征求意見本

高級中学課本

三　角

全一册

（初稿）

人民教育出版社

一九六五年四月

高級中学課本三角

目　录

第一章　三角函数

1.1 角的概念的推广　在平面几何里已經知道，角可以看作是由一条射綫繞着它的端点旋轉而形成的．我們已經学过0°到360°的角．在研究某些自然现象和工程技术时，还需要有大于360°的角的概念．例如，要研究图1.1中的机械轉柄，繞着軸旋轉了一周后，继續旋轉的情况，就需要有大于360°的角的概念．这就是說，机械轉柄繞着軸旋轉下去，我們就可以得到任意大小的角．

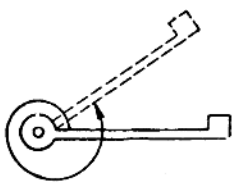


图　1.1

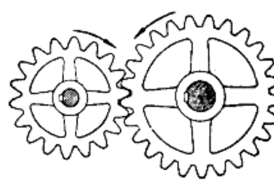


图　1.2

我們还可以看到角的形成带有方向的現象．例如，图1.2是相互衔接的两个齿輪，其中一个旋轉一个角，另一个也旋轉一个角，但是它們旋轉的方向是相反的．为了研究或者解决实际問題的需要，我們把由不同的旋轉方向所形成的角加以区别．习惯上規定：**按着反时針方向旋轉所得的角是正角；按着順时針方向旋轉所得的角是負角．**

这样，角的概念不但包含0°的角和任意大小的正角，也包含任意大小的負角．例如，图1.3中以x軸的正方向为始边的角$\alpha=390^\circ, \beta=-330^\circ, \gamma=-110^\circ$．

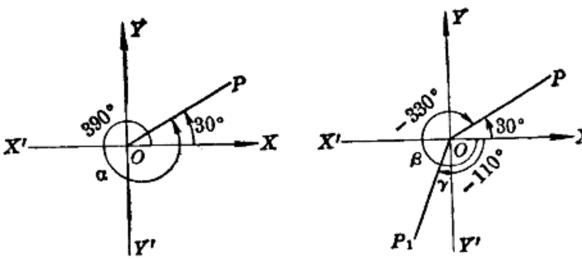


图 1.3

由图 1.3, 我們可以看到: 390° 角和 −330° 角都跟 30° 角的終边相同. 390° 可以写成 360°+30°, −330° 可以写成 −360° +30°. 除这两个角外, 跟 30° 角終边相同的还有下列度数的角: 2·360°+30°、−2·360°+30°、3·360°+30°、−3·360°+30°、….

所有跟 30° 角終边相同的角, 連同 30° 角在內, 可以用式子 $k\cdot360°+30°$ ($k=0$、±1、±2、…)来表示. 例如, 在这个式子里, 如果 $k=0$, 它就表示 30° 角, 如果 $k=+1$ 或者 -1, 它就表示 360°+30°(就是 390°)或者 −360°+30°(就是 −330°)的角.

一般地說, 所有跟 α 角終边相同的角, 連同 α 角在內, 可以用下面的式子来表示:

$$k\cdot360°+\alpha.\ (k\ 是整数)$$

如果角的始边是 x 軸的正方向, 那么終边所在的象限, 就叫做这个角所在的象限. 如图 1.3 角 α 的始边就是 x 軸的正方向, 終边 OP 在第 I 象限, 所以角 α 在第 I 象限. 又如, 角 β 在第 I 象限, 角 γ 在第 III 象限.

例 1 把下列各角化成 $k\cdot360°+\alpha$ 的形式 (k 是整数, $0°\leqslant\alpha<360°$):

(1) 1000°;　(2) −325°;　(3) −1080°.

解　(1) $1000° = 2\cdot 360° + 280°$;

(2) $-325° = (-1)\cdot 360° + 35°$;

(3) $-1080° = (-3)\cdot 360° + 0°$.

例 2　求下列各角所在的象限：(1) 870°；(2) −1000°.

解　(1) $870° = 2\cdot 360° + 150°$.

因为 150° 在第Ⅱ象限，所以 870° 在第Ⅱ象限.

(2) $-1000° = (-3)\cdot 360° + 80°$.

因为 80° 在第Ⅰ象限，所以 −1000° 在第Ⅰ象限.

1.2 弧度制　量角的大小，除了用角度制以外，还經常用弧度制(也叫弳制). 弧度制是用弧度作单位来量角，把等于半徑长的弧所对的圆心角叫做**1 弧度的角**. 如图 1.4，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半徑 R，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角 AOB 就是 1 弧度的角.

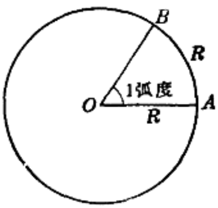


图　1.4

因为圆的周长等于半徑的 2π 倍，所以整个圆所对的圆心角是 2π 弧度，也就是一个周角(360°)等于 2π 弧度. 由此，很容易看到角度与弧度之間有如下的对应关系：

角　　度	360°	180°	90°	60°	45°	30°
弧　　度	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

根据关系式：

$$\boxed{180° = \pi \text{ 弧度},}$$

可以进行度和弧度的换算.

例 1 把 $112°30'$ 化成弧度(保留四个有效数字).

解 $\because$ $180°=\pi$ 弧度, $\therefore$ $1°=\frac{\pi}{180}$ 弧度.

$$112°30'=112\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\text{弧度}=\frac{5\pi}{8}\text{弧度}\approx 1.964\text{ 弧度}.$$

例 2 把$\frac{3\pi}{5}$弧度化成度.

解 $\because$ $180°=\pi$ 弧度, $\therefore$ 1 弧度$=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$.

$$\frac{3\pi}{5}\text{弧度}=\frac{3\pi}{5}\times\frac{180°}{\pi}=108°.$$

要求得度和弧度换算的近似值,还可以直接查“四位数学用表”. 查表的方法可以看表中所附的說明.

在用弧度来量角时,“弧度”两字通常略去不写. 例如$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$就表示$\angle AOB$等于$\frac{\pi}{2}$弧度, $\angle\alpha=1.2$ 就表示 $\angle\alpha$ 等于 1.2 弧度.

采用了弧度制以后, 因为 1 弧度的圆心角所对的弧长等于半徑 R, 所以 α 弧度的圆心角所对的弧长 l 就等于 αR(图 1.5). 由此得出計算弧长的公式:

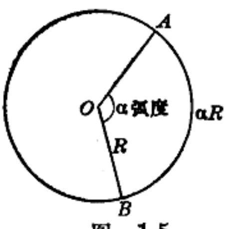


图 1.5

$$\boxed{l=\alpha R.}$$

例 3 已知在半徑等于 120cm 的圆上,一条弧的长是145.5cm, 求这弧所对的圆心角的度数.

解 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{145.5}{120}=1.2125$(弧度).

1.2125 弧度 $=69°29'$

答：这条弧所对的圆心角是 $69°29'$.

习 题 一

1. 作出下列各角：

(1) $450°$; (2) $-150°$; (3) $-690°$.

2. (口答)用一般的形式写出跟下列各角終边相同的一切角：

(1) $60°$; (2) $135°$; (3) $-30°$.

3. 化下列各角成 $k\cdot360°+\alpha$ 的形式（k 是整数，$0°\leqslant\alpha<360°$）：

(1) $660°$; (2) $-2860°$; (3) $-18°30'$; (4) $1800°$.

4. (口答)求跟下列各角終边相同的 $0°$ 到 $360°$ 的角：

(1) $750°$; (2) $-585°$; (3) $-1000°$.

5. (口答)求下列各角所在的象限：

(1) $-60°$; (2) $210°$; (3) $780°$;

(4) $-930°$; (5) $(2k+1)180°+45°$（k 是整数）.

6. 把度化成弧度：

(1) $18°$; (2) $-75°$; (3) $420°$;

(4) $900°$; (5) $-22°30'$; (6) $-750°$.

7. 把弧度化成度：

(1) $\frac{\pi}{12}$; (2) $-\frac{3\pi}{4}$; (3) $\frac{25\pi}{6}$;

(4) $-\frac{4}{3}\pi$; (5) $-\frac{27}{10}\pi$; (6) -12π.

8. 化下列各角成 $2k\pi+\alpha$ 的形式（k 是整数，$0\leqslant\alpha<2\pi$）：

(1) $\frac{35}{6}\pi$; (2) -5π; (3) $-45°$; (4) $390°$.

9. (口答)用弧度表示:

(1) 終边在 x 軸上的角的一般形式;

(2) 終边在 y 軸上的角的一般形式.

10. 利用四位数学用表,把度化成弧度:

(1) $39^\circ 43'$; (2) $57^\circ 38'$;

(3) $168^\circ 15'$; (4) $352^\circ 17'$.

11. 利用四位数学用表,把弧度化成度:

(1) 0.6270; (2) 0.3874;

(3) 3.1579; (4) -0.2973.

12. (1) 一个飞輪每秒旋轉 n 周,求每秒旋轉多少弧度.

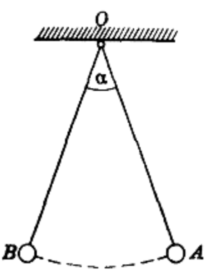
(2) 如果这个飞輪每轉一周需 T 秒钟,求每秒轉多少弧度.

13. (口答)設圓的半徑是 R, α 弧度的圓心角所对的弧长是 l. (1) 用 α 和 R 表示 l; (2) 用 α 和 l 表示 R; (3) 用 l 和 R 表示 α.

14. (1) 在半徑約等于 22.5 cm 的圓上,一条弧所对的圓心角是 40.5°,求这条弧的长.

(2) 已知长 5.2 cm 的弧約含有 18°,求这弧所在的圓的半徑.

(3) 已知圓的半徑約等于 2.4 m,求这圓上长 4.1 m 的弧所含的度数.



(第15題)

15. 如图,单摆从 A 点运动到 B 点轉动的角 α 为 0.182 弧度. 已知单摆的摆长为 0.472 m,求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长.

1.3 任意角的三角函数 任意角的三角函数的定义跟初中几何中所說的相同. 設 α 是任意大小的一个角. 以这个角的頂

点O为坐标原点，这个角的始边为横坐标軸的正方向，作横坐标軸$X'X$和纵坐标軸$Y'Y$(图1.6). 在角α的終边上任意取一点P，設这点的横坐标是x，纵坐标是y，原点到这点的距离是r. 横坐标x与纵坐标y的符号跟以前規定的一样，距离r总把它作为正的. 那么α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是:*

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$
$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y};$$
$$\sec\alpha=\frac{r}{x};$$
$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}.$$

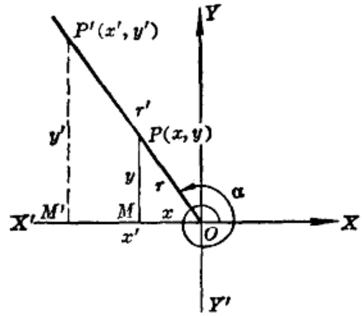


图 1.6

对于α的每一个确定的值，不管P点在終边上的位置怎样，上面的六个比都有确定的值和α对应（如图1.6的$\triangle OP'M'\backsim\triangle OPM$，从而$x':x=y':y=r':r$）；但是当$\alpha$角的終边在$x$軸上，就是$\alpha=k\pi$($k$是整数)时，那么$\frac{x}{y}$和$\frac{r}{y}$两个比不存在(因为这时$y=0$)；当$\alpha$角的終边在$y$軸上，就是$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$($k$是整数)时，那么$\frac{y}{x}$和$\frac{r}{x}$两个比不存在(因为这时$x=0$). 因此，上面六个比都是$\alpha$的函数，它們都叫做$\alpha$的**三角函数**；$\sin\alpha$和$\cos\alpha$中，自变量$\alpha$的取值范圍是全部实数；$\operatorname{tg}\alpha$和$\sec\alpha$中，$\alpha$的取值范圍是不等于$k\pi+\frac{\pi}{2}$的所有实数，$\operatorname{ctg}\alpha$和$\operatorname{cosec}\alpha$中，$\alpha$的取值

* $\operatorname{tg}\alpha$也記作$\tan\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$也記作$\cot\alpha$; $\operatorname{cosec}\alpha$也記作$\csc\alpha$.

范围是不等于 $k\pi$ 的所有实数.

从三角函数的定义，可以看出正弦$\left(\frac{y}{r}\right)$和余割$\left(\frac{r}{y}\right)$对于第Ⅰ和第Ⅱ象限的角是正的($y>0,\ r>0$)，而对于第Ⅲ和第Ⅳ象限的角是負的($y<0,\ r>0$)；余弦$\left(\frac{x}{r}\right)$和正割$\left(\frac{r}{x}\right)$对于第Ⅰ和第Ⅳ象限的角是正的($x>0,\ r>0$)，而对于第Ⅱ和第Ⅲ象限的角是負的($x<0,\ r>0$)；正切$\left(\frac{y}{x}\right)$和余切$\left(\frac{x}{y}\right)$对于第Ⅰ和第Ⅲ象限的角是正的(x、y 同号)，而对于第Ⅱ和第Ⅳ象限的角是負的(x、y 异号). 因此，三角函数在各象限的符号可以概括成图 1.7（图内所列各种函数是正的，其余的函数是負的).

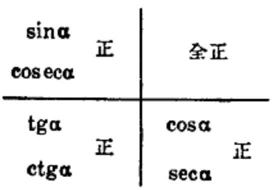


图 1.7

从三角函数的定义，我們还可以看到，所有終边相同的角的同一三角函数的值是相等的. 就是，对于任意角 α（只要是容許的）和任意整数 k 都有:

$$\sin(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\cos(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

上面这些公式可以概括成:

$k\cdot 360^\circ+\alpha$（就是 $2k\pi+\alpha$）的三角函数分别等于 α 的同函数.

例1　已知$\angle\alpha$的終边上的一点的坐标是$(-3, -4)$，求α的三角函数值.

解　如图1.8*，由$x=-3$、$y=-4$，得

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-3}=1\frac{1}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}=-1\frac{2}{3};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}=\frac{5}{-4}=-1\frac{1}{4}.$$

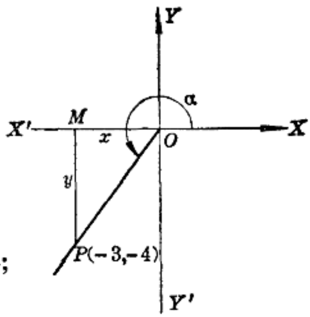


图　1.8

例2　决定下列各角的三角函数值的符号:

(1) $850°$,　　　(2) $-\frac{8\pi}{3}$.

解　(1) $850°=2\cdot360°+130°$，$850°$ 角是第Ⅱ象限的角，

$\therefore$　$\sin 850°$、$\operatorname{cosec} 850°$ 的值是正的，$850°$ 角的其他三角函数值是負的.

(2) $-\frac{8\pi}{3}=(-2)\cdot2\pi+\frac{4\pi}{3}$，$-\frac{8\pi}{3}$是第Ⅲ象限的角，

---

* 图1.8中的箭头只是表示了$\angle\alpha$的一种情形，实际上，所有以OX为始边、以OP为終边的角都是适合于本题的$\angle\alpha$. 以后在图1.9、1.10、1.11中也有同样的情况.

$\therefore\quad \operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$、$\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$的值是正的，$-\frac{8\pi}{3}$角的其他三角函数值是負的.

例 3 根据下列条件，确定 θ 角所在的象限：

$\sin\theta<0$，而 $\operatorname{tg}\theta>0$.

解 $\because\ \sin\theta<0,\ \therefore\ \theta$ 在第Ⅲ或第Ⅳ象限；

$\because\ \operatorname{tg}\theta>0,\ \therefore\ \theta$ 在第Ⅰ或第Ⅲ象限.

$\therefore$ 符合 $\sin\theta<0$ 且 $\operatorname{tg}\theta>0$ 的角 θ 在第Ⅲ象限.

例 4 求下列三角函数的值：

(1) $\sin 390°$，　　(2) $\operatorname{tg}\frac{7}{3}\pi$.

解 (1) $\sin 390°=\sin(360°+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$；

(2) $\operatorname{tg}\frac{7}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

1.4 用綫段表示三角函数 以坐标軸的原点 O 为圓心，以等于单位长的綫段为半徑所作的圓叫做**单位圓**. 为了便于研究三角函数的性质，我們利用和单位圓有关的綫段来表示三角函数.

如图 1.9，設单位圓和横坐标軸的正方向 OX 相交于 A 点，和纵坐标軸的正方向 OY 相交于 B 点，并且和角 α 的終边相交于 P 点(图中的 α 可以看作以 OP 为終边的一切角). 从 P 点作 $X'X$ 的垂綫 MP. 經过 A 点和 B 点分别作单位圓的切綫，并且延长 OP 或者 PO 和所作的两条切綫分别相交于 T 点和 S 点.

我們把图中的綫段(例如 MP、OM、OP、AT 和 BS 等等)都看作是有方向的綫段，横綫段的符号規定和横坐标的一样，纵綫

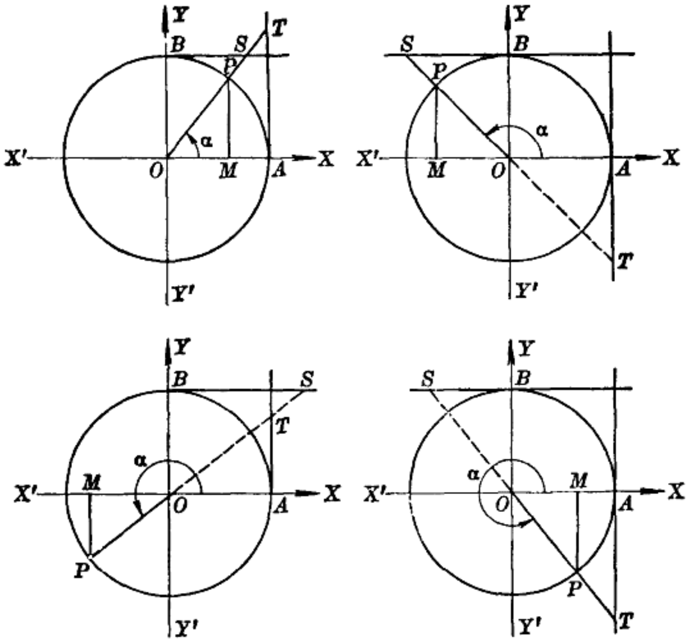


图 1.9

段的符号规定和纵坐标的一样，OP 总作为正的.

根据三角函数的定义，

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP},\ \ \cos\alpha=\frac{OM}{OP}.$$

因为 $OP=1$，所以 **$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值可以分别用单位圆中的有向綫段 MP 和 OM 来表示.**

其次，
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{OM}.$$

因为$\triangle OMP\backsim\triangle OAT$，又因为 MP 和 OM 的符号相同时，AT 和

OA 的符号也相同，MP 和 OM 的符号相反时，AT 和 OA 的符号也相反，所以

$$\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}.$$

因此
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AT}{OA}.$$

同样，我們可以得到

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{OM}{MP}=\frac{BS}{OB}.$$

因为 $OA=OB=1$，**所以 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值可以分别用单位圓中的有向綫段 AT 和 BS 来表示.**

用来表示 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的单位圓中的有向綫段 MP、OM、AT 和 BS 分别叫做角 α 的**正弦綫**、**余弦綫**、**正切綫**和**余切綫**.

习 題 二

1. 已知角 α 的頂点和原点重合，始边和 x 軸的正方向重合，終边上一点 P 的坐标是 $(-1, \sqrt{3})$，求出 α 的六个三角函数的值.

2. 求下列各角的三角函数值，把所得的結果填入下面的表內.

角 / 函数	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$
正　弦					
余　弦					

3. (口答)决定下列各函数的符号:

(1) $\cos 120^\circ$;　　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\operatorname{tg} 225^\circ$;　　(4) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$;

(5) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;　　(6) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

4. (口答)設 x 是三角形的一个內角,下列函数中哪几个可以取負值?

(1) $\sin x$; (2) $\cos x$; (3) $\operatorname{tg} x$; (4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

5. (口答)根据下列条件确定 θ 角所在的象限:

(1) $\sin\theta$ 是負值,而 $\cos\theta$ 是正值;

(2) $\sec\theta$ 和 $\operatorname{ctg}\theta$ 都是負值;

(3) $\sin\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 同号;　　(4) $\cos\theta\cdot\operatorname{tg}\theta<0$.

6. 决定下列各式的符号:

(1) $\sin 105^\circ\cdot\cos 195^\circ$; (2) $\operatorname{tg} 284^\circ\cdot\operatorname{ctg} 57^\circ$.

7. 把下列各三角函数化成 0° 到 360° 角的三角函数:

(1) $\sin 800^\circ$;　　(2) $\cos(-42^\circ)$;

(3) $\operatorname{tg}\frac{14\pi}{3}$;　　(4) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{2}$.

8. 在单位圓里,作出 30°、-210°、225° 和 690° 各角,然后量出这些角的正弦綫、余弦綫、正切綫和余切綫的长,并且指出它們的符号.

9. 設 α 是任意的銳角,利用单位圓說明:

(1) $0<\sin\alpha<1$;　　(2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

1.5 同角三角函数的基本关系式　根据三角函数的定义,可以得出一个角 α 的三角函数間的八个基本关系式.

(1) 倒数关系

$$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1;$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1.$$

就是

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1; &(\mathrm{I})\\&\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1; &(\mathrm{II})\\&\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. &(\mathrm{III})\end{aligned}}$$

(2) 商数关系

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

就是

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; &(\mathrm{IV})\\&\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. &(\mathrm{V})\end{aligned}}$$

(3) 平方关系

因为 $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2}.$

又 $$y^2+x^2=r^2.$$

所以 $$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=\frac{r^2}{r^2}=1.$$

就是 $$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

把 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的两边都除以 $\cos^2\alpha$, 可以得出:

$$\sec^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha+1.$$

同样, 把 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的两边都除以 $\sin^2\alpha$, 可以得出:

$$\mathrm{cosec}^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha+1.$$

就是

$$\boxed{\begin{array}{rl}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; & (\text{Ⅵ})\\ \sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha=1; & (\text{Ⅶ})\\ \mathrm{cosec}^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha=1. & (\text{Ⅷ})\end{array}}$$

应当注意, 上面的关系式, 只有当 α 的值使关系式的两边都有意义时才能成立. 如果 α 的值, 使关系式的任何一边失去意义, 那么关系式就不能成立. 例如当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ 没有意义, 关系式Ⅲ就不能成立.

利用同角三角函数的基本关系式, 可以把比较复杂的三角函数式化简.

例 1 化簡 $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\sec\alpha$.

解 $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}=\mathrm{cosec}\,\alpha.$

例 2 化簡 $\sqrt{\sec^2A-1}$.

解 $\sqrt{\sec^2A-1}=\sqrt{\mathrm{tg}^2A}=\begin{cases}\mathrm{tg}\,A(A\text{ 在第 Ⅰ、第 Ⅲ 象限时}),\\ -\mathrm{tg}A(A\text{在第Ⅱ、第Ⅳ象限时}).\end{cases}$

例 3 化簡 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\mathrm{cosec}\theta}$.