海天学校内部资料

2007

系列之一

历年真题解析

理工数学一
理工数学二

<专为参加2007年研究生入学考试学子精心准备>

海天学校教研中心编写

答谢学子信赖，分享海天关爱

——致参加2007年研究生入学考试的考生们

亲爱的同学们、朋友们：

海天学校教研组的各位身经百战的教授学者，为回报广大学子一直以来对海天学校的关爱，经过多年悉心研究，现为参加2007年研究生入学考试的学子们倾情奉献“海天学校内部资料辅导书系”，该书系浓缩名师知识精华，直击命题重点与难点，对试题分析独具匠心，对命题规律精准把握，命题方向精准预测，希望能对考生的复习起到抛砖引玉的作用。

《海天学校内部资料辅导系列之一：历年试题分析》从分析考试试题的特点入手，从宏观上论述和总结历年考研复习备考的方向、重点与方法，每套真题后都配有专家分析与解题思路，以提高复习备考的逻辑性、针对性与有效性。建议同学在做此书时，为自己的成绩打分，及时评估自己的水平，如英语、政治50分以下的同学建议对此科进行强势出击、重点复习或报辅导班为佳。

我们海天学校还将继续推出考研辅导系列之二、之三、之四等经典书系、配套教材，为同学量身制作的班型设置及一系列的优惠举措，愿为广大考生的金榜题名贡献海天学校的一份力量！

海天学校

2005．11

海天考研　全国共享

☞海天学校北京总部：
地址：海淀区中关村南大街2号数码大厦B座15层1502C室
电话：010－82512829　82512830
学员投诉专线：62148885

☞牡丹江：
地址：牡丹江师范学院主楼1楼右侧30米海天报名处
电话：0453－6511205

☞四平：
地址：四平市吉林师范大学第六教学楼2楼6203室
电话：0434－3295982

☞吉林：
吉林市北华大学新校区电教中心309室旁
电话：13514446563

☞长春：
地址：吉林大学南岭校区继续教育学院招待所510室
电话：0431－5605980

☞沈阳：
地址：沈阳药科大学招待所一层122室
电话：024－23882918　23984115

☞大连：
地址：大连理工大学山上礼堂一层办公室
电话：0411－84707220

☞抚顺：
地址：辽宁石油化工大学邮政所报刊亭（校门口西侧）
电话：0413－6864547

☞鞍山：
地址：鞍山市千山路155号环境科技培训中心218室
电话：0412－8116202

☞锦州：
地址：辽宁工学院成人教育学院培训部（辽工北校区）
电话：0416－4199134

☞天津：
地址：天津和平区卫津路财富大厦B座507室
电话：022－27826532　27827475

☞呼市：
地址：内蒙古大学文体馆3楼301（乙）室
电话：0471－6819542

☞石家庄：
地址：河北师范大学东校区（北院）师资楼100室
电话：0311－86693678　86684195

☞太原：
地址：太原市山西大学旧校门对面龙珠大厦510室
电话：0351－5617728

☞大同：
地址：雁北师范学院学仕书店
电话：0352－7158214

☞保定：
地址：金融专科学校综合教学楼702室
电话：0312－5091415

☞唐山：
地址：卫国路理工东门南行20米胡同内海天报名处
电话：0315－2664455

☞秦皇岛：
地址：河北大街西段浪淘沙宾馆一楼106房间
电话：0335－8076336

☞邯郸：
地址：邯滏西南大街与学院北路路口南行100米路西同文考试培训学校
电话：0310－6058997

☞青岛：
地址：海洋大学新校区（大学生读书俱乐部）
电话：0532－85079793

☞烟台：
地址：山东工商学院打印社
电话：0535－6904985

☞合肥：
地址：安大校内招待所正门右侧海天办公室
电话：0551－5108529

☞蚌埠：
地址：安财大学生勤工互助中心（3号欧式楼3层）
电话：0552－3122347

☞淮南：
地址：考试书店1部（陈洞路教育学院北侧）
电话：0554－6666727

☞芜湖：
地址：盛华考试书店黄山西路安师大门面房6#
电话：0553－3831795

☞马鞍山：
地址：马鞍山市安徽工业大学研究生部
电话：0555－2400612

☞郑州：
地址：文化路87号文化大厦402室
电话：0371－65159178　63347818

☞湘潭：
地址：湘潭大学金瀚林学生公寓16栋雄风书店
电话：0732－5189051　13873204586

☞衡阳：
地址：衡阳市南华北校区服务总公司学生服务区玉屋书斋
电话：13575124017

☞贵阳：
地址：贵阳医学院后门左侧
电话：0851－6788561

☞广州：
地址：环市东路465号206室（工程技术职业学院主楼）
电话：020－33794608

包头、临汾、洛阳、开封、株州、温州、宁波、湛江等请上网查询或电话咨询。
网址：www. bjhaitian. com
E－mail：kaoyan@ bjhaitian. com

英语篇

石春祯：纵横捭阖，点石成金的一代宗师。北京大学英语系教授、北京大学考试中心主任兼主考、《大学英语》杂志编委。多年来一直从事考研英语辅导教学，经验丰富，在英译汉、短文写作及英语词汇辨析等方面的教学都有独到之处，授课内容丰富、信息含量高，受到广大考生的热烈欢迎。其主编的《精编英语阅读理解220篇》已被公认为考研英语必备参考书，对提高广大考生的考试成绩做出了巨大贡献。（独家授课）

吴红云：连续三年命中作文原题，全国"写作"第一人。北外英语语言学博士，中国人民大学外语学院教授，《中国英语教学》杂志编审，京城资深"考研英语写作"辅导专家。自92年以来，在全国十几个大城市主讲考研英语写作，其倡导的"宏观理念与微观策略并重"、"语言能力与适应技能并重"的教学理念，使学子终身受益。主编、主审、参加编写有关应试辅导方面的书籍有：《英语写作范文》和《在职人员研究生学位英语入学考试指南》等。（独家授课）

数学篇

王世卓：十八年考研辅导历程，桃李满天下，彰显海天学校数学团队领袖风范，素有"高数第一人"的美誉。北京海天学校考研数学团队领袖，全国著名考研数学辅导专家，在全国20多个城市授课声名卓著，王世卓教授所讲授的数学考研班是全国人数最多的班之一，每年辅导的人数都已逾数万人，他对考题的重点与考生的弱点了然于胸，其辅导效果让考生受益无穷。（独家授课）

李秀淳：原国家考研数学命题组核心成员，国家考研数学阅卷组成员。发布权威信息，讲述深度内容。清华大学数学科学系教授，曾任清华大学应用数学系副主任，微积分课程负责人，长年从事考研辅导工作，有丰富的考研辅导经验。效果突出，成绩显著，及格率高达92%，因而一举成为考研数学考生心中的最强有力的依靠。（独家授课）

何坚勇：研究学问，游刃有余；辅导效果，超乎想象。清华大学数学科学系教授。从事线性代数研究二十余年，致力于研究生考试阅卷和试题的分析工作。在去年的考研数学辅导中，命中率效果突出，经其辅导的学生对其辅导效果赞不绝口，成为最具影响力的考研辅导专家之一。

陈 魁：快乐教学，使万千学子享受考研数学之趣。清华大学数学科学系教授。参加考研辅导已十多年，其授课条理性强，重点、难点讲解深入透彻。枯燥、繁琐的数学辅导在其口中完全成为一种享受、一种乐趣。其所提倡的"快乐数学学习法"近几年在广大考生中广为流传，深得广大考生好评。

刘庆华：博学多才，诲人不倦。清华大学数学科学系教授，清华大学考研辅导班数学主讲教师，考研辅导的实力名家，在全国十多家城市考研辅导班主讲高数，对考研辅导有丰富的经验。其授课思路清晰，深入浅出，深受学员欢迎。（独家授课）

陈仲贤：激情洋溢，创造考研奇迹。清华大学数学科学系教授，著名概率统计学专家，长期从事命题研究、题库研制工作，谙熟考研数学命题规律，善于引导学员，其授课现场热情激扬，考研奇迹层出不穷，2006年定会给广大考生带来福音。（独家授课）

李 勇：黄金思维模式与10种解题对策体系创始人，将孙子兵法之道融入数学教学之道第一人。著名大学数学方法论学科带头人，资深考研辅导专家，致力于数学思维科学与后数学研究。根据数学命题中错题、错解、条件不足、条件过剩及分数陷阱等五大类问题创建"对策准备"体系，已成为考生心中强有力的依靠。出版专著《线性代数知识储备与解题方略》等。

目　　录

2005年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________.

(2) 微分方程 $xy' + 2y = x\ln x$ 满足 $y(1) = -\dfrac{1}{9}$ 的解为________.

(3) 设函数 $u(x,y,z) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)} =$ ________.

(4) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域,$\sum$ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\boldsymbol{A}| = 1$,那么 $|\boldsymbol{B}| =$ ________.

(6) 从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\} =$ ________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.　　【　】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M \Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　　【　】

(9) 设函数 $u(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.　　【　】

(10) 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$,根据隐函数存在定理,存在点(0,1,1)的一个邻域,在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.　　【　】

(11) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$.　(B) $\lambda_2\neq 0$.　(C) $\lambda_1=0$.　(D) $\lambda_2=0$.　　【　】

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $\boldsymbol{B}^*$.　(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $-\boldsymbol{B}^*$.　(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

【　】

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则

(A) $a=0.2,b=0.3$.　(B) $a=0.4,b=0.1$.

(C) $a=0.3,b=0.2$.　(D) $a=0.1,b=0.4$.　　【　】

(14) 设 $X_2,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,S^2 为样本方差,则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$.　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.　　【　】

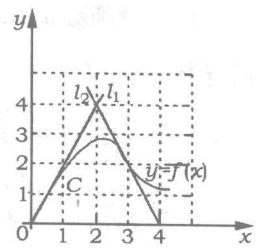
三、解答题(本题共9小题,满分94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分11分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数,计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分12分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.



(17)(本题满分11分)

如图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$.设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)$

$f'''(x)\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(Ⅱ)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_2,x_2,x_3)=0$ 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0, & 其他.\end{cases}$

求:(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,记 $Y_i=X_i-\overline{X}$, $i=1,2,\cdots,n$.

求:(Ⅰ)Y_i 的方差 $D(Y_i)$,$i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{cov}(Y_1,Y_n)$.

2005年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题分析、详解及评注

一、填空题

(1)【分析】　本题属基本题型,直接用斜渐近线方程公式进行计算即可.

【详解】　因为 $a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+x} = \dfrac{1}{2}$,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

【评注】　如何求垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线,是基本要求,应熟练掌握.这里应注意两点:1)当存在水平渐近线时,不需要再求斜渐近线;2)若当 $x\to\infty$ 时,极限 $a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在,则应进一步讨论 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形,即在右侧或左侧是否存在斜渐近线.

(2)【分析】　直接套用一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right],$$

再由初始条件确定任意常数即可.

【详解】　原方程等价于

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x,$$

于是通解为

$$y = e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int \ln x \cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\cdot\left[\int x^2\ln x dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x + C\frac{1}{x^2},$$

由 $y(1) = -\dfrac{1}{9}$ 得 $C = 0$,故所求解为 $y = \dfrac{1}{3}x\ln x - \dfrac{1}{9}x$.

【评注】　本题虽属基本题型,但在用相关公式时应注意先化为标准型.另外,本题也可如下求解:原方程可化为

$$x^2y' + 2xy = x^2\ln x,\text{即}[x^2y]' = x^2\ln x,\text{两边积分得}$$

$$x^2y = \int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C,$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y = \dfrac{1}{3}x\ln x - \dfrac{1}{9}x$.

(3)【分析】　函数 $u(x,y,z)$ 沿单位向量 $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的方向导数为:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

因此,本题直接用上述公式即可.

【详解】　因为$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$,于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【评注】　本题若$\boldsymbol{n}=\{m,n,l\}$为非单位向量,则应先将其单位化,从而得方向余弦为:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}},\cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}},\cos\gamma=\frac{l}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}}.$$

(4)【分析】　本题$\sum$是封闭曲面且取外侧,自然想到用高斯公式转化为三重积分,再用球面(或柱面)坐标进行计算即可.

【详解】

$$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^R\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^2.$$

【评注】　本题属基本题型,不论是用球面坐标还是用柱面坐标进行计算,均应特别注意计算的准确性,主要考查基本的计算能力.

(5)【分析】　将$\boldsymbol{B}$写成用$\boldsymbol{A}$右乘另一矩阵的形式,再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】　由题设,有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix},$$

于是有

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2.$$

【评注】　本题相当于矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量可由矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量线性表示,关键是将其转化为用矩阵乘积形式表示.一般地,若

$$\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\boldsymbol{\beta}_m=a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则有

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

(6)【分析】　本题涉及到两次随机试验,自然地想到用全概率公式,且第一次试验的各种两两互不相容的结果即为完备事件组或样本空间的划分.

【详解】

$$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$$
$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{48}.$$

【评注】　本题综合考查了加法公式、乘法公式和条件概率,这类题型一直都是考查的重点.

二、选择题

(7)【答案】　应选(C).

【分析】　先求出$f(x)$的表达式,再讨论其可导情形.

【详解】　当$|x|<1$时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$;

当$|x|=1$时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=1$;

当$|x|>1$时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3\left(\dfrac{1}{|x|^{3n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

即$f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$可见$f(x)$仅在$x=\pm1$时不可导,故应选(C).

【评注】　本题综合考查了数列极限和导数概念两个知识点.

(8)【答案】　应选(A).

【分析】　本题可直接推证,但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解】　方法一:任一原函数可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且$F'(x)=f(x)$.当$F(x)$为偶函数时,有$F(-x)=F(x)$,于是$F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$,即$-f(-x)=f(x)$,也即$f(-x)=-f(x)$,可见$f(x)$为奇函数;反过来,若$f(x)$为奇函数,则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为偶函数,从而$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$为偶函数,可见(A)为正确选项.

方法二:令$f(x)=1$,则取$F(x)=x+1$,排除(B)、(C);令$f(x)=x$,则取$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$,排除(D);故应选(A).

【评注】　函数$f(x)$与其原函数$F(x)$的奇偶性、周期性和单调性已多次考查过,请读者思考$f(x)$与其原函数$F(x)$的有界性之间有何关系?

(9)【答案】　应选(B).

【分析】　先分别求出$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$,再比较答案即可.

【详解】　因为　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,应选(B).

【评注】 本题综合考查了复合函数求偏导和隐函数求偏导以及高阶偏导的计算. 作为做题技巧,也可取 $\varphi(t)=t^2,\psi(t)=1$,则 $u(x,y)=2x^2+2y^2+2y$,容易验算只有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 成立,同样可找到正确选项(B).

(10)【答案】 应选(D).

【分析】 本题考查隐函数存在定理,只需令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$,分别求出三个偏导数 F_z,F_x,F_y,再考虑在点(0,1,1)处哪个偏导数不为0,即可确定相应的隐函数.

【详解】 令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$,则

$$F'_x=y+e^{xz}z,F'_y=x-\frac{z}{y},F'_z=-\ln y+e^{xz}x,$$

且 $F'_x(0,1,1)=2,F'_y(0,1,1)=-1,F'_z(0,1,1)=0$. 由此可确定相应的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$. 故应选(D).

【评注】 隐函数存在定理是首次直接考查,有部分考生感到较生疏,实际上本题也可从隐函数求偏导公式着手分析:若偏导表达式有意义,则相应偏导数也就存在.

(11)【答案】 应选(B).

【分析】 讨论一组抽象向量的线性无关性,可用定义或转化为求其秩即可.

【详解】 方法一:令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$,则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},\quad (k_1+k_2\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1=0,\\ k_2\lambda_2=0.\end{cases}$$

当 $\lambda_2\neq 0$ 时,显然有 $k_1=0,k_2=0$,此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关;反过来,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关,则必然有 $\lambda_2\neq 0$,(否则,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关),故应选(B).

方法二:由于 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$,可见 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$. 故应选(B).

【评注】 本题综合考查了特征值、特征向量和线性相关与线性无关等概念.

(12)【答案】 应选(C).

【分析】 本题考查矩阵的初等变换与初等矩阵的性质,只需利用初等变换与初等矩阵的关系以及伴随矩阵的性质进行分析即可.

【详解】 由题设,存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{12}$(交换 n 阶单位矩阵的第1行与第2行所得),使得 $\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,于是 $\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12}^*=\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}_{12}|\cdot\boldsymbol{E}_{12}^{-1}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12}$,即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12}=-\boldsymbol{B}^*$,可见应选(C).

【评注】 注意伴随矩阵的运算性质:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},\text{当}\boldsymbol{A}\text{可逆时},\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1},$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

(13)【答案】 应选(B).

【分析】 首先由所有概率之和为1,可得 $a+b=0.5$,其次,利用事件的独立性又可得一等式,由此可确定 a,b 的取值.

【详解】 由题设,知 $a+b=0.5$

又事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,于是有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

即 $a=(0.4+a)(a+b)$,由此可解得 $a=0.4,b=0.1$,故为选(B).

【评注】 本题考查二维随机变量分布律的性质和独立随机事件的概念,均为大纲要求的基本内容.

(14)【答案】 应选(D).

【分析】 利用正态总体抽样分布的性质和 χ^2 分布、t 分布及 F 分布的定义进行讨论即可.

【详解】 由正态总体抽样分布的性质知,$\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}\overline{X}\sim N(0,1)$,可排除(A);

又 $\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{n}\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$,可排除(C);

而 $\dfrac{(n-1)S^2}{1^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$,不能断定(B)是正确选项.

因为 $X_1^2\sim\chi^2(1)$,$\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$,且 $X_1^2\sim\chi^2(1)$ 与 $\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$ 相互独立,于是

$$\frac{\frac{X_1^2}{1}}{\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}{n-1}}=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1).$$

故应选(D).

【评注】 正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的三个抽样分布:$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$、$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 是常考知识点,应当牢记.

三、解答题

(15)【分析】 首先应设法去掉取整函数符号,为此将积分区域分为两部分即可.

【详解】 令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

则

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

【评注】 对于二重积分(或三重积分)的计算问题,当被积函数为分段函数时应利用积分的

可加性分区域积分.而实际考题中,被积函数经常为隐含的分段函数,如取绝对值函数 $|f(x,y)|$、取极值函数 $\max\{f(x,y),g(x,y)\}$ 以及取整函数 $[f(x,y)]$ 等等.

(16)【分析】　先求收敛半径,进而可确定收敛区间.而和函数可利用逐项求导得到.

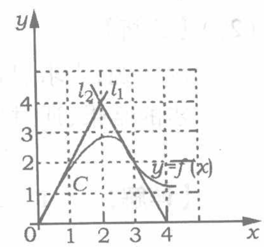
【详解】　令 $a_n=(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$,所以当 $|x|<1$ 时,幂级数收敛,即幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$,则

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)x^{2n}\\
&=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n}\\
&=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'\mathrm{d}x+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-x^2)^n}{n}\right)'\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^x\frac{-2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2),\ |x|<1.
\end{aligned}
$$

【评注】　求收敛区间是基本题型,应注意收敛区间一般指开区间.而幂级数求和应尽量将其转化为形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 幂级数,再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数.

(17)【分析】　题设图形相当于已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的函数值与导数值,在 $x=3$ 处的函数值及一阶、二阶导数值.



【详解】　由题设图形知,$f(0)=0,f'(0)=2;f(3)=2,f'(3)=-2,f''(3)=0$.由分部积分,知

$$
\begin{aligned}
\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x&=\int_0^3(x^2+x)\mathrm{d}f''(x)\\
&=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3f''(x)(2x+1)\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}f'(x)\\
&=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3f'(x)\mathrm{d}x\\
&=16+2[f(3)-f(0)]=20.
\end{aligned}
$$

【评注】　本题中 $f(x)$ 在两个端点的函数值及导数值通过几何图形给出,题型比较新颖,综合考查了导数的几何意义和定积分的计算.另外,值得注意的是,当被积函数含有抽象函数的导数时,一般优先考虑用分部积分.

(18)【分析】　第一部分显然用闭区间上连续函数的介值定理;第二部分为双介值问题,可考虑用拉格朗日中值定理,但应注意利用第一部分已得结论.

【详解】　(Ⅰ)令 $F(x)=f(x)-1+x$.则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $F(0)=-1<0,F(1)=1>0$,于是由介值定理知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=1-\xi$.

(Ⅱ)在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理,知存在两个不同的点 $\eta\in$

$(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$,使得$f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$,$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是　$f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1$.

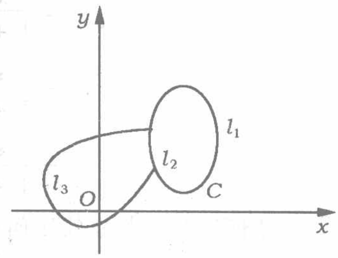
【评注】　中值定理的证明问题是历年出题频率最高的部分,而将中值定理与介值定理或积分中值定理结合起来命题又是最常见的命题形式.

(19)【分析】　证明(Ⅰ)的关键是如何将封闭曲线C与围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线相联系,这可利用曲线积分的可加性将C进行分解讨论;而(Ⅱ)中求$\varphi(y)$的表达式,显然应用积分与路径无关即可.

【详解】　(Ⅰ)

如图,将C分解为:$C=l_1+l_2$,另作一条曲线l_3围绕原点且与C相接,则

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{l_1+l_3}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{l_2+l_3}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0.$$



(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果,知

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{2x^2+y^4}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}\right),$$

即有　$-4x^2y+2y^5=\varphi'(y)(2x^2+y^4)-\varphi(y)\cdot4y^3$,

得　$\varphi'(y)=-2y,y\varphi'(y)-4\varphi(y)=2y^2$,

解第一个微分方程,得　$\varphi(y)=-y^2+C$,再代入第二个方程得$C=0$,故$\varphi(y)=-y^2$.

【评注】　本题难度较大,关键是如何将待求解的问题转化为可利用已知条件的情形.

(20)【分析】　(Ⅰ)根据二次型的秩为2,可知对应矩阵的行列式为0,从而可求a的值;(Ⅱ)是常规问题,先求出特征值、特征向量,再正交化、单位化即可找到所需正交变换;(Ⅲ)利用第二步的结果,通过标准形求解即可.

【详解】　(Ⅰ)二次型对应矩阵为　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,

由二次型的秩为2,知　$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{vmatrix}=0$,得$a=0$.

(Ⅱ)这里$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,可求出其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

解$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量为:$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

解$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量为:$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$已经正交,直接将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化,得:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3]$,即为所求的正交变换矩阵,由 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,可化原二次型为标准形;

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 .$$

(Ⅲ)由 $f(x_1,x_2,x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$,得 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = k$($k$ 为任意常数),从而所求解为:$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3]\begin{bmatrix}0\\0\\k\end{bmatrix} = k\boldsymbol{\eta}_3\begin{bmatrix}c\\-c\\0\end{bmatrix}$,其中 c 为任意常数.

【评注】 本题综合考查了特征值、特征向量、化二次型为标准型以及方程组求解等多个知识点,特别是第三部分比较新颖.但仔细分析可以看出,每一部分均是大纲规定的基本内容.

(21)**【分析】** $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$,相当于告之 $\boldsymbol{B}$ 的每一列均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,关键问题是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为多少,而这又转化为确定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

【详解】 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 知,$\boldsymbol{B}$ 的每一列均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,且 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant 3$.

(1)若 $k \neq 9$,则 $r(\boldsymbol{B}) = 2$,于是 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 1$,显然 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 1$,故 $r(\boldsymbol{A}) = 1$.可见此时 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为 $3 - r(\boldsymbol{A}) = 2$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一、第三列线性无关,可作为其基础解系,故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为:$\boldsymbol{x} = k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}$,$k_1, k_2$ 为任意常数.

(2)若 $k = 9$,则 $r(\boldsymbol{B}) = 1$,从而 $1 \leqslant r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.

1)若 $r(\boldsymbol{A}) = 2$,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为:$\boldsymbol{x} = k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,$k_1$ 为任意常数.

2)若 $r(\boldsymbol{A}) = 1$,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的同解方程组为:$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$,不妨设 $a \neq 0$,则其通解为 $\boldsymbol{x} = k_1\begin{bmatrix}-b\\a\\0\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}-c\\0\\a\end{bmatrix}$,$k_1, k_2$ 为任意常数.

【评注】 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 这类已知条件是反复出现的,应该明确其引申含义:1)$\boldsymbol{B}$ 的每一列均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解;2)$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

本题涉及到对参数 k 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的讨论,这是考查综合思维能力的一种重要表现形式,今后类似问题将会越来越多.

(22)**【分析】** 求边缘概率密度直接用公式即可;而求二维随机变量函数的概率密度,一般用分布函数法,即先用定义求出分布函数,再求导得到相应的概率密度.

【详解】 (Ⅰ)关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} = \begin{cases}2x, & 0 < x < 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1} dx, & 0 < y < 2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} = \begin{cases}1 - \dfrac{y}{2}, & 0 < y < 2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(Ⅱ)令 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}$,

1)当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=0$;

2)当 $0\leqslant z<2$ 时,$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=z-\frac{1}{4}z^2$;

3)当 $z\geqslant 2$ 时,$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=1$.

即分布函数为: $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$

故所求的概率密度为:$f_z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【评注】 本题属基本题型,只需注意计算的准确性,应该可以顺利求解.第二步求随机变量函数分布,一般都是通过定义用分布函数法讨论.

(23)【分析】 先将 Y_i 表示为相互独立的随机变量求和,再用方差的性质进行计算即可;求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{cov}(Y_1,Y_n)$,本质上还是数学期望的计算,同样应注意利用数学期望的运算性质.

【详解】 由题设,知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立,且

$$EX_i=0,\ DX_i=1(i=1,2,\cdots,N),\ E\overline{X}=0.$$

(Ⅰ)

$$\begin{aligned}DY_i&=D(X_i-\overline{X})=D[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{j\neq 1}^{n}X_j]\\&=(1-\frac{1}{n})^2DX_i+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq 1}^{n}DX_j\\&=\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)=\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

(Ⅱ)

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_1,Y_n)&=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]\\&=E(Y_1Y_n)=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]\\&=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)\\&=E(X_1X_n)-2E(X_1\overline{X})+E\overline{X}^2\\&=0-\frac{2}{n}E[X_1^2+\sum_{j=2}^{n}X_1X_j]+D\overline{X}+(E\overline{X})^2\\&=-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

【评注】 通过定义求随机变量的数字特征是基本要求,也是到目前为止考查最多的情形,但读者还应注意利用数字特征的运算性质进行分析讨论,同样是求解数字特征的一个重要途径.