

學 生 談 玄

B161
林大茅著

一九七九年四月二十日出版

新華書店
PDC

一 1939年

十月十日

整天在警報中，下午三時，始恢復秩序，國慶紀念亦在下午舉行。

數學發展限：研究定理定律之支配力，其法可由數史及心理發展中求之。

十月廿六日

恒等式在一定限度之下，才能自由發展，惟在 ∞ 的狀態之下，便失其支配力，故 ∞ 為其發展限。

十二月十一日

當一個數學概念的發展，到達某階段時，原有的意義或其支配力往往消失，或呈矛盾狀態，或改變原義，這階段稱為該概念的發展限。

二 1940年

二月八日

今早赴遵義，八時三十五分開車，沿途泥淖遍佈，行走甚難，這正是舊曆元旦氣象，沿途店舖，各皆關閉，至大市鎮時，只見三五零食小攤，婦孺整裝新屨，個個留着舊習慣的風味。貴陽以北，則為高山，冷風習習，路上凝冰，猶如散粉，禿山荒野，亦被飾裝，野樹電桿，一片白色，直至息烽以北，地勢始乃降低，三五草叢，始放綠葉，又見各處菜圃，青綠遍佈矣，下午三時許，抵遵義。

五月五日

上午九時許，假江公祠開章用先生追悼會，到場者有竺校長，胡剛復先生，蘇步青先生，陳建功先生，顧穀宜先生，郭秉蘇先生，繆鉞先生等。

十月十七日

滇緬路今天已開放。

十月廿九日

數史研究應分爲四類：一、轉變論：專研數學本身之自變問題，其最顯著者，則爲分化與興衰之原因。二、概念論：專研其發生次序，發生規律及原理。三、方法論：專研問題之證法及解法。四、認識論：專研環境與學術思想間之相關問題。

十一月十二日

數史研究之關於認識論者，有：

一、進真律，二、趨向抽象，三、趨向具體，四、形式增加，在第二否定中，認識之發展，恒依形式增加狀態進行。

關於轉變論者，有

一、絕對轉變；設解決甲問題爲解決乙問題之先決條件，則甲問題爲可能轉變方向，此種轉變，稱爲絕對轉變。二、機會轉變，三、欣賞轉變。

三 1941年

七月廿一日

"論幾何發展限"一文，今已寫畢，其文曰：
論幾何發展限。

在尚未討論之先，先把 ∞ 的意義作一澈底研究。 ∞ 的發生

，係由於生活的需要，因為人類對於權利義務的分配，和除法自發生後，隨着需要的增加而不斷的作形式增加，至其發展限為止，即其分母為 0，其發見之難，猶若 0 的發見，其原因則由於不易被人注意，所以直至數式發達，使除法引用於初等代數裡面，其性質才被發見，但這裡所謂形式增加者，便是其內容的構造不變，僅在形式上作數量增加罷了。

由是 ∞ 的意義，便沿着極限意義遞進，逐漸揚棄了靜的意義，而以動的意義取代之，這時候由靜的分母而易以動的分母，這就是說：“把分母變為無限小時，則其商成無限大，而除法的意義仍然存在”。由是分母與商具為動的意義，這意義即從 ∞ 的發展限而來。

這裡所須注意的，便是 $\frac{1}{0}$ 是靜的意義， ∞ 是動的意義，故 ∞ 的意義雖受 0 的刺激而產生，但我們不能否認除法意義到此而破產。

上面已把 ∞ 交代明白，因而返到幾何學去，若把直線與錐線之關係來分類，但得相交，相切和不相交三種，設有錐線：

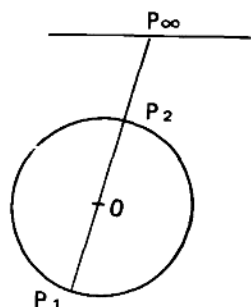
$\sum a_{ik} X_i X_k = 0$ 與直線 $X_i = y_i + \lambda z_i (i=1,2,3)$ 相交，則得入 $\lambda^2 R + 2\lambda Q + P = 0$ 的形式，由是若 $Q^2 - PR < 0$ ，則其交點為二虛點，而此二虛點不能存在於實數中，亦即不能存在於實數所表示之唯一的直線及唯一的錐線裡面，而人仍謂其有二交點而抹殺其原義者何哉？即因需要增加故也，這種需要實由方程式而來，當其滲透于幾何時候，便與事實發生矛盾，人類便揚棄了舊假設，另創新假設以適應之，故此矛盾並非消滅而係觀念改變故也，許多人士，不知發展限的性質，而謂數學有任意性，而不知其任意性不是散漫絕對的意義，總之，交點意義的發生，由於吾人之有交點的經驗，而其意義的擴充亦係由方程式遞進的結果，由是實數作圖的經驗逐被否定而更立新假設以適應之。

數學假設之使用亦有限度，如 $(0, 0, 0)$ 之在射影座

標系中，無論實數體，或複數體均為不可假設的，此種不可假設性亦係來自經驗的。

茲討論關於射影錐線中心的意義，是以 ℓ^∞ 為極線，而以極點為中心的，我們知道此觀念由複比出發，更與共軛關係配合而成，其中有問題者，即 ℓ^∞ 是複比的發展限是，今設 O 為中心， P_1 及 P_2 為其交點， P_∞ 是 ℓ^∞ 與 $\overline{P_1 O P_2}$ 之交點，若分析此觀念，使得下列可議之點：

(a) P_∞ 的意義，已如上述，除法在分母為 0 時，是沒有意義的，惟分母以 0 為極限才有意義，因此，比或複比的意義將遭同一命運了，又 ∞ 的意義不可從靜的方面去認識，而僅可從動的方面去解釋，那麼，所謂 P_∞ 也者，實在無窮遠之處依一動點以無窮速之速度所作永動線的意義，從而否定了靜止的固定的了。



(b) 茲論 ℓ^∞ 的形式，其形式可由直線的意義求之，凡平面上二定點可決定一條直線，今在線上各點，應皆為 P_∞ ，由是知此線上各點皆為永動的。從永動點構成永動線，更從永動線構成永動面，足知 ℓ^∞ 之靜止觀念不能成立，苟謂吾言之非是，則請諸君詳察 ℓ^∞ 之意義，即當 $t=0$ 時，在 $a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + 1 = 0$ 之間，無論 a, b 之值如何？皆得稱為 ℓ^∞ ，是則在平面裡有無限個永動線，從而構成永動面，因此，否定了 ℓ^∞ 之固定思想。又從該平面上任一點 O 與 ℓ^∞ 上任一點之聯線之距離皆為 ∞ ，而 ∞ 之意義，則有： $\infty + \infty \rightarrow \infty$ ， $\infty + a \rightarrow \infty$ ，及 $a \infty \rightarrow \infty$ ，故若不用永動面之意義，則不足以表現其性能，反之，若用永動面之意義，則上述諸困難，便可迎刃而解。

(c)從複比意義，可得： $(P_1 P_2, OP_\infty) = -1$ ，亦即 $\frac{P_1 P_\infty}{P_2 P_\infty} \rightarrow -1$ ，苟 P_∞ 一定，即在永動界裡， $P_1 P_\infty$ 及 $P_2 P_\infty$ 僅許存在於永動線的一剎，那麼， $P_1 P_\infty \rightarrow P_2 P_\infty$ 則比之值才為可能。

(d)此外，更應補述的， ∞ 是跳動的點，不僅為一個點或一個點集，又因兩點可決定一線，故兩個跳動點可得無限個直線，即跳動直線，因而組成一個平面集合，即明 ∞ 的本意了。

一九四一年畢於遵義

九月十六日

今天把 " 生命假設 " 修改完畢，其文曰：生命假設
生命假設

現在提到生命的問題，古今來許多學者都已弄得頭痛腦暈，什麼唯心論唯物論，神學家，玄學家等等，大家都是盲人捫象似的，各各據着己見，你攻我，我攻你，立說紛紛不同，實則生命的來源怎樣，有什麼事實做證據，恐怕大家都要瞠目莫對，這也共同的錯誤，也是久懸未決而致爭鬧的根源！

要明白這個根源，談起來並不容易，無論那一派的學說，都是汗牛充棟的那麼多，如佛學一書，有八千餘卷之多，更如中西哲學，也是不可勝計的數量，由是要澈底研究各派哲學，並非一人一生之力所能盡，那麼，以淺陋如我的眼光，那裡談得到呢？姑且根據已往的經驗，認定問題的核心，嚴加批評，以求收到一針見血的功效。

一一般的假設

吾人要知道所有思想學說之得被相信，必須有被人信任之經驗與知識存在，否則必被揚棄，二元論之得被信任，當非例外。

茲言吾人一切感覺，沒有一樣不是由神經的刺激生出來的

，只要神經所受的刺激一樣，我們所得的感覺也極其相同，但這個大前提有時不會成爲事實，如觀看同樣的東西，往往把它看錯，或竟不生視覺；受同一的壓力熱度光度，以及其他等等的刺激，往往有不同或竟不會生感覺，其原因乃受其他障礙所致，而與大前提無關，神經的構造很複雜，視神經受了刺激，就看見有東西，嗅神經受了刺激，就聞見有臭味，這是大家都知道的，如果一個人害了神經病，程度深的，我們自然知道他是瘋癲，程度淺的，也和常人一樣，這樣的人，他的神經很不規則，有時沒有外界的事物來刺激他，他因受自己內部器官的刺激，也會生感覺，這時候，旁人看不見的東西，他也看得見，旁人聽不見的聲音，他也聽得着，無論旁人怎樣的解說，他既然是耳聞目見，那裡還肯相信呢？這種實例多得很，譬如奄奄待斃的人，神經很不規則，最易見鬼見神的鬧；又如從前科舉時代的秀才先生們，關在攸柵裡面，深更半夜，冷清清的在那裡趕文章，又急又怕，神經受了這個刺激，內分泌引起過度作用，要不是身體強壯，一定支持不住，便有冤鬼索命的笑話。

除了上述心理變態之外，更有許多人身體精神都很健全，却還是迷信，在幸運上，同爲努力不斷的學者，同時同樣的抵抗環境，往往有的成功，有的失敗！同爲亡命的兵卒，有的死於戰役，寂然無聞，有的擢爲大將，功蓋寰宇！同是經商，有的積財巨萬，有的傾家蕩產！似此種種事件，自非筆墨所能盡，而行事上有幸有不幸的事實，則非一般哲學家科學家們所能否認的，但普通人因不明機率適遇之理，而又惑于鬼神果報之說，同時自私觀念太重，因此，滲進于生活中，從而構成種種的迷信，例如花會求神，習俗之忌諱，豈真有好事的鬼神，于中作弄，不過人類自求神經衰弱罷了。

此外，對於自然環境的懷疑，往往使人類陷于二元學說之中，其中最大的錯誤，即一無根據的承認萬物有始終，二無理

由的承認無神不能管理自然，試問萬物有始終的嗎？但已有人證明了地球是多小年齡，並已證明在天體中尚有未凝成球體的星雲，這似乎萬物的始終問題是有意義的，但萬物的定義並不可僅止于此，應當放大眼界，認識萬物，要把所有構成物質的元素，以及構成元素的原料，都應包括無遺，所以萬物的始終問題，是全萬物的問題；也就是物質元素，電子原子質子等問題，今也電子質子之構成元素，與元素之構成萬物而萬物又可以還元，不但古代如是，即今世與將來亦何嘗不然，而其中深值吾人稱道的，便是萬物之排列構造的形式有迥異了，所以萬物的始終問題，不是純史問題，而是常識的，所以沒有意義。

即有神創造萬物，亦不外把自然界上現有的質子電子或構成它們的原料，加以配合而已，好像一個工廠，只能把生貨變為熟貨，對於物質本身的創造，絲毫沒有把握的，這便證明了萬物的本身不是有始有終的，但是還有神能做到的，人能否做到？或是更好的？還成疑問。

人類迷信二元論的原因，還有因永生慾而起的，人類要得到永久滿足的快樂，同時又因死是人人所不能免的，往往不願因死的緣故而使快樂消滅，同時更因他故，強認死後仍有生的快樂，或更佳的報酬與此相似的原因，如環境危急時候，求生的希望極強，如航行遇風，水波澎湃之際，失去駕駛的能力，由于求生慾之發生，極易失去理知的判斷，遂疑為風神作怪，遂乃禱告風神，以求平風息浪，但事實上若求而不靈，則迷信家又曲為解釋，以為係他們瀆犯風神，或自己作孽所致，又若求而有靈，則編為鬼典，一代一代的傳下去，又如疾病求神，也是同樣的道理，又迷信鬼神的情形，也因地而異，如濱海之人，多信海神，山居之人，多信山神，及降伏猛獸的神，農人則有保護五穀之神。

除了上述之外，更有因承認對象的存在，承認鬼神與自己

能够發生關係的，或因要發現人鬼間的某種關係，好設法趨吉避凶，這完全是妄自執着，猶如春蠶，作繭自縛，致不能覺悟，雖然科學的事實常常發見，但他們總是下愚不移，以爲若沒有意匠預先安排，這種事實怎能成爲這樣的有規則而不紊亂呢？誠如其人言，道高一尺，魔高一丈的！

茲舉 G F More 所著宗教的產生及長成，以說明迷信產生的原因。先從死說起，一個人昨天還精神十足，今天却冷冰冰的卧在地上，話也不說了，肢體也不能動了，一目瞭然，必定比昨天少了一件什麼東西了，必定是一個什麼東西——那個什麼東西正是使他活着的東西——從他身上出去了，這是他的性命撒下他走了，而且難道人不是有時可以實實在在的看見或聽見，那件什麼東西和死人最末了的一口氣或外傷傷口流不住的血一同出去了嗎？往往單從靈魂的命名，就可以看出靈魂的念頭，的確是這樣起的，因爲在許多相差相似的語言裡，靈魂和氣息同是一個字；又普通人相信靈魂就是血或血的居留所，從這一點可以看出靈魂概念的起源，的確如上所說。

至于靈魂究竟是什麼的一種東西？人大半從他所作的夢看出來的，人在夢中能看見旁的活人，或和他的知心知意的談天，或是大吵大鬧，等到醒來，方知這些人實在離開他很遠，但他們何故能看見他們的面呢？這必是當他熟睡的時候，他的靈魂曾暫時離開他的身體，剎那之間，把自己移到遠方，暈倒或他種暈迷不省，也被認爲與夢相同，也是靈魂暫時不附體所致。

總之，此派學說，除承認物質存在外，更相信心的存在，故其原因，便在生活經驗之中，遇到不能解釋的事物，以爲必有一種超乎經驗的原因存在，從而發展而成心的概念，此後他們便永遠寄生于這個弱點中。

除了上述之外，更有否定物的存在，而單獨承認心的存在

，此即所謂大地山河，唯心所造，或萬物皆我之幻覺，這便叫唯心論，在生活裡面，精神之存在，從主觀言，是絕對的，在客觀上，可由經驗去認識，更在心理學實驗中亦獲到大批的證件，姑不討論，但其否認物之存在之原因，係由我們認識力之不斷推進，揚棄了所有過去對象的認識，因認所有對象，皆心之所造，非真實，以至否認其存在，但事有不盡然，設把幾束神經纖維切斷了，而身體的其他部份與世界的其他部份，依然如故，這個變化是很小的，但知覺却全部消滅了，且我們所能感覺到的，不過是物質的一部份，而不是全體，而我們始終不能把握的還有很多，我們不能因其不能感覺到，便斷定其不是存在，譬如我們在空氣裡，固然不能直接覺得有空氣，但不能說沒有空氣，魚亦不覺得有水，但也不能因其不能感覺到，而說其不存在。

科學之發達，認識力之進步，從而把主觀唯心論一變而為客觀的，其顯著的特徵，便認宇宙裡含有一種極微妙的不可分的無廣袤性的精神單子，它是構成宇宙的根源，它充塞乎全宇宙之間，因其本屬於精神的，所以能够產生感覺，我們人類係由這種單子所成，所以具有感覺的能力，從而構成了感覺世界，由是現象界的事物，完全因感覺世界的存在而存在，假設感覺一旦全歸消滅了，則一切宇宙的現象，從何而認識呢？所以沒有感覺，便沒有現象，所以由感覺組成的世界，仍為感覺世界，不是現象世界，由此看來，這種假設是和以質能集合解釋一切顯然相同，一而二，二而一的，不妨把他們併合起來。

與此相反的，則為唯物論，其理論係根據生理學、心理學研究所得的結論而來，用此理論，對於礦物有無感覺的問題，還可用進化論原理來辯護，礦物不能作感覺實驗來證明。人類的感覺是由脊椎動物進化的，脊椎動物的感覺，是由下級動物進化的，下級動物的感覺，是由單細胞動物進化的，單細胞動物是有機物，礦物是無機物，那麼，礦物的感覺自然更低，極

近于 0，且以 0 爲極限，那麼，礦物有感覺的證明，自非人力所可及了。但于人類之行爲，如內分泌器官之與情感關係，身體能力與個性說明物質與精神有相互關係，惟其中情狀，如物質如何蛻變爲精神，尚屬神祕而含糊了。

三以數理爲基礎的假設

在物質世界裡，常常有許多能力存在，如光能，熱能，動能，電能……等等，這是大家都知道的，但若能製造一種適當機械，無疑的可把某一種能轉變爲另一種能，茲以 A 爲某一種能，B 爲適當機械，C 爲轉變後之能，則可得： $A \xrightarrow{B} C$

這是就物理而言，但若把它變爲生理組織則產生知覺與感覺了，不妨稱之爲覺能，但覺能之在自然界裡面，是否和物理能化學能相等，換言之，即物理能化學能是否可以變爲覺能，而覺能是否可以變爲物理能或化學能？

試舉例來說，用電刺激神經系統，往往產生種種感覺，這便是電能經過神經組織，變而爲覺能，人類受了痛飢怒懼的心理刺激，往往產生內分泌作用，刺激器官使發生強烈情緒及強烈能力，這便是從某種覺能產生更强的另一覺能和更強烈的物理能（體力），又如人類受了失敗的刺激，能够使體內未分解的蛋白質等體質也起分解作用，產生了嚴重精神活動，這便是覺能轉變爲另一種覺能及化學能。又如運動時，由于肌肉伸縮，使體質氧化分解而爲器官的運動，這便是動能變爲化學能，更變而爲動能。

由此知物理化學的能可以變爲覺能，反之，覺能也可以變爲另一覺能以及各種物理化學能，這不過是其理論的開端，將來科學進步，便見覺能和物理化學的能一樣的。

又覺能的種類很多，其產生不是單獨的，而是由許多覺能結伴而來的，所以它們可表一個集合，當該集合穩定時，則構

成一個複合形，覺能的複合形比較穩定，比較不易死亡，但若個體死亡，組織敗壞，其複合形也跟着解體，而覺能也就消滅了，但如關公顯聖，耶穌再生，冤鬼索命的神話，傳說紛紛，疑信不定，但從複合形的理論來說，這些可能是極穩固的複合形，不克立即消滅，而又暫存于世！

返觀近代科學家用配種方法，創造新生物，化學家製造新藥，其新分子也不能分解，這可推見古英雄之精神不朽之理，也非不可能。

附註：關於唯心論，唯物，二元論已在拙作"神話"中用集合論方法討論過了，其中係用集合論方法證其全同。

1935年畢于福州

1941年九月十六日整理于遵義

1978年12月註于星洲

九月十八日

晨八時乘汽車至湄潭，沿途山嶺重疊，風景甚佳。

九月十九日

天雨，本日為湄潭墟市，因城小民稀，每逢陰曆三，六，九之日，鄉民爭挑物入城，聚而成市，午時開始，酉時則散。

九月二十日

本日日蝕，因陰雨，不得觀佳景。

十月八日

湄潭城外有沙洲，四圍皆湄水，每晚有數千鴉鵲，群集其間，飛舞若波浪，洵奇觀也。

十二月二十日

今晚把數學符號史之研究寫畢，其文曰：

數學符號史之研究

(一)

數學乃表現的工具，其前身便是語言，最初計數，沒有數碼，迨有數碼，數的意義始得抽象出來及至亞里斯多德主以文字表數，以廣數的應用，實開抽象認識之端，而 *Vieta* 以大寫主音字母表未知數，又以僕音字母表已知數，笛卡兒更以十一符號表數之正負，此皆符號愈進步而認識抽象之證也。

與認識之趨進抽象同時存在者，則為方法之趨向具體，吾國文字之構造，文法之組織，雖亦有一定之法，但不若泰西之便，此即言在方法上較未具體也，這裡所謂具體者，即以少量之符號，依一定組織法，而使有獲更泛之應用也，數碼之表現，在量上雖是形式增加，但仍不能滿足高級之需要，亦即不適合理論之要求，故文字表數，以至用文字的種類各表性質不同之數，而其概念乃得具體表現焉。

數字符號既因需要而產生，亦必因不適而揚棄，故數字符號又有趨向便利之勢，茲舉例言之：

Dollar Mark: Floran Cajori 曾考察西班牙人商業記載之資料，因證 \$ 符號之由來，至為真確，蓋符號應用之不便，而使 *Peso* 改變，其改變之最早形式，有 *Pes*, *Ps*, *Pe*, P 四種，此雖為形式增加，而足證符號發展之勢，實有趨向便利者，後來因

Peso, *piastre*, *piece of eight* 三者之複音，由是因舒寫便利之故，故須用 *P*，而 *Ps* 乃被採用，又因舒寫便利之勢， P 之曲下而左，並由上而右，同時 P 變為曲綫形，乃複合而成今式，惟 *Cajori* 則謂 *Ps* 之變為 \$，係由英語之侵入，但其中趨向便利原則仍存在也。

(二)

人類在形體關係之中，抽象而得者，有 $\square$ 及 $\triangle$ 之幾何符號，後來在數學中亦發見此種性質，苟抓此性質而研究之，乃自

成一系，由 $\triangle$ 及 $\square$ 向多角形數演進而得： $\square$ 表奇方，而 $\square$ 表偶方，及 $\square$ 表矩形，由此更演進，便有： $\square$ ， $\square$ ， $\square$ 及 $\triangle_r$ ，可見其日趨複雜。

(三)

(a) 三角學符號

求三角數：1, 3, 6, 10, ……諸數之和，便有：
 $1+3+6+10+\dots=\int x$ 的符號，初視之，不覺其奇妙，細思之，則見每數皆具三角形之性質，以大大小小的三角形尚未使其意識到達高峰，惟在 $1+4+10+20+\dots=\iint x$ 中，雙 $\int$ 符號，不過係加法意義的形式增加，推之， $1+5+15+25+\dots=\int^3 x$ ……，以至 n 次，則其形式增加之發展，已到達其最高峰了。

(b) 與上述符號形同而義異者，則有 De la Caille 氏，氏以 $\int$ 表任何諸數之和， $\int^2$ 表諸數平方之和，以至 $\int^n$ ，此亦具有符號形式增加之意。

(c) n 次方自然數之和之符號為：

$\phi(z) = 1^n + 2^n + \dots + z^n$ 其中 z 表自然數。

但亦有以 $\int_n = 1^n + 2^n + \dots + (P-1)^n$ 表出者。

又有 $\phi_k(n)$ 表大于及小于 z 之諸質因數之和，此實較以前為佳，因

$\phi_k(n)$ 可知其中各項均為 k 次方，而 $\phi(z)$ 中各項之次方尚欠明晰，此外，用 S_{ji} 表于 $1, 2, \dots, j$ 中選取 j 個不同數相乘之積各項之和，其意義不單純，而在符號上 j, i 雙用，其明晰性愈增。

總之，符號之發展，在認識上日趨抽象而在方法上則又趨向具體。

1941年十二月廿日畢于湄潭

四 1942年

一月二日

浙大在湄潭舉行耕牛比賽。

一月六日

今早又降雪，至午始止。

一月七日

遺失物件，旋又獲得。

一月九日

茲由總校寄來四年級學歷證書。

一月十二日

收到校本部制服津貼費六十元。

二月三日

據傳星加坡已淪陷多日，六萬英軍投降。

二月十二日

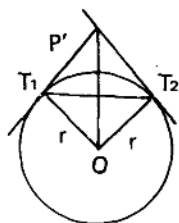
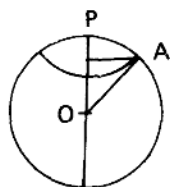
論幾何概念之揚棄與抽象一文，已寫畢，其文曰：

論幾何概念之揚棄與抽象

俗人侈談進化，究進化果屬何義？尚無確論，以致無所望從，在幾何中，就所知者，即：(1)在量上作形式增加，(2)在質上作抽象演進，(3)在方法上日趨具體與簡便。

茲舉配極為例，說明其進化之情景，考乎極之得名，當由地球之南北極而來，在初等球研究之中，可得極之定義為“與球上截圓垂直的直徑之兩端”，此即與南北極之意義相同，而後者實較前者具體化，蓋前者純係生活上之經驗，而後者則為經驗之具體化，此即較為進化之說明，從符號發生言，也許後

者序先于前者，而就認識言，前者却先于後者。



質言之，上述極之要義，僅爲直徑之兩端而已，後來由于圓之性質研究成立，遂揚棄其中粗糙的感覺成分，而抽象化了，此時極之意義變爲：

在直徑上二點 P 及 P' O 爲圓心， r 爲半徑，若 $OP \cdot OP' = r^2$ ，則 P 對 P' 稱爲極。

極之意義既明，可知 $OP \cdot OP' = r^2$ 實由球的關係 $OP = OP' = r$ 而來，其次因 P, P' 在其直徑上，因抓住了這兩點，而揚棄了 P, P' 之在球面上的意義，遂成第一否定，然在認識上尚未成熟，等到在圓的關係裡，由兩直角三角形 $\triangle PT_1O$ 及 $\triangle PT_2O$ 得 $OP \cdot OP' = r^2$ ，那麼，第二否定才告成功。

次言切線的揚棄與抽象，吾人在生活經驗中能够抓住此種事件的機會甚多，例如板上之輪，輪爲圓形，可由許多略圓之形抽象而出幾何的圓。板圓非直線，但在認識裡可揚棄其非線部分而爲線，輪與板上之接觸部份，漸漸看作點，直線切圓于一點之概念，可從茲而得的，然此僅係形式之經驗而已，若把切點看作二交點之重合，那麼，在認識上切線可視爲割線了，這便漸漸脫離形式了，惟足值吾人注意的，即認識的發展到達此階段之時，亦即切線公式成功之期，但重點尚在固定的形態而仍沒有移動的認識，故其經驗成熟時候，即視二交點間距離極近于所求的極限點，但此僅限于二次曲線之內，設擴充之至二次以上曲線時候，不能不另立定義以適應之，這就全靠幾何的揚棄與抽象的作用了。

此外，尚須注意者，即球與圓上 $OP \cdot OP' = r^2$ 之性質，不

是同源關係，換言之，即不必拘泥二者發生次序孰先孰後，但在圓之性質中，實無含有極的意義，故僅為機會轉變。

在二次曲線研究之中，直徑已不復普遍存在，因而構成第一否定，但就圓周言， P 之對應點 P' ，既在二切點之聯線上，所以 P' 之決定，更須 PP' ， PP' 即直徑的變形，以此二線為基礎，更加 $\overline{PQ}$ ，那麼， $\overline{PP'}$ ， $\overline{PQ}$ ， t ， t' 四線共軛，遂使第二否定完成。

惟高次代數曲線因有弱性發展限之故，不得不揚棄此路徑，以較抽象之代數方法表圖形的軌跡，其法本為形式增加，至此遂為重要的創造規程，設高次曲線式為：

$$f(x)=0, \quad (A)$$

二定點 (x) ， (y) 之聯線為：

$$Z_i = \lambda X_i + \mu Y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

代入(A)中得：

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda\mu f(xy) + \mu^2 f(y) = 0 \quad (B)$$

又 (z) 之共軛點 (z') 必為：

$$z_i = \lambda X_i - \mu Y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

又 $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ 及 $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ 為(B)之根，故

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0, \quad \therefore f(xy) = 0 \quad (C)$$

此即極線與極之關係了。

總之，配極概念之演進，始由常識，而球，而圓，再則由圖形而形式，處處揚棄與抽象，就認識來說，實遵守趨向抽象規則，惟就概念演進言，雖以極為心，而其中心則被揚棄，最初係以球徑之兩端，繼則以圓內 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ ， PP' 二點對應，再則為 P 與二切點之聯線，再變則為 $f(xy) = 0$ 及 $\Delta_{xy} = 0$ 故本系統可稱為配極遞進系統。

一九四二年二月十二日畢于湄潭