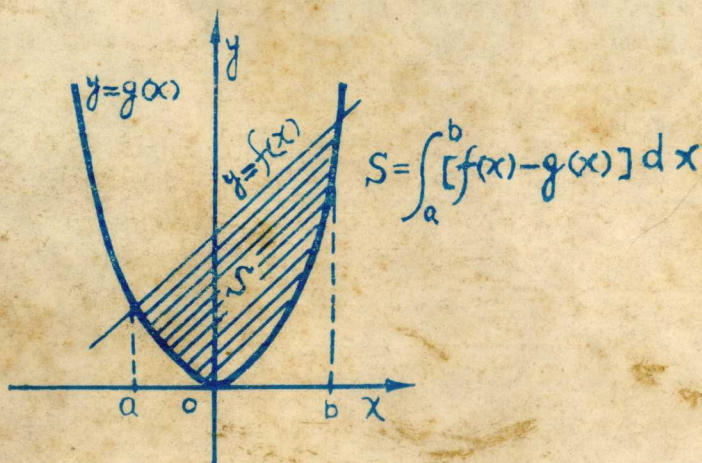


《高等数学习题集》题解

第一、二册



贵州省中等专业学校数学校际组编

说 明

这套《高等数学学习题集》题解，是受省教育局、省广播电视大学的委托，为适应我省电大学员和中等学校数学教师自修提高的需要编辑的（作内部发行）。《高等数学学习题集》是同济大学数学教研室编的一九六五年修订本。

《题解》按原书章次共分五册（一、二册合订）。第一册平面解析几何；第二册空间解析几何；第三册单元函数微分学；第四册单元函数积分学、级数；第五册多元函数微积分学、微分方程。

在编辑过程中，有关主管部门、中等专业学校领导和教学人员给予了热情积极的支持，贵州工学院、贵阳师院和贵州大学等单位给予了大力协助；特别是贵州工学院数学教研组为我们提供了不少资料，在此，一并表示感谢。

由于我们水平不高，加以编辑时间仓促，缺点错误一定不少，望读者批评指正。

编 者

一九七九年七月

目 录

(第一册)

第一章	平面上的直角坐标、曲线及其方程	
	平面上点的直角坐标、坐标变换·····	1
	曲线及其方程·····	16
	杂题·····	23
	曲线的参数方程·····	25
第二章	直线·····	27
	杂题·····	41
第三章	二次曲线·····	57
	圆·····	57
	椭圆·····	64
	双曲线·····	70
	抛物线·····	77
	一般二次方程的化简·····	82
	椭圆及双曲线的准线·····	92
	杂题·····	96
第四章	极坐标·····	107
第五章	行列式及线性方程组·····	119

目 录 (第二册)

第六章	空间直角坐标、矢量代数初步	1
	空间点的直角坐标	3
	矢量代数	8
第七章	曲面方程与空间曲线方程	28
第八章	平面与空间直线方程	42
	平面方程	42
	空间的直线方程	58
	杂题	80
第九章	二次曲面	101

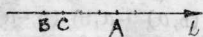
第一篇 解析几何

第一章 平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上的点, 直角坐标, 坐标变换.

- 1.1 设轴上三点, A, B, C 的排列次序如图, A 和 B 间距离为 4, C 和 B 间距离为 1.

(a) 求轴上有向线段 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ 的值.



解: $AB = -4$;

$AC = -3$;

$BC = 1$.

(b) 若以点 A 为原点, 那么点 A, B, C 的坐标等于什么?

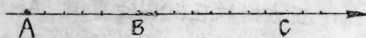
答: $A(0), B(-4), C(-3)$.

- 1.2 已知数轴上点 A, B, C 的坐标依次为 $-6, 0, 8$. 求轴上有向线段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 的值.

解: $AB = 0 - (-6) = 6$

$BC = 8 - 0 = 8$

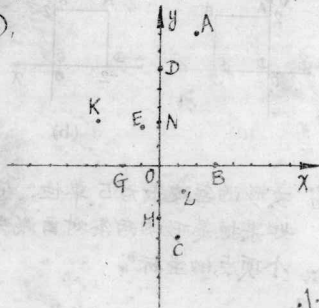
$CA = -6 - 8 = -14$



- 1.3 作下列各点: $A(2, 7), B(3, 0), C(1, -4), D(0, 5), E(-1, 2)$
 $F(-4, -3), G(-2, 0), H(0, -3),$
 $K(-3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}), L(\sqrt{2}, -\sqrt{3}).$

$N(0, \sqrt{5}).$

解: 作得点, 如右图.

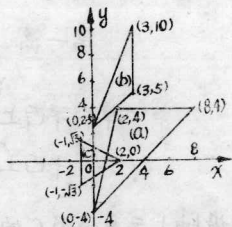


一个顶点的坐标如下：

- (a) $(8, 4), (0, -4), (2, 4)$;
 (b) $(3, 5), (3, 10), (0, 2.5)$;
 (c) $(2, 0), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$;

求作这些三角形。

解：求得三角形如右图。

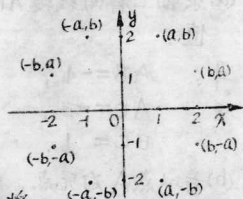


15. 设 $a=1, b=2$, 求作点 (a, b) ,

$(b, a), (-a, b), (b, -a), (-b, a)$

$(a, -b), (-a, -b)$ 和 $(-b, -a)$ 。

解：求得点在右图。



16. 一正方形的边长为 2 单位, 如果将

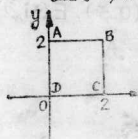
两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上, 问正方形各顶点的坐标等于什么。

解：正方形在 (a) 图位置时 $A(0, 2), B(2, 2), C(2, 0), D(0, 0)$

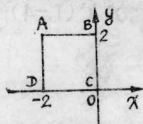
正方形放在 (b) 图位置时 $A(-2, 2), B(0, 2), C(0, 0), D(-2, 0)$

正方形放在 (c) 图位置时 $A(0, 0), B(2, 0), C(2, -2), D(0, -2)$

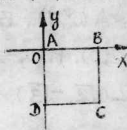
正方形放在 (d) 图位置时 $A(-2, 0), B(0, 0), C(0, -2), D(-2, -2)$



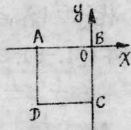
(a)



(b)

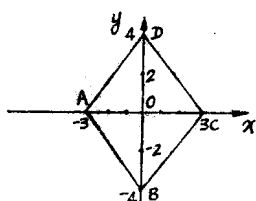
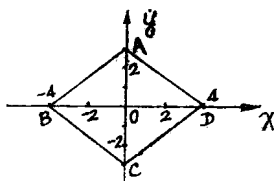


(c)



(d)

17. 菱形的每边长为 5 单位, 它有一条对角线长为 6 单位, 如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上, 求它各个顶点的坐标。



解：设菱形对角线 $AC=6$ ，则 $AO=3$

又已知边长 $=5$ ，即 $AD=5 \therefore OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{25-9}=4$

把菱形放在(a)图的位置 $A(0,3), B(-4,0), C(0,-3), D(4,0)$.

把菱形放在(b)图的位置 $A(-3,0), B(0,-4), C(3,0), D(0,4)$.

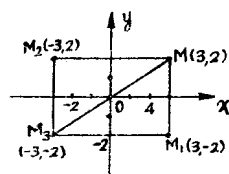
18. 已知点 $M(3,2)$ 作它关于横轴、纵轴、原点的对称点，求这些点的坐标.

解：如右图 M_1 与 M 关于横轴对称且

$M_1(3,-2)$

M_2 与 M 关于纵轴对称且 $M_2(-3,2)$.

M_3 与 M 关于原点对称且 $M_3(-3,-2)$.



19. 证明点 $A_1(a,b)$ 关于第 I 和第 III 象限角的平分线的对称点 A_2 必有坐标 (b,a) .

[证明] $\because A_1, A_2$ 对称于 I, III 象限的角平分线

$\therefore OE \perp A_1A_2$ 且 $A_1E = A_2E$

故 $\therefore \triangle OA_1E \cong \triangle OA_2E$ (S.A.S)

即有 $OA_2 = OA_1$, $\angle 1 = \angle 2$ (全等三角形对应角)

$\therefore \angle 3 = \angle 4$.

又作 $A_2D \perp Oy$ 轴，作 $A_1C \perp Ox$ 轴

则 $\triangle A_2DO \cong \triangle A_1CO$

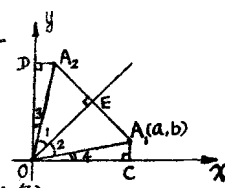
$\therefore A_2D = A_1C = b$ (全等三角形对应边)

$OD = OC = a$

而 A_2D 是 A_2 点的横坐标

OD 是 A_2 点的纵坐标

$\therefore A_2(b,a)$



1.10, 点B与点A(2,4)对称于第I和第III象限角的平分线. 求B点的坐标.

解: 由1.9题已证若 $A_1(a,b)$ 与 A_2 点对称于第I和第III象限角的平分线则 $A_2(b,a)$.

$\because A(2,4)$, B对称于I, III象限角平分线

$\therefore$ B点坐标为(4,2).

1.11, 一点在某一坐标系下的坐标为 $x=2, y=-1$, 如果轴的方向保持不变而将原点移至点:

(a) (4,5); (b) (4,-5); (c) (-4,5); (d) (-4,-5).

该点在新系下的坐标等于什么?

解: $\because \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \quad x=2, y=-1.$

(a) $\therefore$ 当 $a=4, b=5$ 时: 得 $x'=2-4=-2, y'=-1-5=-6$
即在新系下点的坐标为(-2,-6).

(b) $\therefore$ 当 $a=4, b=-5$ 时. 得 $x'=2-4=-2, y'=-1-(-5)=4$
即在新系下点的坐标为(-2,4).

(c) $\therefore$ 当 $a=-4, b=5$ 时, 得 $x'=2-(-4)=6, y'=-1-5=-6$.
即在新系下点的坐标为(6,-6).

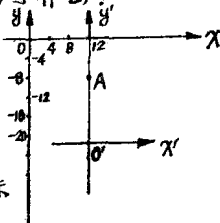
(d) $\therefore$ 当 $a=-4, b=-5$ 时, 得 $x'=2-(-4)=6, y'=-1-(-5)=4$
即在新系下点的坐标为(6,4).

1.12, 某点, 在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为(12,-7)和(0,15) 各系的原点, 在他系下的坐标等于什么?

解: 设此点为A, 它在坐标系 xOy 中的坐标为(12,-7)

它在坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为(0,15)

把 xOy 看成旧系, O' 在 xOy 中的坐标为(h,k). 则



$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 12 = 0 + h \\ -7 = 15 + k \end{cases} \quad \begin{matrix} h = 12 \\ k = -22 \end{matrix}$$

∴ O' 在坐标系 xOy 中的坐标为 $(12, -22)$

把 $x'O'y'$ 看成旧系, xOy 当成新系. O 点, 在 $x'O'y'$ 中的坐标为 (h', k')

$$\text{则} \quad \begin{cases} 0 = 12 + h' \\ 15 = -7 + k' \end{cases}$$

$$\text{求得} \quad h' = -12$$

$$k' = 22$$

∴ O 点, 在 $x'O'y'$ 中的坐标为 $(-12, 22)$

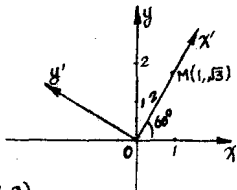
1.13, 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 60° , 点 $M(1, \sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么?

$$\text{解: } \because \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$$x' = 1 \cdot \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$y' = -1 \cdot \sin 60^\circ + \sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

即 $M(1, \sqrt{3})$ 在新系下的坐标为 $(2, 0)$



1.14, 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 45° , 点 $M(1, \sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么?

$$\text{解: } \because \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$$x' = 1 \cdot \cos 45^\circ + \sqrt{3} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$y' = -1 \cdot \sin 45^\circ + \sqrt{3} \cdot \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

即 $M(1, \sqrt{3})$ 在新系下的坐标为 $(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2})$.

1.15, 坐标轴应该旋转多少角度, 方能使点 $M(2, 0)$ 在新系下的横标和纵标变成相等(我们把角度限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间).

解: 设坐标轴转 θ 度. 点 $(2, 0)$ 在新系下的横标 x' 和纵标 y'

相等. 代入公式

$$2 = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad \dots\dots (1)$$

$$0 = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad \dots\dots (2)$$

$$\therefore x' = y' \quad (1)+(2) \quad 2 = 2x' \cos \theta \quad x' \cos \theta = 1 \quad \dots\dots (3)$$

$$(1)-(2) \quad 2 = -2x' \sin \theta \quad x' \sin \theta = -1 \quad \dots\dots (4)$$

$$\frac{(3)}{(4)} \quad \tan \theta = -1 \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

答: 坐标轴依顺时针方向转 45° , 可使点 $(2, 0)$ 在新系下的横标和纵标相等.

116. 求下列各题中两点间的距离:

解: (a) $(5, 2)$ 和 $(1, -1)$

$$\text{代入两点间的距离公式 } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

(b) $(-6, 3)$ 和 $(0, -5)$;

$$d = \sqrt{(-6-0)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

(c) $(0, 0)$ 和 $(-3, 4)$;

$$d = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(d) $(9, -7)$ 和 $(4, 5)$

$$d = \sqrt{(4-9)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

117. 已知三角形的顶点 $A(3, 2)$, $B(-1, -1)$ 和 $C(11, -6)$ 求三角形的周长.

$$\text{解: } \because AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(11+1)^2 + (-6+1)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$AC = \sqrt{(11-3)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$\therefore$ 三角形 ABC 的周长为: $5+13+8\sqrt{2} = 2(9+4\sqrt{2})$

118. 试证顶点为 $A(0, 0)$, $B(3, 1)$ 及 $C(1, 7)$ 的三角形是直角三角形.

$$\text{解: } \because AB = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$AC = \sqrt{(1-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

而 $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

1.19, 一点从点 $A(-3, -2)$ 作直线运动移至点 $B(4, 5)$, 求该点所经过的距离.

解: 该点所经过的距离即 AB 两点间的距离.

$$\therefore AB = \sqrt{(4+3)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}.$$

1.20, 证明点 $(7, 2)$ 和点 $(1, -6)$ 在以点 $(4, -2)$ 为圆心的圆周上. 并求这个圆的半径.

解: 设: $A(7, 2)$ $B(1, -6)$ $O(4, -2)$

$$\text{得: } AO = \sqrt{(4-7)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$BO = \sqrt{(4-1)^2 + (-2+6)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\therefore AO = BO = 5$$

$\therefore$ 点 $(7, 2)$ 和 $(1, -6)$ 是在以 $(4, -2)$ 为圆心, 5 为半径的圆上.

1.21, 在 x 轴上求与点 $A(5, 12)$ 的距离为 13 单位的点的坐标.

解: $\because$ 在 x 轴上的点纵坐标为 0.

设: 所求点 B 的坐标为 $(x, 0)$

$$\text{由题意: } |AB| = \sqrt{(5-x)^2 + (12-0)^2} = 13.$$

$$\text{即 } 25 - 10x + x^2 + 144 = 169$$

$$x^2 - 10x = 0$$

$$x(x-10) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 10$$

故所求点的坐标为 $(0, 0)$ 和 $(10, 0)$

1.22, 在第 I 象限角的平分线上求一点, 使它与点 $A(0, 2)$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 单位.

解: $\because$ 第 I 象限角平分线上的点, 横坐标和纵坐标相等

设：所求点B坐标为(b, b).

则依题可立方程： $\sqrt{(b-0)^2+(b-2)^2}=\sqrt{2}$

$$b^2+b^2-4b+4=2 \quad b^2-2b+1=0$$

$$b=1$$

∴所求点为(1, 1).

1.23 已知点M的横坐标为7单位，而到点N(-1, 5)的距离为10单位，求点M的纵坐标。

解：设：M点的坐标为(7, y)

$$\text{则：} \sqrt{(7+1)^2+(y-5)^2}=10$$

$$64+y^2-10y+25=100$$

$$y^2-10y-11=0$$

$$(y+1)(y-11)=0 \quad y_1=-1, \quad y_2=11$$

故所求点为M₁(7, -1), 和M₂(7, 11).

1.24 已知点M到两坐标轴和点(3, 6)都有相等的距离，求点M的坐标。

解：设M(x, y)

∴ M(x, y)到x轴的距离为|y|

M(x, y)到y轴的距离为|x|

$$\therefore \begin{cases} |y| = \sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2} \\ |x| = \sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y^2 = (x-3)^2+(y-6)^2 \\ x^2 = (x-3)^2+(y-6)^2 \end{cases}$$

$$\text{联立求得} \quad x_1=3, \quad x_2=15.$$

$$y_1=3, \quad y_2=15.$$

故所求的点为M₁(3, 3); M₂(15, 15)

1.25 求与已知三点A(2, 2), B(-5, 1), 和C(3, -5)等距离的点。

解：设Q(x, y)为所求的点。

$$\text{由题可得} \begin{cases} \sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2} = \sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2} \\ \sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2} \end{cases}$$

平联立方程得 $x=-1, y=-2$

即 $Q(-1, -2)$.

126. 试用坐标法证明, 任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半.

证: 设 $\triangle ABC$ 的三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$C(x_3, y_3)$

M 为 AB 的中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

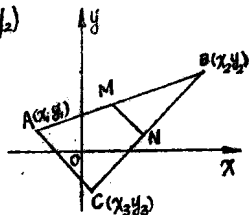
N 为 BC 的中点 $N(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{x_3-x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3-y_1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2}$$

而 $AC = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2}$

故 $MN = \frac{AC}{2}$. 其余同理可证.



127. 设点 $M_1(1, 1), M_2(2, 2), M_3(3, -1)$ 是平行四边形的三个顶点, 求第四个顶点.

证: 设: 所求点为 $M_4(x, y)$, 如图

1) 若 M_1M_3 为相对顶点, 则对角线
的中点 O 的坐标为:

$$\frac{1+3}{2}=2, \frac{1-1}{2}=0 \quad \text{即 } O(2, 0)$$

由平行四边形性质, O 点也必然

是 M_2M_4 的中点, 故 $M_4(x, y)$ 的坐标满足

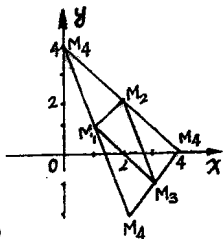
$$\frac{x+2}{2}=2 \quad \text{得 } x=2, \quad \frac{y+2}{2}=0, \quad y=-2 \quad \text{即 } M_4(2, -2)$$

2) 若 M_2M_3 为相对顶点, 可得 $M_4''(4, 0)$.

3) 若 M_3M_4 为相对顶点, 可得 $M_4'''(4, 0)$.

128. 设正方形相邻两顶点是 $A(2, 3)$ 和 $B(6, 6)$ 求其余顶点.

证: 设其余两顶点为 $C(x_1, y_1)$ 和 $D(x_2, y_2)$

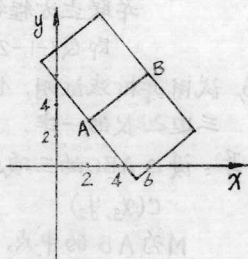


$$|AB| = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|BC| = \sqrt{(x_1-6)^2 + (y_1-6)^2}$$

$$|AD| = \sqrt{(x_2-2)^2 + (y_2-3)^2}$$

$$|CD| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$



由题意 $AB = BC = CD = DA$

$$\begin{cases} (x_1-6)^2 + (y_1-6)^2 = 25 \\ (x_2-2)^2 + (y_2-3)^2 = 25 \\ (x_1-2)^2 + (y_1-3)^2 = 50 \\ (x_2-6)^2 + (y_2-6)^2 = 50 \end{cases} \quad (\text{对角线长 } AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 5)$$

并联立方程得 $x_1 = 3$ 或 9 $x_2 = -1$ 或 5

$y_1 = 10$ 或 2 $y_2 = 7$ 或 -1

$\therefore$ 所求顶点为: $(3, 10)$, $(-1, 7)$ 或 $(9, 2)$, $(5, -1)$

129. 下列各对坐标表示一线段的两个端点, 试求它们的中点.

(a) $(7, 4)$, $(3, 2)$;

解: $\therefore$ 中点坐标 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

$\therefore$ 所求线段中点为 $x = \frac{7+3}{2} = 5$; $y = \frac{4+2}{2} = 3$

中点 $(5, 3)$.

(b) $(6, -4)$, $(2, 2)$;

解: 代入中点坐标公式;

$x = \frac{6+2}{2} = 4$, $y = \frac{-4+2}{2} = -1$ 所求中点 $(4, -1)$

(c) $(a, 1)$, $(1, a)$;

解: 代入中点坐标公式:

$x = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{1+a}{2}$ 所求中点 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$

(d) $(0, 0), (0, \frac{2}{3})$

解: 代入中点坐标公式: $x = \frac{0+0}{2} = 0, y = \frac{0+\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$
所求中点 $(0, \frac{1}{3})$.

(e) $(-3\frac{3}{8}, -7\frac{5}{8}), (2\frac{3}{4}, -4\frac{1}{2})$

解: 代入中点坐标公式:

$$x = \frac{-\frac{27}{8} + \frac{11}{4}}{2} = \frac{-5}{16} \quad \text{所求中点 } (-\frac{5}{16}, -\frac{97}{16})$$

$$y = \frac{-\frac{61}{8} - \frac{9}{2}}{2} = \frac{-97}{16}$$

130, 从点 $A(2, 3)$ 引一线段到点 $B(7, -2)$, 再延长同样的长度, 求延长线端点的坐标.

解: 设延长线端点为 $C(x, y)$ 则 B 为 AC 的中点

$$\text{则 } 7 = \frac{2+x}{2} \quad x = 14 - 2 = 12$$

$$-2 = \frac{3+y}{2} \quad y = -4 - 3 = -7$$

$\therefore$ 所求的 $C(12, -7)$

131, 已知两点 $A(5, 4)$ 和 $B(b, -9)$, 延长线段 $\overline{AB}$ 至点 C 使 $BC = \frac{1}{2}AB$. 求点 C 的坐标.

解: $\because \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1} = 2$, 设: $C(x, y)$ 则 B 点是分点, $\lambda = 2$.

$$\text{则 } b = \frac{5+2x}{1+2} \quad x = \frac{6b-5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$-9 = \frac{4+2y}{1+2} \quad y = \frac{(-9) \times 3 - 4}{2} = \frac{-31}{2} \quad \therefore \text{所求 } C(\frac{13}{2}, -\frac{31}{2})$$

132, 已知两点 $A(2, 3), B(3, 5)$. 求分线段 $\overline{AB}$ 得比值 $1:3$ 的点 M 的坐标.

解: 设: M 点 (x, y) $\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{1}{3} = \lambda$

$$\text{则 } x = \frac{2 + \frac{1}{3} \times 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{3 + \frac{1}{3} \times 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \quad \therefore M\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right)$$

133, 已知两点 $A(2, 1)$, $B(3, 9)$ 求 (a) 分线段 $\overline{AB}$ 得比值 4:1 的点 M 的坐标. (b) 分线段 $\overline{BA}$ 得比值 4:1 的点 M 的坐标

解: (a) $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{1} = 4 = \lambda$ 设: M 点坐标为 (x, y) .

$$\text{则 } x = \frac{2 + 4 \times 3}{1 + 4} = \frac{14}{5}$$

$$y = \frac{1 + 4 \times 9}{1 + 4} = \frac{37}{5}$$

$$\therefore M\left(\frac{14}{5}, \frac{37}{5}\right)$$

$$(b) \frac{BM}{MA} = \frac{4}{1} = 4 = \lambda$$

设: M 点坐标 (x, y)

$$\text{则 } x = \frac{3 + 4 \times 2}{1 + 4} = \frac{11}{5}$$

$$y = \frac{9 + 4 \times 1}{1 + 4} = \frac{13}{5}$$

$$\therefore M\left(\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

134, 下列各对坐标表示一线段的两个端点, 试求它们的两个三等分点. (a) $(-1, 2)$, $(-10, -1)$; (b) $(11, 6)$, $(2, 3)$.

解: (a) 设: $A(-1, 2)$, $B(-10, -1)$

第一个三等分点为 $C(x_1, y_1)$

第二个三等分点为 $D(x_2, y_2)$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-1 + \frac{1}{2}(-10)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{2}} = -4$$

$$\therefore C(-4, 1)$$

$$y_1 = \frac{2 + \frac{1}{2}(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$\text{又 } \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore x_2 = \frac{-1 + 2(-10)}{1 + 2} = \frac{-21}{3} = -7$$

$$\therefore D(-7, 0)$$

$$y_2 = \frac{2 + 2(-1)}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0$$

(b) 设 $A(11, 6)$, $B(2, 3)$ 第一个分点为 $C(x_1, y_1)$
第二个分点为 $D(x_2, y_2)$

$$\because \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{11 + \frac{1}{2} \times 2}{1 + \frac{1}{2}} =$$

$$y_1 = \frac{6 + \frac{1}{2} \times 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{3}{2}} = 5$$

$$\text{又} \because \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore x_2 = \frac{11 + 2 \times 2}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5$$

$$y_2 = \frac{6 + 2 \times 3}{1 + 2} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\therefore D(5, 4)$$

135. 点 $C(2, 3)$ 将线段 $\overline{AB}$ 分为 $1:2$, 如已知点 A 的坐标为 $(1, 2)$
求点 B 的坐标.

$$\text{解: } \because \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \quad \text{设: } B \text{ 的坐标为 } (x, y)$$

$$\text{则: } 2 = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}} \quad \text{求得 } x = (2 \times \frac{1}{2} - 1) \times 2 = 4$$

$$3 = \frac{2 + \frac{1}{2}y}{1 + \frac{1}{2}} \quad y = (3 \times \frac{3}{2} - 2) \times 2 = 5$$

$$\therefore B(4, 5)$$

136. 线段 $\overline{AB}$ 被点 $M_1(1, 2)$ 和 $M_2(3, 4)$ 分成相等的三部份, 求
点 A 和 B 的坐标.

$$\text{解: 设 } A(x, y), B(X, Y)$$

$$M_1 \text{ 为 } A, M_2 \text{ 的中点, } \therefore 1 = \frac{x+3}{2} \quad \text{即 } x = -1$$

$$2 = \frac{y+2}{2} \quad y = 0$$

$$M_2 \text{ 为 } M_1 \text{ 和 } B \text{ 的中点, } 3 = \frac{1+X}{2} \quad \text{即 } X = 5$$

$$4 = \frac{2+Y}{2} \quad Y = 6$$