北京大学数学力学系

微分方程論文集

（合訂本）

1963

半綫性双曲型方程組初値問題和边値問題古典解在大区域中的存在唯一性*

陈 亚 浙

引言 本文主要研究一阶半綫性双曲型方程組：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i(t, x)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \psi_i(t, x, u_i, u_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{0.1}$$

在带形区域 $G: \{-\infty < x < +\infty, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的初値問題和在矩形区域 $\bar{R}: \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的各种边値問題. 早在 1949 年 R. Courant 和 P. Lax 在工作[1]中就解决了一般拟綫性方程組的初値問題和边値問題在小区域的存在性，但至今在大区域上仍未有很好的結果，1960 年 B. Э. Аболиня 和 A. Д. Мышкис 在工作[2]中研究了半綫性方程組带有非綫性边条件的边値問題，但他們对非綫性項所加的条件很強. 本文在对非綫性項加較弱的条件下得到了方程組 (0.1) 的初値問題和边値問題在大区域上古典解的存在唯一性.

本文主要应用最高阶微商带有小参数 $\varepsilon > 0$ 的二阶抛物型方程組的解来逼近方程組 (0.1)的解. 在对于带小参数的抛物型方程組进行估計时与常用的方法有所不同.

本文所用的方法完全适用于形如(0.1)的 n 个未知函数的双曲型方程組.

本文是在肖树鉄老师的指导下完成的，特在此向肖老师表示衷心的感謝.

§1. 带有小参数的拟綫性抛物型方程組第一边値問題和初値問題解的存在性定理

在矩形 $\bar{R}: \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上考虑拟綫性抛物型方程組边値

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i(t, x)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(t, x, u_i, u_j)u_j + f_i(t, x).$$

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad i =$$

$$u_i(t, 0) = \chi_1^i(t), \quad u(t, 1) = \chi_2^i(t), \quad 0 \leqslant$$

其中 $\varepsilon > 0$.

定理一 設拟綫性抛物型方程組边値問題 (1.

i) 对于 $(x, t) \in \bar{R}$ 和 u_1, u_2 的任意值

$$(\xi_1 \xi_2)\begin{pmatrix} C_{ii} & C_{ij} \\ C_{ij} & C_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \geqslant -C_0(\xi_1^2 +$$

其中 C_0 为一常数，(ξ_1, ξ_2) 为任意的实向量；

ii) 在区域 $\bar{\Omega}: \{(t, x) \in \bar{R}, -M_0 < u_1, u_2 <$

---

* 本文于 1962 年 7 月完成

$f_i(t, x)$ $(i, j = 1, 2)$ 对自变量 x, u_1, u_2 都属于 $C^{(4,\nu)}$, 并且这些函数与它們对 x, u_1, u_2 的一級与二級微商对 t 适合 Lip. 条件,其中

$$M_0 = e^{\alpha T} \max\left\{\max_{\substack{0\leq x\leq 1\\ i=1,2}} |\varphi_i(x)|, \max_{\substack{0\leq t\leq T\\ i,j=1,2}} |\chi_i^j(t)|, \frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}C_0} \max_{\substack{\bar{R}\\ i=1,2}} |f_i(t, x)|\right\},$$

α 是大于 $\frac{3}{2} C_0$ 的数;

iii) 函数 $\varphi_i(x) \in C^{(6,\lambda)}[0, 1]$ $(i = 1, 2)$;

iv) 函数 $\chi_i^j(t) \in C^{(2,\lambda)}[0, T]$ $(i, j = 1, 2)$;

v) 满足接触条件: (記 $a_0 = 0$, $a_2 = 1$)

$$\varphi_i(a_k) = \chi_k^i(0), i, k = 1, 2, \tag{1.5}$$

$$\varepsilon\varphi_i''(a_k) = \chi_k^{i\prime}(0) + \rho_i(0, a_k)\varphi_i'(a_k) + \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(0, a_k, \varphi_i(a_k), \varphi_j(a_k)) + + f_i(0, a_k), i, j, k = 1, 2. \tag{1.6}$$

則边值問題(1.1)—(1.3)的解存在, 它們在方程組中所出現的各阶微商在 $\bar{R}$ 上連續, 且 $|u_i(t, x)| \leq M_0$.

証 此定理和[3] (174—175 頁) 中所給出的定理完全类似, 只有条件 i) 和 M_0 不同. 因此, 我們只需估計出問題 (1.1)—(1.3) 的所有可能解按模以 M_0 为界, 其余步驟皆可仿照[3]的做法.

作变換 $u_i(t, x) = v_i(t, x)e^{\alpha t}(i = 1, 2)$, $v_i^2(t, x)$ $(i = 1, 2)$ 在 R 中滿足方程

$$\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2 v_i^2}{\partial x^2} - \varepsilon\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho(t, x)\frac{\partial v_i^2}{\partial x} + \alpha v_i^2 + + \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(t, x, u_i, u_j)v_i v_j + f_i(t, x)e^{-\alpha t}v_i \ (i, j = 1, 2, i \neq j). \tag{1.7}$$

考虑函数 $\max_{i=1,2}\{v_i^2(t, x)\}$. 如果它在 R 的內点 A 上取最大值, 不妨設 $v_1^2(t, x)|_A = \max_{i=1,2}$

$|_A$, 則 $v_1^2(t, x)$ 也在 A 上取最大值,而且 $v_1^2(t, x)|_A \geq v_2^2(t, x)|_A$. 在 A 上

$$^2 + \sum_{j=1}^{2} C_{1j}v_1 v_j - f_1(t,x)e^{-\alpha t}v_1$$

$$C_{11}v_1^2 + C_{12}v_1 v_2 + \frac{1}{2} C_{11}v_2^2 + \frac{1}{2} C_{11}(v_1^2 - v_2^2) - f_1(t, x)e^{-\alpha t}v_1$$

$$- \max_{\bar{R}} \{|f_1(t, x)|\}|v_1|;$$

$$\}|_A \leq \frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}C_0} \max_{(t,x)\in\bar{R}} \{|f_1(t, x)|\} \leq$$

$$\kappa |f_i(t, x)|. \tag{1.8}$$

]可用边值估計出来. 因此,我們就得到 $|u_i(t,$

$x)| \leqslant M_0$，定理一証毕.

在 $\bar{G}$：$\{-\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上考虑拟綫性抛物型方程組 (1.1) 和初值条件

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad i = 1, 2. \tag{1.9}$$

定理二 設初值問題(1.1)(1.9)满足以下条件:

i）对于 $(x, t) \in G$ 和 u_1, u_2 的任意值

$$(\xi_1 \xi_2)\begin{pmatrix} C_{ii} & C_{ij} \\ C_{ij} & C_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \geqslant -C_0(\xi_1^2 + \xi_2^2),\ (i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{1.10}$$

$|f_i(t, x)|$ 有界，其中 C_0 为常数，(ξ_1, ξ_2) 为任意的实向量；

ii）函数 $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ 在任意有界閉区域上属于 $C^{(6,\lambda)}$，函数 $\varphi_i(x)(i = 1, 2)$ 本身及其一級、二級微商在 $-\infty < x < +\infty$ 上有界；

iii）在区域 Ω：$\{|x| < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ -M_0 \leqslant u_1,\ u_2 \leqslant M_0\}$ 中的任意有界区域 $\rho_i(t, x)$，$C_{ij}(t, x, u_i, u_j)$，$f_i(t, x)$ 对 x, u_1, u_2 属于 $C^{(4,\lambda)}$，对于变量 t 适合 Lip. 条件，此外这些函数与它們对 x, u_1, u_2 的一級和二級微商对于变量 x 是一致有界的. 其中 $M_0 = e^{aT}\max\left\{\sup_{\substack{|x|<\infty \\ i=1,2}}|\varphi_i(x)|;\ \frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}C_0}\sup_{\substack{i=1,2 \\ G}}|f_i(t, x)|\right\}\left(\alpha > \frac{3}{2}C_0\right)$.

則初值問題 (1.1) (1.9) 的解 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ 存在，它們本身及在 (1.1) 中所出現的各阶微商在 G 上連續，且 $|u_i(t, x)| \leqslant M_0(i = 1, 2)$.

此定理的証明与 [3] (180 頁—194 頁) 的不同之处也是条件 i) 和 M_0，本文不再詳述了.

附注一 在定理二中如果对于方程系数和初值函数再加上适当的光滑性假設后，(因为以后光滑性总是足够的，这里不精确叙述了.) 可得到 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ 对 x 的四阶微商，对 t 的二阶微商在 $t \geqslant 0$ 上連續.

附注二 在定理一中如果对于方程系数，边值和初值函数再加上适当的光滑性假設，此外还假設满足接触条件

$$\begin{aligned} \chi_k^{i\prime\prime}(0) = {} & \varepsilon^2\varphi_i^{(4)}(a_k) - \varepsilon\rho_i(0, a_k)\varphi_i'''(a_k) - \\ & -\left(\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_i(0, a_k)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big[\rho_i(0, x)\varphi_i'(x) + \\ & + \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(0, x, \varphi_i(x), \varphi_j(x)) + f_i(0, x)\Big]_{x=a_k} - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho_i(t, 0)\varphi'(a_k) + \\ & + \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(t, a_k, \chi_k^i(t), \chi_k^j(t)) + f_i(t, a_k)\Big]_{t=0} \quad (i, k = 1, 2), \end{aligned} \tag{1.11}$$

以后我們称 (1.5) 为零級接触条件，(1.6) 为一級接触条件，(1.11) 为二級接触条件.

在这些条件下，不难得到 $u_i(t, x)$ 对 x 的四价微商和对 t 的二阶微商在 $\bar{R}$ 上連續.

§2. 初 值 問 題

在 G 上考虑方程組(0.1)与初值条件

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

当假設了 $\psi_i(t, x, u_i, u_j)$ $(i=1, 2, i \neq j)$ 对 u_i, u_j 連續可微之后，方程 (0.1) 总可以写成以下形式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i(t, x)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(t, x, u_i, u_j)\, u_i + f_i(t, x) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{2} C_{ij}(t, x, u_i, u_j)u_j + f_i(t, x) = \psi_i(t, x, u_i, u_j),$$

$$f_i(t, x) = \psi_i(t, x, 0, 0) \quad (i, j = 1, 2).$$

定理三 如果初值問題 (0.1) (2.1) 滿足以下条件：

i) 对 $(x, t) \in G$ 和任意的 u_1, u_2

$$(\xi_1, \xi_2)\begin{pmatrix} C_{ii} & C_{ij} \\ C_{ij} & C_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \geqslant -C_0(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \tag{2.3}$$

$|\psi_i(t, x, 0, 0)|$ $(i = 1, 2)$ 有界，其中 C_0 为常数，(ξ_1, ξ_2) 为任意的实向量；

ii) $\varphi_i(x)$ 本身、一阶微商及一阶微商的 Lip. 系数在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界；

iii) 在 Ω: $\{|x| < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T, -M_0 \leqslant u_1, u_2 \leqslant M_0\}$ 上，$\rho_i(t,x)$, $\psi_i(t, x, u_i, u_j)$ 本身、所有的一阶微商及一阶微商对所有自变量的 Lip. 系数在 Ω 中一致有界. 其中 $M_0 = e^{\alpha T}\max\left\{\sup_{\substack{(-\infty, +\infty)\\ i=1,2}}|\varphi_i(x)|, \frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}C_0}\sup_{\substack{G\\ i=1,2}}|\psi_i(t, x, 0, 0)|\right\}$ $\left(\alpha > \frac{3}{2}C_0\right)$.

則初値問題 (0.1) (2.1) 存在唯一的有界光滑解 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$，它在 G 上对 x, t 具有有界的一級微商，而且微商的 Lip. 系数也在 G 上有界.

証 我們用最高阶微商带有小参数 $\varepsilon > 0$ 的抛物型方程組初值問題的解来逼近初值問題 (0.1) (2.1) 的解. 为此，考慮抛物型方程組初值問題

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{i\varepsilon}(t, x)\dfrac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{2} C_{ij}^{\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)u_j + f_{i\varepsilon}(t, x), i = 1, 2, \\ u_{i\varepsilon}(0, x) = \varphi_{i\varepsilon}(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{2.4}$$

以后記 $\psi_{i\varepsilon}(t, x, u_i, u_j) = \sum_{j=1} C_{ij}^{\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)u_j + f_{i\varepsilon}(t, x)$, 其中 $\rho_{i\varepsilon}(t, x)$, $C_{ij}^{\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)$, $f_{i\varepsilon}(t, x)$ 充分光滑，且在 Ω 内的任意有限区域上一致逼近于 $\rho_i(t, x)$, $C_{ij}(t, x, u_i, u_j)$, $f_i(t, x)$; $\varphi_{i\varepsilon}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也充分光滑，在任意有限区域上在 $C^{(1)}$ 中一致逼近于 $\varphi_i(x)$. 而且使得

$$(\xi_1 \xi_2)\begin{pmatrix} C_{ii}^{\varepsilon} & C_{ij}^{\varepsilon} \\ C_{ij}^{\varepsilon} & C_{ii}^{\varepsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \geqslant -C_0(\xi_1^2 + \xi_2^2), \tag{2.5}$$

$$|f_{i\varepsilon}(t, x)| \leqslant \sup_{i, G}|\psi_i(t, x, 0, 0)|, \tag{2.6}$$

$$|\varphi_{i\varepsilon}(x)| \leqslant \sup_{\substack{(-\infty, +\infty)\\ i=1,2}}|\varphi_i(x)|, \tag{2.7}$$

$$\|\rho_{i\varepsilon}\|_{C^{(2)}(G)} \leqslant k_\rho, \ |D^{(3)}\rho_{i\varepsilon}(t, x)| \leqslant \frac{k_{3\rho}}{\varepsilon}, \ |D^{(4)}\rho_{i\varepsilon}(t, x)| \leqslant \frac{k_{4\rho}}{\varepsilon^2}, \tag{2.8}$$

$$\|\psi_{i\varepsilon}\|_{C^{(2)}(\Omega)} \leqslant k_\psi, \ |D^{(4)}\psi_{i\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)| \leqslant \frac{k_{3\psi}}{\varepsilon}, \ |D^{(4)}\psi_{i\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)| \leqslant \frac{k_{4\psi}}{\varepsilon^2}, \tag{2.9}$$

$$\|\varphi_{i\varepsilon}\|_{C^{(2)}(-\infty, +\infty)} \leqslant k_\varphi, \ |D^{(3)}\varphi_{i\varepsilon}(x)| \leqslant \frac{k_{3\varphi}}{\varepsilon}, \ |D^{(4)}\varphi_{i\varepsilon}(x)| \leqslant \frac{k_{4\varphi}}{\varepsilon^2}, \tag{2.10}$$

其中 $\|g\|_{C^{(2)}(\Omega)}=\sup\limits_{\Omega}|g|+\sup\limits_{\Omega}|Dg|+\sup\limits_{\Omega}|D^{(2)}g|$, $D^{(k)}g$ 表示 g 的所有 k 級微商. (2.6)—(2.10) 都是在 Ω 上成立. 这总是可以做到的.

根据定理二和附注一,初值問題 (2.4) 的解 $u_{i\varepsilon}(t,x)$ $(i=1,2)$ 存在,它对 x 的四阶微商在 $t\geqslant 0$ 上連續,且 $|u_{i\varepsilon}(t,x)|\leqslant M_0$. 为了証明此定理,我們先証明一系列引理.

引理 3.1 在 G 上

$$\left|\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial x}\right|\leqslant E_1,\quad (i=1,2), \tag{2.11}$$

其中 E_1 是与 ε 无关的常数.

証 取 $k\geqslant 2TK_\rho$, 以 Δ_k 表示由下面曲綫

$$t=T,\ t=0,\ x=-k+K_\rho t,\ x=k-K_\rho t \tag{2.12}$$

所围成的区域. 作在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次連續可微的函数 $\zeta_{0,k}(x)$, 它滿足以下条件: i) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $|\zeta_{0,k}(x)|\leqslant 1$, 在 $[-k,k]$ 上 $\zeta_{0k}(x)\equiv 1$, 在 $|x|\geqslant k+1$ 上 $\zeta_{0,k}(x)\equiv 0$; ii) 当 $k<x<k+1$ 时 $\zeta_{0,k}(x)=\zeta_{0,k+1}(x+1)$, 当 $-k-1<x<-k$ 时 $\zeta_{0,k}(x)=\zeta_{0,k+1}(x-1)$; iii) $|\zeta'_{0,k}(x)|\leqslant C$, $|\zeta''_{0,k}(x)|\leqslant C$, 其中 C 与 k 无关; iv) $\zeta_{0,k}(x)$ 在 $x<0$ 为增函数, 在 $x>0$ 为减函数. 再考虑如下的函数 $\zeta_k^2(t,x)$: 在 $x<0$ 上它滿足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta_k^2}{\partial t}+K_\rho\dfrac{\partial\zeta_k^2}{\partial x}=0,\\ \zeta_k^2(0,x)=\zeta_{0,k}^2(x),\quad -\infty<x<+\infty;\end{cases} \tag{2.13}$$

而在 $x>0$ 上滿足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta_k^2}{\partial t}-K_\rho\dfrac{\partial\zeta_k^2}{\partial x}=0,\\ \zeta_k^2(0,x)=\zeta_{0,k}^2(x),\quad -\infty<x<+\infty.\end{cases} \tag{2.14}$$

显然 $\zeta_k^2(t,x)$ 可以是这样的函数: 在 Δ_k 上为 1, 在 Δ_{k+1} 外为零, 而当 $-k>\xi>-k-1$ 时在特征綫 $x=\xi+K_\rho t$ 上 $\zeta_0^2(t,x)=\zeta_{0,k}^2(\xi)$, 当 $k+1>\xi>k$ 时在特征綫 $x=\xi-K_\rho t$ 上 $\zeta_k^2(t,x)=\zeta_{0k}^2(\xi)$. 因此, 容易知道 $\zeta_k^2(t,x)$ 是一个二次連續可微的函数, 当 $x<0$ 时是 x 的增函数, 当 $x>0$ 时是 x 的減函数, 且 $|\zeta'_{kx}(t,x)|\leqslant C$, $|\zeta''_{kxx}(t,x)|\leqslant C$.

考虑輔助函数

$$Z_{i\varepsilon}(t,x)=\zeta_k^2(t,x)p_{i\varepsilon}^2(t,x)+K(w_{i\varepsilon}-2M_0e^{-\alpha t})^2, \tag{2.15}$$

其中 $w_i(t,x)=u_{i\varepsilon}e^{-\alpha t}$, $p_{i\varepsilon}(t,x)=\dfrac{\partial w_{i\varepsilon}}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}LZ_{i\varepsilon}(t,x)&=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial^2 Z_{i\varepsilon}}{\partial x^2}-\frac{\partial Z_{i\varepsilon}}{\partial t}-\rho_{i\varepsilon}(t,x)\frac{\partial Z_{i\varepsilon}}{\partial x}\right)=\\ &=\varepsilon\left[\zeta_k^2(t,x)\frac{\partial p_{i\varepsilon}}{\partial x}+4\zeta'_{kx}p_{i\varepsilon}\right]^2+\zeta_k^2(t,x)\left[\alpha p_{i\varepsilon}^2+\frac{\partial\psi_{i\varepsilon}}{\partial u_i}p_{i\varepsilon}^2+\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial\psi_{i\varepsilon}}{\partial u_j}p_{i\varepsilon}p_{j\varepsilon}+\frac{\partial\rho_{i\varepsilon}}{\partial x}p_{i\varepsilon}^2+\frac{\partial\psi}{\partial x}p_{i\varepsilon}\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial\zeta_k^2}{\partial t}-\right.\\ &\quad\left.-\rho_{i\varepsilon}(t,x)\frac{\partial\zeta_k^2}{\partial x}\right]p_{i\varepsilon}^2+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2\zeta_k^2}{\partial x^2}p_{i\varepsilon}^2-16\varepsilon\left(\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right)^2p_{i\varepsilon}^2+\\ &\quad+K\varepsilon p_{i\varepsilon}^2+K[\alpha(u_{i\varepsilon}-2M_0)^2+\psi_{i\varepsilon}(t,x,u_i,u_j)(u_{i\varepsilon}-2M_0)]e^{-2\alpha t}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

当 $x < 0$ 时由(2.13)得到

$$-\frac{\partial \zeta_k^2}{\partial t} - \rho_{i\varepsilon}(t, x)\frac{\partial \zeta_k^2}{\partial x} = (K_\rho - \rho_{i\varepsilon}(t, x))\frac{\partial \zeta_k^2}{\partial x} \geqslant 0, \tag{2.17}$$

当 $x > 0$ 时由(2.14)得到

$$-\frac{\partial \zeta_k^2}{\partial t} - \rho_{i\varepsilon}(t, x)\frac{\partial \zeta_k^2}{\partial x} = (-K_\rho - \rho_i(t, x))\frac{\partial \zeta_k^2}{\partial x} \geqslant 0. \tag{2.18}$$

考虑函数 $\max\limits_{i=1,2}\{Z_{i\varepsilon}(t, x)\}$，如果它在 Δ_{k+1} 的內点 A 上取最大值，不妨設 $Z_{1\varepsilon}|_A = \max\limits_{i=1,2}\{Z_{i\varepsilon}(t, x)\}|_A$，显然 $Z_{1\varepsilon}$ 也在 A 上取到最大值，而且 $Z_{1\varepsilon}|_A \geqslant Z_{2\varepsilon}|_A$，即在 A 上

$$\zeta_k^2(t, x)p_{1\varepsilon}^2(t, x) + K(u_{1\varepsilon} - 2M_0)^2 e^{-2\alpha t} \geqslant \zeta_k^2(t, x)p_{2\varepsilon}^2(t, x) + \\ + K(u_{2\varepsilon} - 2M_0)^2 e^{-2\alpha t}.$$

因此，在点 A 上

$$\zeta_k^2(t, x)p_{2\varepsilon}^2(t, x) \leqslant \zeta_k^2(t, x)p_{1\varepsilon}^2 + 9KM_0^2 e^{-2\alpha t}. \tag{2.19}$$

由(2.16)—(2.19)得到在 A 上

$$0 \geqslant \zeta_k^2(\alpha p_{1\varepsilon}^2 - (3K_\psi + K_\rho)p_{1\varepsilon}^2 - K_\psi|p_{1\varepsilon}|) + \varepsilon(K - C - 17C^2)p_{1\varepsilon}^2 + \\ + K(\alpha M_0^2 - 3K_\psi M_0 - 9K_\psi M_0^2)e^{-2\alpha t}, \tag{2.20}$$

取 $\alpha = 10K_\psi + \dfrac{3}{M_0}K_\psi + K_\rho$, $K = C + 17C^2$, 由(2.20)得到在 A 上

$$\zeta_k^2(13K_\psi p_{1\varepsilon}^2 - K_\psi) \leqslant 0.$$

于是

$$|p_{1\varepsilon}^2| \leqslant \frac{1}{13} \tag{2.21}$$

$$\max\{Z_{i\varepsilon}\}|_A \leqslant \frac{1}{13} + 9KM_0^2. \tag{2.22}$$

如果 $\max\limits_i\{Z_{i\varepsilon}(t, x)\}$ 在 Δ_{k+1} 的側边上取到最大值，則 $|Z_{i\varepsilon}| \leqslant 9KM_0^2$ $(i = 1, 2)$，如果在 $t = 0$ 上取到最大值，則 $|Z_{i\varepsilon}| \leqslant K_\varphi + 9KM_0^2$，綜合以上情况就得到所要的估計.

可以用类似的方法証明以下引理:

引理 3.2 在 G 上

$$\left|\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial x^2}\right| \leqslant E_2, \quad \left|\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t}\right| \leqslant E_1', \quad i = 1, 2. \tag{2.23}$$

引理 3.3 在 G 上

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right| \leqslant \frac{E_3}{\varepsilon}, \qquad \left|\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial x\,\partial t}\right| \leqslant E_2', \quad i = 1,2.$$

引理 3.4 在 G 上

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leqslant \frac{E_4}{\varepsilon^2}, \qquad \left|\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial t^2}\right| \leqslant E_2'', \quad i = 1, 2.$$

其中 $E_2, E_1', E_3, E_2', E_4, E_2''$ 都是与 ε 无关的常数.

現在回到定理一的証明. 由引理 3.1—3.4 知道 $\{u_{i\varepsilon}\}$ $(i = 1, 2)$ 在 G 的任意有界区域上是 $C^{(1)}$ 的紧致集合. 因此可以抽出一串序列 $\{u_{i\varepsilon_n}\}$ $(i = 1, 2)$ 在 G 的任意有界区域上在 $C^{(1)}$ 中一致收斂于 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$，显然 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ 在 $\dot{G}$ 上一次連續可微，而且它本身、一阶微商和一阶微商的 Lip. 系数在 G 上有界. 在方程(2.4)中使 ε 取上

述序列 ε_n 并注意到引理 3.2，取极限后知道 $u_i(t, x)$ 满足方程組（0.1）。满足初条件是显然的。

利用类似于 [4]（第四章 § 40）的作法和定理一的証明方法不难得到初值問題（0.1）（2.1）光滑的有界解的唯一性。

§ 3. 边值問題的提法

在 $\bar{R}$ 上考虑方程組（0.1），初始条件为

$$u_i(0,x) = \varphi_i(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ i = 1, 2, \tag{3.1}$$

边值条件的提法如下

（I）当 $\rho_1(t, 0), \rho_2(t, 0) \geqslant \delta > 0, \ \rho(t, 1), \ \rho_2(t, 1) \leqslant -\delta < 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，边值条件为

$$\begin{cases} u_i(t, 0) = \chi_1^i(t), \\ u_i(t, 1) = \chi_2^i(t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \ i = 1, 2; \tag{3.2}$$

（II）当 $\rho_1(t, 0), \ \rho_2(t, 0) \leqslant 0, \ \rho_1(t, 1), \ \rho_2(t, 1) \geqslant 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，在 $x = 0$ $x = 1$ 上不給边值；

（III）当 $\rho_1(t, 0), \ \rho_2(t, 0) \geqslant \delta > 0, \ \rho_1(t, 1), \ \rho_2(t, 1) \geqslant 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，边值条件为

$$u_i(t, 0) = \chi_1^i(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ i = 1,2; \tag{3.3}$$

（IV）当 $\rho_1(t\,0), \ \rho_2(t, 0) \geqslant \delta > 0, \ \rho_1(t, 1) \geqslant 0, \ \rho_2(t, 1) \leqslant -\delta < 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时边值条件为

$$\begin{cases} u(t, 0) = \chi_1^i(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \ i = 1, 2; \\ c(t)u_1(t, 1) + d(t)u_2(t, 1) = \chi_2(t) \quad (d(t) \neq 0), & \end{cases} \tag{3.4}$$

（V）当 $\rho_1(t, 0), \ \rho_2(t, 0) \leqslant 0, \ \rho_1(t, 1) \geqslant 0, \ \rho_2(t, 1) \leqslant -\delta < 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，边值条件为

$$c(t)u_i(t, 1) + d(t)u_2(t, 1) = \chi_2(t) \ (d(t) \neq 0), \ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3.5}$$

（VI）当 $\rho_1(t, 0) \geqslant \delta > 0, \ \rho_2(t, 0) \leqslant 0, \ \rho_1(t, 1) \geqslant 0, \ \rho_2(t, 1) \leqslant -\delta < 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，边值条件为

$$\begin{cases} a(t)u_1(t, 0) + b(t)u_2(t, 0) = \chi_1(t) \ (a(t) \neq 0), \\ a(t)u_1(t, 1) + d(t)u_2(t, 1) = \chi_2(t) \ (d(t) \neq 0), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3.6}$$

（VII）当 $\rho_1(t, 0) \leqslant 0, \ \rho_2(t, 0) \geqslant \delta > 0, \ \rho_1(t, 1) \geqslant 0, \ \rho_2(t, 1) \leqslant -\delta < 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，边值条件为

$$\begin{cases} a(t)u_1(t, 0) + b(t)u_2(t, 0) = \chi_1(t), \ (b(t) \neq 0), \\ c(t)u_1(t, 1) + d(t)u_2(t, 1) = \chi_2(t) \quad (d(t) \neq 0), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.7}$$

其余情况必类似于其中的某一类。

§ 4. 边値問題 (I) (II) (III)

定理四 設边値問題（0.1）（3.1）（3.2）满足以下条件

i）对于 $(x, t) \in \bar{R}$ 和 u_1, u_2 的任意值

$$(\xi_1\xi_2)\begin{pmatrix}C_{ii} & C_{ij}\\ C_{ij} & C_{ii}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \geqslant -C_0(\xi_1^2+\xi_2^2) \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{4.1}$$

其中 C_0 是某一常数，(ξ_1, ξ_2) 是任意的实向量；

ii) 在 Ω: $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T, -M_0 \leqslant u_1, u_2 \leqslant M_0\}$ 上 $\rho_i(t, x)$, $\psi_i(t, x, u_i, u_j)$ 属于 $C^{(1,1)}$，其中 $M_0 = e^{\alpha T}\max\left\{\frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}C_0}\max\limits_{\substack{\bar{R}\\ i=1,2}}|\psi_i(t, x, 0, 0)|,\ \max\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ i=1,2}}|\varphi_i(x)|,\ \max\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ i,j=1,2}}|\chi_i^j(t)|\right\}\left(\alpha > \frac{3}{2}C_0\right)$；

iii) $\varphi_i(x) \in C^{(1,1)}[0, 1]$ $(i = 1, 2)$；

iv) $\rho_i(t, x)$ 满足 (I) 所叙述的条件；

v) $\chi_i^j(t) \in C^{(1,1)}[0, T]$ $(i, j = 1, 2)$；

vi) 满足接触条件：(記 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$)

$$\varphi_j(a_k) = \chi_k^i(0), \quad i, k = 1, 2, \tag{4.2}$$

$$\chi_k^{i\prime}(0) + \rho_i(0, a_k)\varphi_i(a_k) + \psi_i(0, a_k, \varphi_i(a_k), \varphi_j(a_k)) = 0, \ i, k = 1, 2.$$

則边値問題 (0.1)(3.1)(3.2) 在 $C^{(1)}(\bar{R})$ 中有唯一的解 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ 存在，且 $u_i(t, x) \in C^{(1,1)}(\bar{R})$.

証 与初値問題一样，我們在 $\bar{R}$ 上考慮帯有小参数 $\varepsilon > 0$ 的方程組

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{i\varepsilon}(t, x)\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial x} + \psi_{i\varepsilon}(t, x, u_{i\varepsilon}, u_{j\varepsilon}) \ (i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{4.4}$$

初値条件和边値条件为

$$\begin{cases}u_{i\varepsilon}(0, x) = \varphi_{i\varepsilon}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, i = 1, 2,\\ u_{i\varepsilon}(t, 0) = \chi_{1\varepsilon}^i(t), u_{2\varepsilon}(t, 1) = \chi_{2\varepsilon}^i(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ i = 1, 2,\end{cases}$$

其中 $\rho_{i\varepsilon}(t, x)$, $\psi_{i\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)$, $\chi_{i\varepsilon}^k(t)$, $\varphi_{i\varepsilon}(x)$ $(k, i, j = 1, 2, i \neq j)$ 都是充分光滑的函数，$\psi_{i\varepsilon}(t, x, u_i, u_j)$ 在 $C^{(0)}(\Omega)$ 中一致逼近于 $\psi_i(t, x, u_i, x_j)$，$\rho_{i\varepsilon}(t,x)$、$\chi_{i\varepsilon}^k(t)$、$\varphi_{i\varepsilon}(x)$ 在 $C^{(1)}(\bar{R})$ 中一致逼近于 $\rho_i(t, x)$、$\chi_i^k(x)$、$\varphi_i(x)$，同样对它們有 (2.5)—(2.10) 的估計．此外还要求

$$\|\chi_{i\varepsilon}^k\|_{C^{(2)}[0,T]} \leqslant K_\chi \quad (i, k = 1, 2), \tag{4.6}$$

$$\rho_{i\varepsilon}(t, 0) \geqslant \frac{\delta}{2}, \ \rho_{i\varepsilon}(t, 1) \leqslant -\frac{\delta}{2} \quad (i = 1, 2), \tag{4.7}$$

$\chi_{i\varepsilon}^k(t)$ 满足零級、一級、二級接触条件（見 §1 附注二）．根据定理一和附注二知道边値問題 (4.4)(4.5) 的解存在，它对 x 的四阶微商和对 t 的二阶微商在 $\bar{R}$ 上連續，且 $|u_{i\varepsilon}(t, x)| \leqslant M_0$ $(i = 1, 2)$．为了証明定理，我們先証明一系列引理．

引理 4.1 在 $\bar{R}$ 上

$$\left|\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial x}\right| \leqslant E_1, \tag{4.8}$$

其中 E_1 是与 ε 无关的常数．

証 对方程組(4.4)微商，并令 $p_{i\varepsilon} = e^{-\alpha t}\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial x}$，得到

$$\varepsilon\frac{\partial^2 p_{i\varepsilon}}{\partial x^2} = \frac{\partial p_{i\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{i\varepsilon}(t, x)\frac{\partial p_{i\varepsilon}}{\partial x} + \alpha p_{i\varepsilon} + A_{i\varepsilon}(t, x)p_{i\varepsilon} + \\ + B_{i\varepsilon}(t, x)p_{j\varepsilon} + C_{i\varepsilon}(t, x), \tag{4.9}$$

其中 $|A_{i\varepsilon}(t, x)| \leqslant K_\rho + K_\psi$, $|B_{i\varepsilon}(t, x)| \leqslant K_\psi$, $|C_{i\varepsilon}| \leqslant K_\psi$.

考慮函数 $\max\limits_{i=1,2} \{p_{i\varepsilon}^2(t, x)\}$, 如果它在$R$的內点$A$上取到最大値,不妨設 $p_{1\varepsilon}^2(t, x)|_A = \max\{p_{i\varepsilon}^2(t, x)\}|_A$, 則 $p_{1\varepsilon}^2$ 也在A上取最大値,而且 $p_{1\varepsilon}^2|_A \geqslant p_{2\varepsilon}^2|_A$, 由(4.9)知道

$$[\alpha p_{1\varepsilon}^2 + A_{1\varepsilon}p_{1\varepsilon}^2 + B_{1\varepsilon}p_{1\varepsilon}p_{2\varepsilon} + C_{1\varepsilon}p_{1\varepsilon}]|_A \leqslant 0,$$

取α充分大,就得到 $p_{1\varepsilon}^2$ 的与 ε 无关的界. 如果 $\max\limits_i \{p_{i\varepsilon}^2(t, x)\}$ 在 $x = 0$ 的A点上取最大値,不妨設 $p_{1\varepsilon}^2(t, x)|_A = \max\{p_{i\varepsilon}^2(t, x)\}$, 則 $p_{1\varepsilon}\dfrac{\partial p_{1\varepsilon}}{\partial x}\Big|_A \leqslant 0$. 令 $w_{i\varepsilon} = u_{i\varepsilon}e^{-\alpha t}$, 由(4.4)知道

$$0 \geqslant \varepsilon p_{1\varepsilon}\frac{\partial p_{1\varepsilon}}{\partial x} = \varepsilon p_{1\varepsilon}\frac{\partial^2 w_{1\varepsilon}}{\partial x^2} = p_{1\varepsilon}\left[\frac{\partial w_{1\varepsilon}(t;0)}{\partial t} + \rho_{1\varepsilon}(t, 0)p_{1\varepsilon} + \alpha w_{1\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \psi(t, 0, \chi_1^1(t), \chi_1^2(t))e^{-\alpha t}\right],$$
$$\rho_{1\varepsilon}(t, 0)|p_{1\varepsilon}| \leqslant \max|\chi_1^{i\prime}(t)| + \alpha\max|\chi_1^i(t)| + K_\psi,$$

所以在A上

$$\max\{p_{i\varepsilon}^2\}|_A = p_{1\varepsilon}^2|_A \leqslant \left\{\frac{2[K_\chi(1+\alpha) + K_\psi]}{\delta}\right\}^2. \tag{4.11}$$

如果 $\max\{p_{i\varepsilon}^2(t, x)\}$ 在 $x = 1$ 上取最大値,只需注意到(4.7)的第二式同样可以得到估計(4.11). 如果 $\max\{p_{i\varepsilon}^2(t, x)\}$ 在 $t = 0$ 上取最大値,則

$$\max\{p_{i\varepsilon}^2(t,x)\} \leqslant K_\varphi^2.$$

綜合以上情况,立即得到(4.8).

用类似的方法容易得到以下引理

引理 4.2 在 $\bar{R}$ 上

$$\left|\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t}\right| \leqslant E' \quad (i = 1, 2). \tag{4.13}$$

引理 4.3 在 $\bar{R}$ 上

$$\left|\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial x\,\partial t}\right| \leqslant E_2', \quad \left|\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial x^2}\right| \leqslant E_2 \quad (i = 1, 2).$$

引理 4.4 在 $\bar{R}$ 上

$$\left|\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}}{\partial t^2}\right| \leqslant E_2'' \quad (i = 1, 2).$$

其中 E_1', E_2', E_2, E_2'' 都是与 ε 无关的常数.

回到定理四的証明. 由引理 4.1—4.4 得到 $\{u_{i\varepsilon}\}$ $(i = 1, 2)$ 是 $C^{(1)}(\bar{R})$ 的紧致集合,可以抽出一串序列 $u_{i\varepsilon_n}$ $(i = 1, 2)$ 在 $C^{(1)}(\bar{R})$ 中一致收斂于 $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$, $u_i(t, x) \in C^{(1,1)}(\bar{R})$. 由(4.4)按上述序列取极限后知道 $u_i(t, x)$ 满足方程(0.1),满足边条件和初条件是显然的.

边値問題(II)(III)的存在性可以利用定理四得到. 例如考慮边値問題(III),我們可以将 $\rho_i(t, x)$, $\varphi_i(x)$ $\psi_i(t, x, u_i, u_j)$ $(i, j = 1, 2, i \neq j)$ 开拓到 R_2: $\{0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, 并使它們在 R_2 上满足定理四的所有条件,使 $\rho_i(t, 2) \leqslant -\delta < 0 (i = 1,2)$. 在 $x = 2$ 上給出满足接触条件并属于 $C^{(1,1)}[0, T]$ 的边値. 由定理四知道在 $\bar{R}_2$ 上开拓后的边値問題解是存在的,它在 $\bar{R}$ 上即为問題(III)的解.

唯一性的証明：我們以边值問題（III）为例。如果边值問題（0.1）（3.1）（3.3）有两組解 (u_1^1, u_2^1) 和 (u_1^2, u_2^2)，用类似于定理一和下面的証明方法可以估計出 $|u_i^j(t, x)| \leqslant M_0$ $(i, j=1, 2)$。令 $w_1 = u_1^1 - u_1^2$，$w_2 = u_2^1 - u_2^2$，w_1, w_2 滿足方程組

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + \rho_1(t, x)\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \widetilde{C}_{11}(t, x)w_1 + \widetilde{C}_{12}(t, x)w_2 = 0 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} + \rho_2(t, x)\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \widetilde{C}_{21}(t, x)w_1 + \widetilde{C}_{22}(t, x)w_2 = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

其中 $\widetilde{C}_{ii} = \int_0^1 \psi'_{iu_i}(t, x, \tau u_i^1 + (1-\tau)u_i^2, u_j^1)\,d\tau$，$\widetilde{C}_{ij}(t, x) = \int_0^1 \psi'_{iu_j}(t, x, u_i^2, \tau u_j^1 + (1-\tau)u_j^2)\,d\tau$ $(i, j=1, 2, i \neq j)$。由于 $|u_i^j| \leqslant M_0$，所以 $\widetilde{C}_{ii}$ 和 $\widetilde{C}_{ij}$ 都是有界的。令 $\widetilde{w}_i = w_i e^{-\alpha t}$ $(i=1, 2)$，考虑函数 $\max\limits_i \{\widetilde{w}_i^2(t, x)\}$，取 α 充分大，可以知道它不能在內部取到正的最大値。$w_i|_{t=0} = 0$，$w_i|_{x=0} = 0$，所以也不能在 $x=0$，$t=0$ 上取正最大値。如果在 $x=1$ 的 A 点上取正最大値，不妨設 $\widetilde{w}_1^2 = \max\limits_i \{\widetilde{w}_i\}|_A$，則 $\widetilde{w}_1^2$ 也在 A 上取正最大値，$\widetilde{w}_1^2|_A \geqslant \widetilde{w}_2^2|_A$，$\left.\dfrac{\partial \widetilde{w}_1^2}{\partial t}\right|_A \geqslant 0$，$\left.\dfrac{\partial \widetilde{w}_1^2}{\partial x}\right|_A \geqslant 0$。注意到 $\rho(t, 1) \geqslant 0$，由（4.16）知道

$$\alpha\widetilde{w}_1^2 + \widetilde{C}_{11}(t, x)\widetilde{w}_1^2 + \widetilde{C}_{12}w_1w_2 \leqslant 0 \tag{4.17}$$

当 α 充分大时右边是大于零的，所以 $\max\{\widetilde{w}_i^2\}$ 也不可能在 $x=1$ 上取正最大値。因此，$\widetilde{w}_1 = \widetilde{w}_2 \equiv 0$，証毕。

§5. 边値問題（IV）—（VII）

对于边界問題（IV）我們只需考虑 $d(t) \equiv 1$ 的情况。

定理五 如果边値問題（0.1）（3.1）（3.4）滿足以下条件：

i）对于 $(x, t) \in \bar{R}$ 和 u_1, u_2 的任意値

$$(\xi_1 \xi_2)\begin{pmatrix} C_{ii} & \beta_i C_{ij} \\ \beta_i C_{ji} & C_{jj} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \geqslant -C_0(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \tag{5.1}$$

其中 $\beta_1 = \max\{1, 2\max|c(t)|\}$，$\beta_2 = \dfrac{1}{\beta_1}$，$C_0$ 是一常数，(ξ_1, ξ_2) 是任意的实向量；

ii）—iii）同定理四，只需将 M_0 改为

$$M_0 = e^{\alpha T}\max\left\{\frac{\beta_1 \max\limits_{\bar{R}} |\psi_1(t, x, 0, 0)|}{\alpha - \frac{3}{2}C_0}, \frac{\max \psi_2(t, x, 0, 0)}{\alpha - \frac{3}{2}C_0}, \max|\varphi_2(x)|, \right.$$

$$\left. \beta_1 \max|\varphi_1(x)|, \beta_1 \max|\chi_1^1(t)|, \max|\chi_1^2(t)|, 2\max|\chi_2(t)| + 6\right\}$$

$$\left(\alpha > \frac{3}{2}C_0\right);$$

iv）$\rho_i(t, x)$ 滿足边値問題（IV）所叙述的条件；

v）$\chi_1^i(t)$，$\chi_2(t)$ $(i=1, 2)$ 属于 $C^{(1,1)}[0, T]$，$C(t)$ 属于 $C^{(1,1)}[0, T]$；

vi）滿足接触条件

$$\chi_1^i(0) = \varphi_i(0) \ (i=1, 2), \quad \chi_2(0) = C(0)\varphi_1(1) + \varphi_2(1), \tag{5.2}$$
$$\chi_1^{i\prime}(0) + \rho_1(0, 0)\varphi_1'(0) + \psi_i(0, 0, \varphi_i(0), \varphi_j(0)) = 0 \ (i=1, 2),$$

$$\chi_2^{i\prime}(0) + [C(0)\varphi_1'(1) + \varphi_2'(1)]\,\rho_2(0,1) + C(0)[\rho_1(0,1) - \\ - \rho_2(0,1)]\,\varphi_1'(1) - C'(0)\varphi_1'(1) + C(0)\psi_1(0,1,\varphi_1(1),\varphi_2(1)) + \\ + \psi_2(0,1,\varphi_2(1),\varphi_1(1)) = 0 \quad (i=1,2). \tag{5.3}$$

则边值問題(0.1)(3.1)(3.4)在 $C^{(1)}(\bar{R})$ 中有唯一的解 $u_i(t,x)$ $(i=1,2)$ 存在，且 $u_i(t,x)\in C^{(1,1)}(\bar{R})$.

証 同样考虑方程組(4.4)，边值条件和初值条件为

$$\begin{cases} u_{i\varepsilon}(0,x)=\varphi_i(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ i=1,2, \\ u_{i\varepsilon}(t,0)=\chi_{1\varepsilon}^i(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ i=1,2, \\ C_\varepsilon(t)u_{1\varepsilon}(t,1)+u_{2\varepsilon}(t,1)=\chi_{2\varepsilon}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $C_\varepsilon(t)$, $\chi_{2\varepsilon}(t)$ 在 $C^{(1)}[0,T]$ 上一致逼近于 $C(t)$, $\chi_2(t)$. 而且

$$\|\chi_{2\varepsilon}\|_{C^{(2)}[0,T]}\leqslant K_\chi,\ \|C_\varepsilon\|_{C^{(2)}[0,T]}\leqslant K_C,\ |C_\varepsilon(t)|\leqslant \max_{[0,T]}|C(t)|.$$

$\chi_{2\varepsilon}(t)$ 满足零級、一級、二級接触条件. 对函数 $\rho_{2\varepsilon}(t,x)$, $\psi_{2\varepsilon}(t,x,u_i,u_j)$, $\varphi_{2\varepsilon}(x)$, $\chi_{1\varepsilon}^i(t)$ 的要求与 § 4 相同，只需将(4.7)改为

$$\rho_{2\varepsilon}(t,0)\geqslant\frac{\delta}{2}>0,\ \ \rho_{2\varepsilon}(t,1)\leqslant-\frac{\delta}{2}<0;$$

而且存在与 ε 无关的 γ 使当 $1-\gamma<x<1$ 时，$\rho_{2\varepsilon}(t,x)\leqslant-\dfrac{\delta}{4}$.

我們預先将 $\rho_1(t,x)$, $\psi_1(t,x,u_1,u_2)$, $\varphi_1(x)$ 开拓到 R_2:$\{0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，使当 $x>\dfrac{5}{4}$ 时 $\rho_1(t,x)\equiv 0$，同时它們在 R_2 上满足定理五的条件 i)—iii). 然后造函数(如同 § 4 的要求) $\rho_{1\varepsilon}(t,x)$, $\psi_{1\varepsilon}(t,x,u_1,u_2)$, $\varphi_{1\varepsilon}(x)$ 在 R_2 逼近于它們. 当 ε 充分小时，$\rho_{1\varepsilon}(t,x)$ 在 $x>\dfrac{3}{2}$ 时恆为零，$\rho_{1\varepsilon}(t,0)\geqslant\dfrac{\delta}{2}$.

对于在 R 中对 x 三次連續可微的函数 $f(t,x)$ 我們按下式开拓到 $\bar{R}_2$

$$f(t,x)=(2-x)\left\{f(1,t)-\sum_{i=1}^{3}(x-1)^{i-1}\left[e^{-K_i(t)(x-1)}-e^{-\bar{K}_i(t)(x-1)}\right]\right\},\ \text{当}\ x>1\ \text{时}, \tag{5.6}$$

其中 $\bar{K}_1(t)=\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,t)\right|+|f(1,t)|+1$, $K_1(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,t)+f(1,t)+\bar{K}_1(t)$, 令 $a(t)=K_1^2(t)-\bar{K}_1^2(t)+2K_1(t)-2K_1(t)$, 取

$$\bar{K}_2(t)=\frac{1}{2}\left(|a_1(t)|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,t)\right|+1\right),$$

$$K_2(t)=\frac{1}{2}\left(a_1(t)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,t)\right)+\bar{K}_2(t),$$

再令 $a_2(t)=3(K_2^2(t)-\bar{K}_2^2(t))+(K_1^3(t)-\bar{K}_1^3(t))+6(K_2(t)-\bar{K}_2(t))+3(K_1^2(t)-\bar{K}_1^2(t))$, 取

$$\bar{K}_3(t)=\frac{1}{6}\left(|a_2(t)|+\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,t)\right|+1\right),$$

$$K_3(t)=\frac{1}{6}\left(a_2(t)+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,t)\right)+\bar{K}_3(t).$$

这种开拓具有以下性质

i) $f(t, x)$ 在 R_2 上对 x 三次連續可微;

ii) $f(t, 2) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T;$ (5.7)

iii) $|f(t, x)| \leqslant |f(1, t)| + 3,$ (5.8)

$$\frac{\partial^k f(t, x)}{\partial x^k} \leqslant L_{k,k} \left|\frac{\partial^k f(t, 1)}{\partial x^k}\right| + L_{k,k-1}\left|\frac{\partial^{k-1} f(t, 1)}{\partial x^{k-1}}\right|^2 + \cdots + L_{k,0},\ x > 1,$$
$$i = 1, 2, 3, \tag{5.9}$$

其中 $L_{k,l}(k, l=1, 2, 3, k \geqslant l)$ 是常数. 在証明这两估計式时只需注意到 $K_i(t), \bar{K}_i(t) > 0$ 和不等式 $x^p e^{-x} \leqslant p^p e^{-p}(x > 0)$. 为了以后叙述簡便, 我們称此开拓为"$\{T\}$ 开拓".

我們还引进以下符号: 对于 (t, x) 的有界区域 Q 上两点 $p_1(t', x')$, $p_2(t'', x'')$, 記 $d(p_1, p_2) = (|x' - x''|^2 + |t' - t''|)^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}
&|u|_0 = \sup_Q |u|, \quad |u|_\alpha = |u|_0 + \sup_{\substack{p_1, p_2 \in Q \\ p_1 \neq p_2}} \frac{|u(p_1) - u(p_2)|}{[d(p_1, p_2)]^\alpha},\ 0 < \alpha < 1, \\
&|u|_{1+\alpha} = |u|_\alpha + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\alpha, \\
&|u|_{2+\alpha} = |u|_{1+\alpha} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{1+\alpha} + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_\alpha, \\
&|u|_{3+\alpha} = |u|_{2+\alpha} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{2+\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

相应于范数 $|u|_{k+\alpha}$ 的 Banach 空間記作 $C_{k+\alpha}(Q)$.

将方程 (4.3) 作如下变換

$$\begin{pmatrix} v_{1\varepsilon} \\ v_{2\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_\varepsilon(t) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1\varepsilon} \\ u_{2\varepsilon} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u_{1\varepsilon} \\ u_{2\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -C_\varepsilon(t) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1\varepsilon} \\ v_{2\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

$v_{1\varepsilon}$, $v_{2\varepsilon}$ 滿足以下方程組

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{\partial^2 v_{1\varepsilon}}{\partial x^2} = \frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{1\varepsilon}(t, x)\frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} + \bar{\psi}_{1\varepsilon}(t, x, v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}), \\
&\varepsilon \frac{\partial^2 v_{2\varepsilon}}{\partial x^2} = \frac{\partial v_{2\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{2\varepsilon}(t, x)\frac{\partial v_{2\varepsilon}}{\partial x} + C_\varepsilon(t)(\rho_{1\varepsilon}(t, x) - \rho_{2\varepsilon}(t, x))\frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} - \\
&\qquad - C'_\varepsilon(t) v_{1\varepsilon} + \bar{\psi}_{2\varepsilon}(t, x, v_{2\varepsilon}, v_{1\varepsilon}),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $\bar{\psi}_{1\varepsilon}(t, x, v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}) = \psi_{1\varepsilon}(t, x, v_{1\varepsilon}, -C_\varepsilon(t)v_{1\varepsilon} + v_{2\varepsilon})$,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{2\varepsilon}(t, x, v_{2\varepsilon}, v_{1\varepsilon}) = {} & C_\varepsilon(t)\psi_{1\varepsilon}(t, x, v_{1\varepsilon}, -C_\varepsilon(t)v_{1\varepsilon} + v_{2\varepsilon}) + \\
& + \psi_{2\varepsilon}(t, x, -C_\varepsilon(t)v_{1\varepsilon} + v_{2\varepsilon}, v_{1\varepsilon}).
\end{aligned}$$

初条件和边条件为

$$\begin{cases}
v_{1\varepsilon}|_{t=0} = \varphi_{1\varepsilon}(x),\ v_{2\varepsilon}|_{t=0} = C_\varepsilon(0)\varphi_{1\varepsilon}(x) + \varphi_{2\varepsilon}(x) = \tilde{\varphi}_{2\varepsilon}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
v_{1\varepsilon}|_{x=0} = \chi^1_{1\varepsilon}(t),\ v_{2\varepsilon}|_{x=0} = C_\varepsilon(t)\chi^1_{1\varepsilon}(t) + \chi^2_{1\varepsilon}(t) = \tilde{\chi}^2_{1\varepsilon}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\
v_{2\varepsilon}|_{x=1} = \chi_{2\varepsilon}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.
\end{cases} \tag{5.13}$$

我們先証明以下命題 (A): 在 $C_{3+\alpha}(\bar{R}_2)$ 中有函数 $v_{1\varepsilon}$、 在 $C_{3+\alpha}(\bar{R})$ 中有函数 $v_{2\varepsilon}$ 存在, 将 $v_{2\varepsilon}$ 按照"$\{T\}$ 开拓"开拓到 $\bar{R}_2$ 上, 它們分别是以下边值問題的解:

$$\begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 v_{2\varepsilon}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v_{2\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{2\varepsilon}(t, x)\dfrac{\partial v_{2\varepsilon}}{\partial x} + C_\varepsilon(t)(\rho_{1\varepsilon} - \rho_{2\varepsilon})\dfrac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} - \\
\qquad - C'_\varepsilon(t) v_{1\varepsilon} + \bar{\psi}_{2\varepsilon}(t, x, v_{2\varepsilon}, v_{1\varepsilon}), (t, x) \in R, \\
v_{2\varepsilon}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_{2\varepsilon}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
v_{2\varepsilon}|_{x=0} = \tilde{\chi}^2_{1\varepsilon}(t),\ v_{2\varepsilon}|_{x=1} = \chi_{2\varepsilon}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T;
\end{cases} \tag{5.14}$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 v_{1\varepsilon}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{1\varepsilon}(t, x) \dfrac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} + \bar{\psi}_{1\varepsilon}(t, x, v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}), \ (t, x) \in \bar{R}_2, \\
v_{1\varepsilon}|_{t=0} = \varphi_{1\varepsilon}(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \\
v_{1\varepsilon}|_{x=0} = \chi_{1\varepsilon}^1(t), \ v_{1\varepsilon}|_{x=2} = \beta_\varepsilon(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{cases}
\tag{5.15}
$$

其中 $\beta_\varepsilon(t)$ 是一个充分光滑的函数,并且滿足零級、一級、二級接触条件,$|\beta_\varepsilon(t)| \leqslant M_0 e^{-\alpha T}$, $\|\beta_\varepsilon(t)\|_{C^{(2)}}$ 对 ε 一致有界.

此命題的証明見附录. 为簡单起見我們将 $v_{1\varepsilon}$, $v_{2\varepsilon}$ 称为問題(A)的解.

引理 5.1 对問題(A)的解 $v_{1\varepsilon}$, $v_{2\varepsilon}$ 有下列估計

$$
|v_{i\varepsilon}| \leqslant \frac{3}{2} M_0, \ |u_{i\varepsilon}| \leqslant M_0, \ (i = 1, 2). \tag{5.16}
$$

証 令 $\bar{v}_{1\varepsilon} = \beta_1 v_{1\varepsilon} e^{-\alpha t}$, $\bar{v}_{2\varepsilon} = v_{2\varepsilon} e^{-\alpha t}$, $\bar{u}_{2\varepsilon} = u_{2\varepsilon} e^{-\alpha t}$. $\bar{v}_{1\varepsilon}$ 和 $\bar{u}_{2\varepsilon}$ 所滿足的方程是

$$
\begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \bar{v}_{1\varepsilon}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \bar{v}_{1\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{1\varepsilon}(t, x) \dfrac{\partial \bar{v}_{1\varepsilon}}{\partial x} + \alpha \bar{v}_{1\varepsilon} + \beta_1 \psi_{1\varepsilon}\left(t, x, \dfrac{1}{\beta_1} \bar{v}_{1\varepsilon} e^{\alpha t}, e^{\alpha t} \bar{u}_{2\varepsilon}\right), \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \bar{u}_{2\varepsilon}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \bar{u}_{2\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{2\varepsilon}(t, x) \dfrac{\partial \bar{u}_{2\varepsilon}}{\partial x} + \alpha \bar{u}_{2\varepsilon} + \psi_{2\varepsilon}\left(t, x, e^{\alpha t} \bar{u}_{2\varepsilon}, \dfrac{1}{\beta_1} e^{\alpha t} \bar{v}_{1\varepsilon}\right).
\end{cases}
$$

考虑函数 $\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\}$

i) 如果它在 R 的内点 A 取到最大値,则在 A 上有

$$
\alpha \bar{v}_{1\varepsilon}^2 + C_{11}^\varepsilon(t, x, u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \bar{v}_{1\varepsilon}^2 + \beta_1 C_{12}^\varepsilon(t, x, u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \bar{v}_{1\varepsilon} \bar{u}_{2\varepsilon} + \beta_1 f(t, x) e^{-\alpha t} \bar{v}_{1\varepsilon} \leqslant 0 \tag{5.18}
$$

或

$$
\alpha \bar{u}_{2\varepsilon}^2 + C_{22}^\varepsilon(t, x, u_{2\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) \bar{u}_{2\varepsilon}^2 + \frac{1}{\beta_1} C_{21}^\varepsilon(t, x, u_{2\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) \bar{v}_{1\varepsilon} \bar{u}_{2\varepsilon} + f_{2\varepsilon}(t, x) e^{-\alpha t} \bar{u}_{2\varepsilon} \leqslant 0 \tag{5.19}
$$

由此得到

$$
\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\}|_A \leqslant \left[\max\left\{\frac{\beta_1 \max|\psi_1(t, x, 0, 0)|}{\alpha - \frac{3}{2} C_0}, \ \frac{\max|\psi_2(t, x, 0, 0)|}{\alpha - \frac{3}{2} C_0}\right\}\right]^2. \tag{5.20}
$$

ii) 如果 $\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\}$ 在 $\{1 \leqslant x < 2, 0 < t \leqslant T\}$ 的点 A 上取到最大値,又若在 A 上 $\bar{v}_{1\varepsilon}^2|_A = \max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\}|_A$, 則由 (5.18) 同样可以得到估計 (5.20). 若 $\bar{u}_{2\varepsilon}^2|_A = \max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\}|_A$, 則 $|\bar{u}_{2\varepsilon}\|_A \geqslant |v_{1\varepsilon}\|_A$. 由(5.11)知道 $\bar{u}_{2\varepsilon} = -\dfrac{C_\varepsilon(t)}{\beta_1} \bar{v}_{1\varepsilon} + \bar{v}_{2\varepsilon}$, 因此在 A 上

$$
\left|\frac{C_\varepsilon(t)}{\beta_1}\right| |\bar{v}_{1\varepsilon}| + |\bar{v}_{2\varepsilon}| \geqslant |\bar{v}_{1\varepsilon}|,
$$

而 $\left|\dfrac{C(t)}{\beta_1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, 所以由(5.8)得到

$$
|\bar{v}_{1\varepsilon}\|_A \leqslant 2|\bar{v}_{2\varepsilon}\|_A \leqslant 2 \max|\chi(t)| + 6,
$$

于是

$$
\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\}|_A = \bar{u}_{2\varepsilon}^2|_A \leqslant 4[\max|\chi_2(t)| + 3\}^2.
$$

iii) 如果在 $x = 2$ 取最大値,由 ii) 知道

$$
\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\} \leqslant \{\max[\max|\beta_\varepsilon(t)|, 2\max|\chi_2(t)| + 6]\}^2 \leqslant (M_0 e^{-\alpha r})^2.
$$

iv) 如果在 $t = 0$ 上取最大値,則

$$
\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\} \leqslant \{\max[2\max|\chi_2(t)| + 6, \ \beta_1 \max|\varphi_{1\varepsilon}|, \max|\varphi_{2\varepsilon}|]\}^2.
$$

v) 如果在 $x = 0$ 上取最大値,則

$$
\max\{\bar{v}_{1\varepsilon}^2, \bar{u}_{2\varepsilon}^2\} \leqslant \{\max[\beta_1 \max|\chi_{1\varepsilon}^1(t)|, \max|\chi_{1\varepsilon}^2(t)|]\}^2.
$$

綜合以上情况就得到所要的估計.

引理 5.2 对在 $\bar{R}_3$: $\left\{0 \leqslant x \leqslant 1\frac{7}{8},\ 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 上問題 A 的解 $v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}$, 我們有估計

$$\left|\frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x}\right| \leqslant E_1 \ (i = 1, 2), \tag{5.21}$$

其中 E_1 是与 ε 无关的常数.

証 令 $\bar{p}_{1\varepsilon} = \beta p_{1\varepsilon} = \beta \frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} e^{-\alpha t}$, $\bar{p}_{2\varepsilon} = \frac{\partial v_{2\varepsilon}}{\partial x} e^{-\alpha t}$, $\bar{q}_{2\varepsilon} = \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial x} e^{-\alpha t}$. 由 (5.17) 微分得到

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{p}_{1\varepsilon}}{\partial x^2} &= \frac{\partial \bar{p}_{1\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{1\varepsilon}(t, x) \frac{\partial \bar{p}_{1\varepsilon}}{\partial x} + \alpha \bar{p}_{1\varepsilon} + \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial u_1} \bar{p}_{1\varepsilon} + \\ &\quad + \frac{\partial \rho_{1\varepsilon}}{\partial x} \bar{p}_{1\varepsilon} + \beta \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial u_2} \bar{q}_{2\varepsilon} + \beta \frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{q}_{2\varepsilon}}{\partial x^2} &= \frac{\partial \bar{q}_{2\varepsilon}}{\partial t} + \rho_{2\varepsilon}(t, x) \frac{\partial \bar{q}_{2\varepsilon}}{\partial x} + \alpha \bar{q}_{2\varepsilon} + \frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial u_2} \bar{q}_{2\varepsilon} + \frac{\partial \rho_{2\varepsilon}}{\partial x} \bar{q}_{2\varepsilon} + \\ &\quad + \frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial u_1} \frac{1}{\beta} \bar{p}_{1\varepsilon} + \frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial x}. \end{aligned}\right. \tag{5.22}$$

首先估計 $\bar{p}_{2\varepsilon}$ 在 $x = 1$ 上的界. 在区域 $\left\{1 - \frac{1}{K} \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 上考慮輔助函数

$$W_1(t, x) = w_{2\varepsilon}(t, x) - e^{-\alpha t}\chi_{2\varepsilon}(t) + 2M_0K(x - 1) \tag{5.23}$$

其中 $w_{2\varepsilon}(t, x) = v_{2\varepsilon}(t, x)\, e^{-\alpha t}$, $K = \max \left\{\frac{4}{2M_0\delta} [(C_0 + 1) K_\psi + K_c M_0 + K_\chi + 2K_\rho C_0 \max\limits_{\bar{R}} \left|\frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x}\right| e^{-\alpha t}, \frac{1}{2M_0} \max|\varphi'_{2\varepsilon}(x)|, \frac{1}{\gamma}\right\}$, $C_0 \geqslant \max |C_\varepsilon(t)|$. 由(5.15)得到

$$\begin{aligned} LW_1 &= \varepsilon \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} - \frac{\partial W_1}{\partial t} - \rho_{2\varepsilon}(t, x) \frac{\partial W_1}{\partial x} - \alpha W_1 = \\ &= C_\varepsilon(t) (\rho_{1\varepsilon} - \rho_{2\varepsilon}) \frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} e^{-\alpha t} - C_\varepsilon(t) v_{1\varepsilon} c^{-\alpha t} + C_\varepsilon(t) \psi_1 e^{-\alpha t} + \psi_2 e^{-\alpha t} + \\ &\quad + e^{-\alpha t}[\chi^1_{2\varepsilon}(t)] - 2M_0K\rho_{2\varepsilon} - 2M_0\alpha K(x - 1) > 0. \end{aligned}$$

因此, W_1 不可能在 $\left\{1-\frac{1}{K} \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 的内点取最大值, 而在 $x=1$ 上 $W_1=0$, 在 $t = 0$ 上 W_1 是遞增的, 在 $x = 1 - \frac{1}{K}$ 上 $W_1 \leqslant 0$. 这样, W_1 在 $x = 1$ 处处取最大値, 于是

$$\left.\frac{\partial W_1}{\partial x}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial W_{2\varepsilon}}{\partial x}\right|_{x=1} + 2M_0K \geqslant 0, \tag{5.24}$$

$$\left.\frac{\partial W_{2\varepsilon}}{\partial x}\right|_{x=1} \geqslant -2M_0K \geqslant -\Delta_1 - \frac{8K_\rho C_0}{\delta} \max_{\bar{R}} |p_{1\varepsilon}|,$$

以后总以 Δ_K 記与 ε 无关的常数. 同样考慮輔助函数

$$W_2(t, x) = w_{2\varepsilon}(t, x) - e^{-\alpha t}\chi_{2\varepsilon}(t) - 2M_0K(x - 1), \tag{5.25}$$

可以得到 $\bar{p}_{2\varepsilon}$ 在 $x = 1$ 的上界, 于是我們在 $x = 1$ 上得到估計

$$|p_{2\varepsilon}| \leqslant \Delta_1 + \frac{8K_\rho C_0}{\delta} \max_{\overline{R}} |\overline{p}_{1\varepsilon}|.$$

作二次連續可微的連續函数 $\zeta_1(x)$，在 $0 \leqslant x \leqslant 1\frac{7}{8}$ 上 $\zeta_1(x) \equiv 1$，在 $x \geqslant 2$ 上 $\zeta_1(x) \equiv 0$，而且 $\zeta(x)$ 是下降函数. 令 $z_{1\varepsilon} = \zeta^2(x)\overline{p}_{1\varepsilon}^2 + K(\beta v_{1\varepsilon} e^{-\alpha t} - 2\beta M_0 e^{-\alpha t})^2$，$z_{2\varepsilon} = \zeta_1^2(x)\overline{q}_{2\varepsilon}^2$，在 $0 < x < 1$ 內，$z_{2\varepsilon}$ 滿足方程

$$\frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial^2 z_{2\varepsilon}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial q_{2\varepsilon}}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial z_{2\varepsilon}}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_{2\varepsilon}(t, x)\frac{\partial z_{2\varepsilon}}{\partial x} + \alpha z_{2\varepsilon} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial u_1}\overline{p}_{1\varepsilon}\overline{q}_{2\varepsilon} +$$
$$+ \left(\frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial u_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) z_{2\varepsilon} + \frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial x}\overline{q}_{2\varepsilon}, \tag{5.27}$$

在 $0 < x < 2$ 內，$z_{1\varepsilon}$ 滿足方程

$$\begin{aligned} Lz_{1\varepsilon} &= \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2 z_{1\varepsilon}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z_{1\varepsilon}}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_{1\varepsilon}(t, x)\frac{\partial z_{1\varepsilon}}{\partial x} = \\ &= \varepsilon\left(\zeta_1(x)\frac{\partial \overline{p}_{1\varepsilon}}{\partial x} + 4\zeta_1'(x)\overline{p}_{1\varepsilon}\right)^2 + \zeta_1^2(x)\left[\alpha\overline{p}_{1\varepsilon}^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{\partial \rho_{1\varepsilon}}{\partial x}\right)\overline{p}_{1\varepsilon}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \beta\frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial u_2}\overline{q}_{2\varepsilon}\overline{p}_{1\varepsilon} + \beta\frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial x}\overline{p}_{1\varepsilon}\right] - \frac{1}{2}\rho_{1\varepsilon}[\zeta_1^2(x)]' p_{1\varepsilon}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d^2\zeta_1^2}{dx^2}p_{1\varepsilon}^2 - \\ &\quad - 16\varepsilon[\zeta'(x)]^2 p_{1\varepsilon}^2 + \varepsilon K\overline{p}_{1\varepsilon}^2 + K[\alpha(\beta v_{1\varepsilon} - 2\beta M_0)^2 + \\ &\quad + \psi_{1\varepsilon}(t, x, u_1, u_2)(\beta v_{1\varepsilon} - 2\beta M_0)]e^{-2\alpha t}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

考慮函数 $\max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}$ 在区域 $\{0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的最大値：

i）如果它在 R 的內点 A 取最大値，如果 $z_{2\varepsilon}|_A = \max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}|_A$，則在 A 上 $\overline{q}_{2\varepsilon}^2|_A \geqslant \overline{p}_{1\varepsilon}^2|_A$，用前面的一般方法由 (5.27) 可以得到

$$|z_{2\varepsilon}| \leqslant \frac{K_\psi}{\alpha - 2K_\psi - K_\rho},$$

其中 $\alpha > 2K_\psi - K_\rho$. 如果 $z_{1\varepsilon}|_A = \max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}|_A$，注意到 $-\frac{\rho_{1\varepsilon}(t, x)}{2}[\zeta_1^2(x)]' \equiv 0$，与引理 2.1 的証明类似，只需取 α, K 充分大就可以得到 $z_{1\varepsilon}|_A$ 与 ε 无关的界.

ii）如果 $\max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}$ 在 $\{1 \leqslant x \leqslant 2, 0 < t \leqslant T\}$ 上取最大値，又 $z_{1\varepsilon}|_A = \max\{z_{2\varepsilon}, z_{1\varepsilon}\}|_A$，則它的估計与 i) 的第二种情形相同. 如果 $z_{2\varepsilon}|_A = \max\{z_{2\varepsilon}, z_{1\varepsilon}\}_A$，則在 A 上 $|\overline{q}_{2\varepsilon}| \geqslant |\overline{p}_{1\varepsilon}|$，所以在 A 上

$$|\overline{p}_{1\varepsilon}| \leqslant |\overline{q}_{2\varepsilon}| \leqslant \left|\frac{C_\varepsilon(t)}{\beta}\right| |\overline{p}_{1\varepsilon}| + |\overline{p}_{2\varepsilon}|,$$

而由(5.9)(5.26)得到

$$|p_{2\varepsilon}||_A \leqslant L_{11}|\overline{p}_{2\varepsilon}|_{x=1} + L_{10} \leqslant L_{11}\frac{8K_\rho C_0}{\delta\beta}\max_{\overline{R}}|\overline{p}_{1\varepsilon}| + \Delta_2.$$

令 $\beta = \max\left\{2\max|C_\varepsilon(x)|, \frac{32L_{11}K_\rho C_0}{\delta}\right\}$，則在 A 上

$$\max_{\overline{R}}|p_{1\varepsilon}| \leqslant 2|\overline{p}_{2\varepsilon}| \leqslant L_{11}\frac{16K_\rho C_0}{\beta}\max_{\overline{R}}|\overline{p}_{1\varepsilon}| + 2\Delta_2,$$

$$\max_{\overline{R}}|\overline{p}_{1\varepsilon}| \leqslant 4\Delta_2.$$

于是

$$\max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}|_A \leqslant |\bar{q}_{2\varepsilon}\|_A \leqslant (4\Delta_2)^2.$$

iii) 如果在 $x=0$ 的 A 点上取到最大值，又 $z_{2\varepsilon}|_A = \max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}|_A$，注意到 $x=0$ 附近 $q_{2\varepsilon}^2 = z_{2\varepsilon}$，$\dfrac{\partial q_{2\varepsilon}^2}{\partial x} \leqslant 0$，用引理 4.1 的方法不难得到所要的估計. 如果 $z_{1\varepsilon}|_A = \max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}|_A$，注意到在 A 上

$$2\bar{p}_{1\varepsilon}\frac{\partial \bar{p}_{1\varepsilon}}{\partial x} \leqslant -2K(\beta v_{1\varepsilon}e^{-\alpha t} - 2\beta M_0 e^{-\alpha t})\bar{p}_{1\varepsilon} \leqslant 6\beta M_0 K|\bar{p}_{1\varepsilon}|,$$

用引理 4.1 的方法也可得到 $\max\{z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}\}$ 的估計.

iv) 如果在 $t=0$ 和 $x=2$ 上取最大值，其界可以立即得到.

綜合以上情况就可以得到估計式 (5.21).

引理 5.3 在 R_4: $\left\{0 \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{4}, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 上

$$\varepsilon\left|\frac{\partial^2 v_{i\varepsilon}}{\partial x^2}\right| \leqslant \bar{E}_2, \quad \left|\frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial t}\right| \leqslant E_1', \tag{5.29}$$

其中 $\bar{E}_2$, E_1' 是与 ε 无关的常数.

証 由方程 (5.14)(5.15) 知道在 $x=1$ 上和在 $x=0$ 上

$$\varepsilon\left|\frac{\partial^2 v_{2\varepsilon}}{\partial x^2}\right|_{x=1} \leqslant \tilde{E}_2, \quad \varepsilon\left|\frac{\partial^2 v_{i\varepsilon}}{\partial x^2}\right|_{x=0} \leqslant \tilde{E}_2 \quad (i=1,2),$$

用引理 5.1 和 5.2 的方法可以得到 $\varepsilon\dfrac{\partial^2 v_{i\varepsilon}}{\partial x^2}$ 的估計，从而立即得到 $\dfrac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial t}$ 的估計.

引理 5.4 在 R_5 $\left\{0 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 上

$$\varepsilon\left|\frac{\partial^2 v_{i\varepsilon}}{\partial x^3}\right| \leqslant E_3, \quad \left|\frac{\partial^2 v_{i\varepsilon}}{\partial x^2}\right| \leqslant E_2, \quad \left|\frac{\partial^2 v_{i\varepsilon}}{\partial x\partial t}\right| \leqslant E_2', \tag{5.30}$$

其中 E_3, E_2, E_2' 都是与 ε 无关的常数.

証 其估計方法与引理 5.2 类似. 令

$$\begin{aligned} &r_{1\varepsilon} = \frac{\partial^2 v_{1\varepsilon}}{\partial x^2}e^{-\alpha t}, \ \bar{r}_{1\varepsilon} = \beta r_{1\varepsilon}, \ r_{2\varepsilon} = \frac{\partial^2 v_{2\varepsilon}}{\partial x^2}e^{-\alpha t}, \ \bar{r}_{2\varepsilon} = \frac{\partial^2 u_{2\varepsilon}}{\partial x^2}e^{-\alpha t} \\ &s_{1\varepsilon} = \varepsilon\frac{\partial^3 v_{1\varepsilon}}{\partial x^3}e^{-\alpha t}, \ \bar{s}_{1\varepsilon} = \beta s_{1\varepsilon}; \ s_{2\varepsilon} = \varepsilon\frac{\partial^3 v_{2\varepsilon}}{\partial x^3}e^{-\alpha t}, \ \bar{s}_{2\varepsilon} = \varepsilon\frac{\partial^3 u_{2\varepsilon}}{\partial x^3}e^{-\alpha t} \\ &h_{1\varepsilon} = \frac{\partial^2 v_{1\varepsilon}}{\partial x\partial t}e^{-\alpha t}, \ h_{2\varepsilon} = \frac{\partial^2 v_{2\varepsilon}}{\partial x\partial t}e^{-\alpha t}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

首先必須估計 $r_{2\varepsilon}$ 在 $x=1$ 上的界. 我們已有了 $\dfrac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial t}$ 的估計. 与引理 5.2 的估計式 (5.26) 类似可以得到

$$|h_{2\varepsilon}|_{x=1} \leqslant \Delta_3 + \frac{8K_\rho C_0}{\delta}\max_{\bar{R}}|h_{1\varepsilon}|. \tag{5.32}$$

現在估計 $r_{2\varepsilon}|_{x=1}$，在 $\left\{1-\dfrac{1}{K} \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 上考虑輔助函数

$$W_1 = \bar{p}_{2\varepsilon}(t, x) - \bar{p}_{2\varepsilon}(t, 1) + 2E_1K(x-1), \tag{5.33}$$