元径为1，∠BOC＝α。

由于∠ADB＝90°，故AD＝$2\cos\alpha$，BD＝$2\sin\alpha$，OE＝OA$\sin\alpha$＝$\sin\alpha$。

又令梯形AOCD＝S_1，△BOC＝S_2，△ABD＝S_3，△BCD＝S_4。



图—195

$$于是S_1=\frac{1}{2}(OC+AD)OE=\frac{1}{2}(1+2\cos\alpha)\sin\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$S_3=\frac{1}{2}AD\cdot BD=\frac{1}{2}2\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha$$

$$=2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$S_4=S_1+S_2-S_3$$

$$=\frac{1}{2}(1+2\cos\alpha)\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$=\sin\alpha(1-\cos\alpha)$$