结构动力计祘与地震载荷

北京建筑工程学院

一九七八年三月

目录

第一章 概述

1—1 动力荷载

作静力计算时，均认为荷载是静止的作用结构上的。这种荷载称为静力荷载。静力荷载的大小与时间的变化没有关系。如果作用于结构上的荷载是随时间变化的，则称为动力荷载。受动力荷载作用的结构产生振动现象。

对于弹性结构，静力荷载与结构的内力、变形成正比关系。受动力荷载作用的结构的内力、变形与结构的动力性能关系很大，动力荷载与内力、变形间没有正比关系。有时很小的动力荷载作用就会产生很大的内力和变形。

地震荷载是地震作用于结构上的动力荷载。由于地震问题的复杂性，结构对地震的反应成为一个专门的动力学问题。

1—2 自由度

体系的自由度是指能够确定体系的所有质量在运动过程中位置的独立参数的个数。

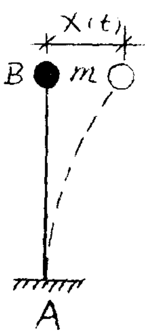


图1—1

图1—1中，AB为一无重、纵向变形可以忽略不计的弹性杆，自由端B有一质量m。质量m作横向振动时，其位置可用一个时间的位移函数X(t)确定，所以此单质点体系只有一个自由度。如再考虑固定端A的转动如图1—2所示，质量m位置的确定需要两

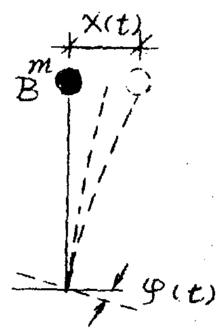


图1—2

个独立参另，即A端的转角$\varphi(t)$，B端的位移$X(t)$，所以体系有两个自由度。

图1—3a示质另m_1、m_2……m_n支承在下端固定的无重弹性支杆上，作横向振动时这n个质另的位移由$X_1(t)$、$X_2(t)$……$X_n(t)$ n个独立参另确定，所以此n个质另的弹性体系具有n个自由度。

图1—3b示抗弯刚度$EI=\infty$的梁支承在几个弹性支座上。当梁振动时，梁在任意时刻的位置可用线位移$y(t)$、$\varphi(t)$确定。所以体系具有两个自由度。

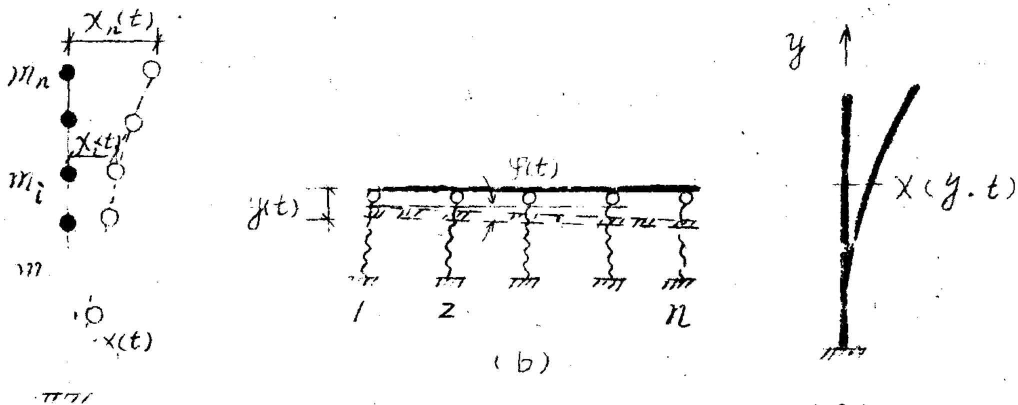


图1—3

图1—3C示一单位长度质另为ρ=常数的匀质弹性悬臂梁，则体系具有无穷多个自由度。

1——3达伦贝尔原理

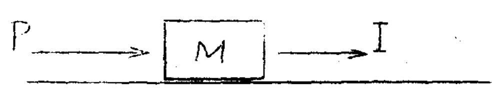


图 1—4

图1—4示一质另为M的物体放在光滑平台上，在力P的

作用下产生加速度 a，根据牛顿第二定律，

$$P = Ma$$

移项后得

$$P - Ma = 0$$

令 $I = -Ma$ 则

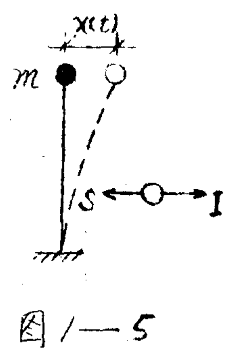
$$P + I = 0 \qquad \text{-------------(1—1)}$$

我们把I定义为质量M的惯性力。质量的惯性力大小等于它的质量与加速度的乘积，方向与加速度的方向相反。

用静力学观点看式（1—1），表示的是物体M在力P、I共同作用下平衡的方程。推广到一般情况，可表述为如下的结论：如果在振动的质点上加上惯性力，那末作用于质点的所有力（主动力和约束力）与惯性力成平衡。这个结论叫做达伦贝尔原理。

应当注意，对于振动的质量来说，惯性力是假想的，它并不作用在运动的质量上，所以质量也并不处于平衡状态。达伦贝尔原理提供了一种解决动力学问题的方法，这种方法即简单又方便，只需在运动的质点上加上惯性力后，便可用静力学原理解决动力学问题。为了区别于静力平衡，将称运动质量在作用力和惯性力共同作用下的平衡为动力平衡，或动平衡。而将这种解决动力学问题的方法称为动力平衡法，或动静法。

图1—5示一振动体系，弹性支杆的刚度系数为K（质量m产生单位水平位移所需的力），质量m的加速度为a，试建立m的振动方程。



解：应用达伦贝尔原理，质量m受两个力的作用：支杆的弹性恢复力 $S = KX$，惯性力 $I = -ma$，由 $\sum x = 0$，

$$S - I = 0$$

即：
$$Kx + ma = 0 \qquad \text{---------(1—2)}$$

图1—5

第二章 单自由度体系的振动

2—1 单自由度体系的自由振动

如图2—1所示，AB为一无重弹性悬臂梁，质量m集中在悬臂端，是一单质点单自由度体系。位置AB是质量m的静力平衡状态，即质量m在其重力$W=mg$及梁的支反力$R=mg$共同作用下平衡。

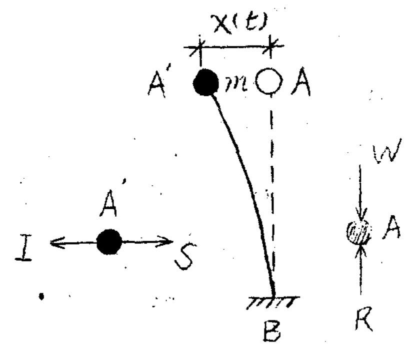


图2—1

当给质量m以初始侧移X_0或初始速度V_0后，它就在其静力平衡位置AB附近振动，并在振动过程中，不受任何外力的作用。故称自由振动。为了得到质量m的运动规律，对它在振动过程中的任一瞬时（如位置A'B）建立动平衡方程。显然，在竖直方向，质量m受重力W，支反力R二平衡力作用，不产生运动，没有研究的必要；在水平方向，质量m除受梁的弹性恢复力S作用外，根据达伦贝尔原理，还受惯性力I作用，并且二者使m在水平方向处于动平衡状态。因为S总是指向静力平衡位置，所以I总是背离静力平衡位置，如图2—1，应用$\Sigma X=0$得到

$$I-S=0$$

$$\because \quad I=-ma=-m\ddot{x}(t)^{①} \qquad S=Kx$$

$$\therefore \quad m\ddot{x}(t)+Kx(t)=0 \qquad \text{------------(2—1)}$$

---

① $\ddot{x}(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

式中：　m——振动质点的质量，等于其重量被重力加速度除。

K——梁的刚度系数，

t——时间。

式（2—1）便是单自由度体系自由振动微分方程。它的特征方程是：

$$m\gamma^2+K=0$$

$$\gamma^2=-\frac{K}{m}$$

$\because$　K、m均为正数．　令$\omega^2=\frac{K}{m}$

$\therefore$　$\gamma=\pm i\omega$

于是得到式（2—1）的解为

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \qquad \text{--------(2—2)}$$

式中：A、B为由初始条件确定的常数。假设振动体系有如下的初始条件：$t=0$时，质量m的水平位移（初始位移）$x=x_0$，速度（初始速度）$V=V_0$，由式（2—2）

$$x(0)=A=x_0$$

$$\because \quad V=\frac{dx(t)}{dt}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$$

$$\therefore \quad B\omega=V_0 \qquad B=\frac{V_0}{\omega}$$

$$\therefore \quad x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \qquad \text{--------(2—2)}'$$

式（2—2）′便是单自由度体系自由振动方程。

由式（2—2）′可以看出

一、体系的自由振动完全取决于它的初始位移和初始速度，当二者有一个不为零时，体系便会产生自由振动。

二、因为$\cos\omega t$，$\sin\omega t$都是周期函数，所以单自由

度体系的自由振动是周期性的，即一个侧移（大小和方向都相同）每经过一固定时间后便重复出现一次，这个固定时间叫做自由振动周期，简称自振周期或固有周期，以T表示，单位为秒。而一秒钟内一个侧移重复出现的次数叫做自振频率，以f表示，单位为次/秒，亦称赫兹。显然

$$T = \frac{1}{f} \qquad \text{-------------- (2—3)}$$

令 $x_1(t) = x_0 \cos \omega t \qquad x_2(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

作两个互相垂直的向量 $(\overrightarrow{\frac{v_0}{\omega}})$ $\overrightarrow{x_0}$，如图 2—2。

它们在x轴上的投影

$\overline{oa} = x_2(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

$\overline{ob} = x_1(t) = x_0 \cos \omega t$

二向量加法，$\overline{OA} = (\overrightarrow{\frac{v_0}{\omega}}) + \overrightarrow{x_0}$，

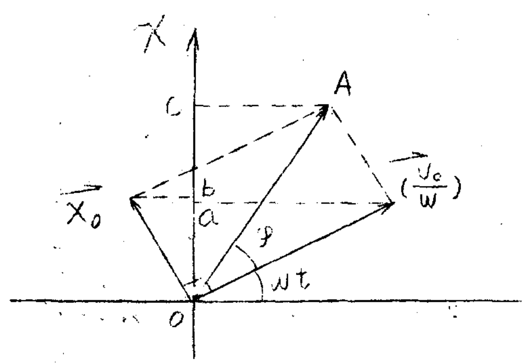


图 2—2

$\overline{OA}$在x轴上的投影$\overline{oc} = \overline{oa} + \overline{ob}$

即

$$\overline{oA} \sin(\omega t + \varphi) = x_1(t) + x_2(t)$$

又 $\overline{OA} = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$

$$\therefore \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

式中 $\varphi = tg^{-1}(\frac{x_0}{v_0} \omega)$

令 $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$

则得到用另一种形式表式的单自由度体系自由振动

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{---------- (2—2)''}$$

由式(2—2)″很容易看出，单自由度体系的自由振动是一简谐振动。式中

$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{V_0}{\omega})^2}$　称为振幅——振动体移的最大值；

$\varphi=tg^{-1}(\frac{x_0}{V_0}\cdot\omega)$　称为初相角。

由式(2—2)″还可以看出，当时间从t增加到(t+T)后体系完成一次振动，回复到时间t时的位置，从正弦函数图象上看等于角度由($\omega t+\varphi$)增加到($\omega t+\varphi+2\pi$)，这样，可得到如下的关系式

$$\omega(t+T)+\varphi=\omega t+\varphi+2\pi$$

即

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{-----------------}(2—3)'$$

对比式(2—3)、(2—3)′

$$\omega=2\pi f$$

显然，ω表示一个侧移在2π秒内重复出现的次数，称为体系的自振圆频率，工程上常简称为自振频率，单位为弧度／秒。由振幅的表达式可以看出，单自由度自由振动体系振幅的大小不但与初始位移和初始速度有关，还与体系的自振频率ω有关，可见自振频率ω或自振周期T是表示体系振动性能的一个很重要的参数，在结构动力计算中，ω或T的计算是一项很重要，对实际结构来说又是一项很复杂的工作。

由$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$可以看出，振动体系的质量越大，自振频率越小，振动体系的刚度越大，自振频率越大，这是容易理解的。

下面介绍单质点的单自由度体系自振周期的计算公式。

如图2—1所示，设质量m在单位水平力作用下的侧移为δ，称位移系数，则

$$K=\frac{1}{\delta}$$

$$\because \quad \omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\delta}}=\sqrt{\frac{g}{W\delta}}$$

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{W\delta}{g}} \qquad \text{-----------------}(2—4)$$

式中　W　质点的重量，$W=mg$

　　　g　重力加速度；

　　　δ　位移系数，可用图乘法计算。

式（2—4）中的 $W\delta$ 是将质量 m 的重量 W 水平作用于质量上，质量 m 产生的水平静力位移。令

$$x_{静}=W\delta$$

所以式（2—4）可以变成下面的形式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{x_{静}}{g}} \quad \text{------------(2—4)}'$$

求出体系的自振周期 T 后，质量 m 的运动规律就知道了，即

$$x(t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \qquad x(t)_{max}=A$$

加速度

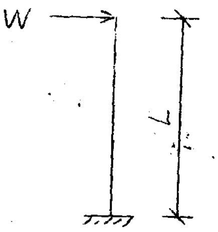
$$\ddot{x}(t)=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2x(t)$$

惯性力

$$I(t)=-m\ddot{x}(t)=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2mx(t) \qquad 或\ I(t)=\omega^2mx(t)$$

$$I(t)_{max}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2mA \qquad 或\ I(t)_{max}=\omega^2mA$$

例2—1．一钢悬臂梁，$L=1.5^m$，截面为 20^a I字形，



在自由端作用 $W=200Kg$ 集中力。略去梁的自重，试求梁的自振周期，自振频率。

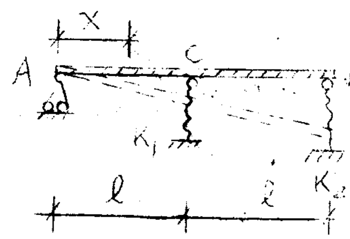
解：钢的弹性模量 $E=2.1\times10^6\,Kg/Cm^2$，I20a 惯性矩 $I=2370\ Cm^4$。

$$\delta=\frac{L^3}{3EI}=\frac{150^3}{3\times2.1\times10^6\times2370}=0.00023\,Cm/Kg$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{W\delta}{g}}=2\times3.14\sqrt{\frac{200\times0.00023}{981}}=0.043\text{秒}$$

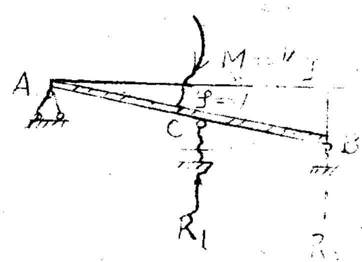
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{0.043}=146\text{弧度/秒}$$

例2—2 梁AB刚度EI=∞，单位长度质量为ρ，A端铰支，C、B为弹性支承，刚度系数分别为K_1、K_2，如图所示。求体系的自振频率。



解：梁AB绕A点作旋转振动时，体系的旋转刚度为$K\varphi$，（产生单位转角所须力偶）转动惯量

$$J_A=\int_0^{2l}\rho x^2dx=\rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2l}=\rho\frac{8}{3}l^3=\frac{8}{3}\rho l^3,$$



设体系受$M=K\varphi$力偶作用，这时转角$\varphi=1$，C、B弹性支承内产生反力分别用R_1、R_2表示。显然

$$R_1=K_1l \qquad R_2=2K_2l$$

由$\Sigma M_A=0$，$\therefore K\varphi=K_1l^2+4K_2l^2=(K_1+4K_2)l^2$，

体系自由振动微分方程为

$$J_A\ddot{\varphi}(t)+K\varphi\,\varphi(t)=0$$

自振频率

$$\omega=\sqrt{\frac{K\varphi}{J_A}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{(K_1+4K_2)l^2}{\frac{8}{3}\rho l^3}}=\sqrt{\frac{3(K_1+4K_2)}{8\rho l}}$$

2—2 考虑阻尼单自由度体系自由振动

在研究单自由度弹性体系的自由振动时，只考虑了惯性力和弹性恢复力对振动质量的作用。式（2—2）″描述了质量在静力平衡位置附近的振动规律，这样的振动一经发生，便可无限制的延续下去。这是一种假想的情况。事实是，随时间的延续，振动体系的振幅逐渐减少，最后静止下来，其原因为阻尼力的作用。

房屋结构和构件的阻尼作用，主要来自材料的非绝对弹性性质，即材料的不均匀性，在很小的应力状态下，也会产生微小的塑性变形；尤其是砼构件、砖砌体等在工作阶段往往带有很多的细小裂缝。结构振动时，裂缝中产生摩擦阻力；此外结构各构件间在连接处产生的摩擦阻力；空气阻力等对结构振动都会产生衰减作用。

考虑结构的阻尼作用时，通常采用粘滞阻尼假设，即假设结构所受的阻尼力与质点振动的速度成正比，即

$$R=\gamma\dot{x}(t)$$

式中　R　阻尼力，指向静力平衡位置；

　　　γ　阻尼系数，可由实验得到。

应用达伦贝尔原理，如图2—3所示，质量m在水平方向受三个力的作用：

惯性力 $I=-m\ddot{x}(t)$，

弹性恢复力 $S=Kx$，

阻尼力 $R=\gamma\dot{x}(t)$。

其动力平衡方程为

$$S+R-I=0$$

即　$m\ddot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t)+Kx(t)=0$

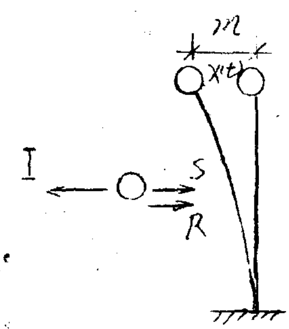


图2—3

或 $\ddot{x}(t)+2\varepsilon\dot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0$ ------(2—5)

式中 $2\varepsilon=\frac{\gamma}{m}$ $\omega^2=\frac{K}{m}$

式（2—5）就是考虑阻尼单自由度体系自由振动微分方程。它的特征方程为

$$\gamma^2+2\varepsilon\gamma+\omega^2=0$$

$$\gamma_{1,2}=-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}$$

当 $\varepsilon>\omega$ 时，即大阻尼的情况，这时

$$x(t)=Ae^{(-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2})t}+Be^{(-\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2})t},$$

或 $x(t)=e^{-\varepsilon t}(Ae^{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}\,t}+Be^{-\sqrt{\varepsilon^2-\omega^2}\,t})$ ----(2—6)

式中 A、B 为由初始条件确定的常数，为一非周期性函数，随时间增加，质易逐渐回到静力平衡位置，不发生振动。

当 $\varepsilon=\omega$ 时，$\gamma_{1,2}=-\varepsilon$，这时

$$x(t)=e^{-\varepsilon t}(C_1+C_2t)$$ ------(2—7)

式中 C_1、C_2 为由初始条件确定的常数

可见式（2—7）表示的运动也不是振动。

当 $\varepsilon<\omega$ 时，$\gamma_{1,2}=-\varepsilon\pm i\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}$ （$i=\sqrt{-1}$），这是小阻尼的情况，方程（2—5）的解为

$$x(t)=e^{-\varepsilon t}(A_1\cos\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}\cdot t+A_2\sin\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}\cdot t)$$

令 $\omega'=\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}$

$$x(t)=e^{-\varepsilon t}(A_1\cos\omega' t+A_2\sin\omega' t)$$

假设初始条件为

$t=0$ 时，　$x=x_0$，　$v=\dot{x}=v_0$

则有 $A_1=x_0$

$$\dot{x}(t)=-\varepsilon e^{-\varepsilon t}(A_1\cos\omega' t+A_2\sin\omega' t)+e^{-\varepsilon t}\omega'(-A_1\sin\omega' t+A_2\cos\omega' t),$$

$$-\varepsilon A_1+\omega' A_2=v_0$$

$$A_2=\frac{v_0+\varepsilon x_0}{\omega'}$$

于是 $x(t)=e^{-\varepsilon t}\left(x_0\cos\omega' t+\dfrac{v_0+\varepsilon x_0}{\omega'}\sin\omega' t\right)$ -----（2—8）

或 $x(t)=e^{-\varepsilon t}A\sin(\omega' t+\varphi)$ -------------（2—8）′

式中 $A=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{v_0+\varepsilon x_0}{\omega'}\right)^2}$，　$\varphi=tg^{-1}\dfrac{v_0+\varepsilon x_0}{\omega' x_0}$

式（2—8）′代表一衰减的简谐振动，如图2—4所示

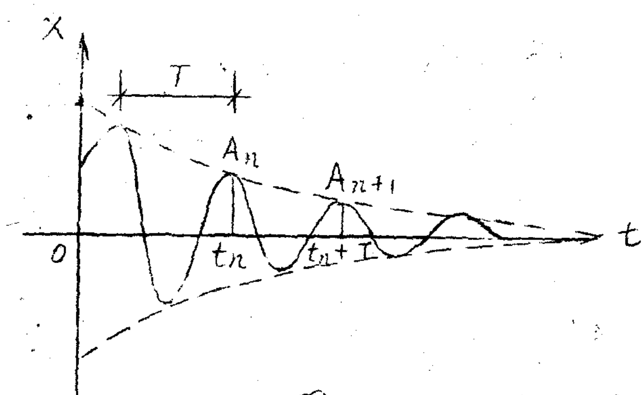


图2—4

通过方程（2—5）的解可以看出：

一、$\omega'=\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}>0$ 是考虑阻尼单自由度体系自由振动的充要条件。$\varepsilon=\omega$，即阻尼系数 $\gamma=2\omega m$ 是体系由衰减的简谐振动变为不发生振动的纯衰减运动的分界线。一般将阻尼 $\gamma=2\omega m$ 称为临界阻尼。令 $\xi=\dfrac{\gamma}{2\omega m}$，即体系的阻尼与其

临界阻尼的比值，所以一般称 ξ 为阻尼比。显然 $\xi=1$ 是体系的临界阻尼比，体系发生振动的条件为 $\xi<1$。

二、有阻尼体系的自振频率为 ω'，并且 $\omega'=\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}$，即考虑阻尼体系的自振频率 ω' 小于不考虑阻尼体系的自振频率 ω，或者说考虑阻尼体系的自振周期比不考虑阻尼体系的自振周期要长。对于一般房屋结构来说，$\varepsilon=(0.02\sim0.08)\omega$，阻尼对自振频率的影响很小，一般取 $\omega'=\omega$。

三、考虑阻尼体系自由振动的振幅为 $Ae^{-\varepsilon t}$。令 A_n 表示第 n 个周期的振幅，t_n 为振幅等于 A_n 时的时间，A_{n+1} 表示第 $(n+1)$ 个周期的振幅，对应 A_{n+1} 的时间则为 t_n+T。于是

$$A_n=Ae^{-\varepsilon t_n} \qquad A_{n+1}=Ae^{-\varepsilon(t_n+T)}$$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{Ae^{-\varepsilon t_n}}{Ae^{-\varepsilon(t_n+T)}}=e^{\varepsilon T}$$ 取对数

$$\ln\frac{A_n}{A_{n+1}}=\varepsilon T$$

εT 称为阻尼的对数递减量，是表示振幅衰减速度的一个量值。如已知 A_n，εT；A_{n+m} 可由下式求出

$$A_{n+m}=A_n e^{-\varepsilon T m} \qquad \text{----------}(2-9)$$

例2—3 单自由度体系作有阻尼自由振动，$\varepsilon T=0.02$，$A_0=X_0$，求振动100次后的振幅 A_{100}。

解：

$$A_{100}=x_0 e^{-0.02\times100}=x_0 e^{-2}=\frac{x_0}{7.4}$$

对有阻尼自由振动的振幅取极限，得

$$A_{t\to\infty}=\lim_{t\to\infty}Ae^{-\varepsilon t}=\lim_{t\to\infty}A\cdot\frac{1}{e^{\varepsilon t}}=0$$

即当时间经过很长时，由于阻尼的作用，自由振动将停止下来。这种现象从图2—4振幅的渐近线逼近于横座标 $X=0$ 也可以看出。

2—3 单自由度体系在简谐干扰力作用下的受迫振动

有一质量为 m 的单质点单自由度体系，体系的刚度系数 K，阻尼系数 γ，下端固定在地面上，地面作简谐振动，振动方程为

$$X_0(t)=\bar{X}_0 \sin\theta t \quad \text{--------} \quad (2—10)$$

如图2—5。

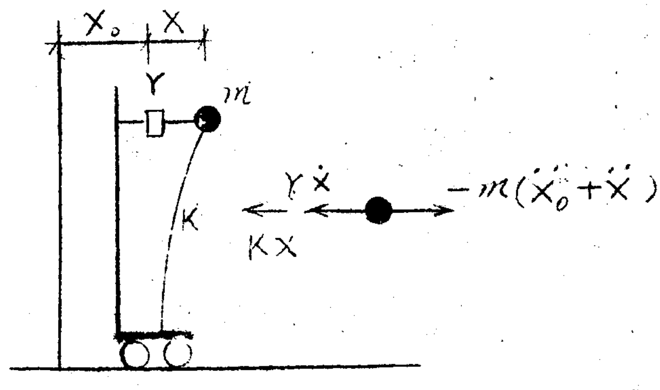


图2—5

则体系的振动微分方程为

$$KX+\gamma\dot{X}+m(\ddot{X}_0+\ddot{X})=0$$

或

$$\ddot{X}(t)+2\varepsilon\dot{X}(t)+\omega^2X(t)=-\ddot{X}_0(t) \quad \text{----} \quad (2—11)$$

式中：$\varepsilon=\dfrac{\gamma}{2m}$

$\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m}}$. 体系的自振频率