有限元素法专题集

北京航空学院四〇五教研室

一九八〇年四月

目录（有限元素法补充教材之一）

第一章　非线性问题

§1·1　引言

非线性问题在力学范圍內的应用十分广泛。其特性不可能用某些个别问题把它闡述淸楚。因此，这里只着重于固体力学中的非线性現象作些介紹。

非线性特性可以是由于材料受到靜力或动力的影响而产生的变形；可以是材料性質随时間的变化关系；可以是随温度的变化关系；可以是由于结构的形状变化，产生很大的位移，而使載荷改变了原有的分布及大小；可以是位移較小而产生接触应力所引起的；可以是由于平板弯曲位移超过其厚度所引起的；由于情况各不相同，提出的解法也很多，但尙无任何一种方法能够对所有各种类型的非线性问题都是有效的。

根据非线性的来源，我們可把固体力学中的非线性问题分为三类：材料（或物理）非线性问题，几何非线性问题，和材料与几何两者均涉及到的问题。

第一类问题，即单純的材料非线性问题，它較为易于说明。它所包含的问题是应力与应变不成比例，但只考虑小位移和小应变情况。所謂位移是指整个几何形状的变化，而应变是指內部的变形。材料在高載荷或高温度下进入塑性区之后，应力与应变关系就是非线性的，这种问题在工程上经常遇到，但是，多年以来只能对它的个别问题提出解决办法，而对絕大多数难题仍然是束手无策。有限元素法出現以后，把彈塑性问题的解决，向前推进了一大步，但对它的彻底认识和解决还相差很远。

第二类问题，即单純的几何非线性问题，这里我們只打算对大位移和大应变问题作些介紹，而于小应变和大位移的彈性屈曲特性，即常見的板壳稳定性，那是一个专門问题，这里不拟研究。

最后，第三类问题是前面两种类型的組合，所考虑的范圍更广泛。它涉及到大应变和有限位移，这种实例在航空上也是屢見不显的。但是它是前面两种类型的綜合作用，研究起来也并不是很难的。

由于处理上述三类非线性问题时所采用的方法，其基本道理相似，因此，在本章内我們把重点放在第一类问题上，即着重分析小位移和小应变的材料非线性问题上，它不仅较易理解，而且也是解决其他两类问题的基础。

材料非线性问题的有限元法分析，仍处于广泛研究的阶段。在这个领域内的主要限制是对材料内部的复杂机理很难完善的说明。这不只是每一种材料的性質差别很大，即或是同一种材料，它所受的載荷、温度、热处理、环境和时間的不同，其性能参数也是差别很大的。此外，至今还很少有滿意的实验结果和解析方法，能用来作为与有限元素法的结果进行比較。

§1·2 材料的性質

1、簡单加載与卸載

我們用金属材料作簡单拉伸試验的应力应变曲线，发現材料在初期施加拉伸載荷（称加載）时，試件随載荷的增加而伸长，应力（σ）与应变（ε）之間为线性关系（图1—1）。隨后若除去載荷（称卸載变形就消失，試件恢复到原来的长度。使$\sigma-\varepsilon$曲线保持线性关系的最大应力值称为比例极限（σ_b）。当应力超过被称为屈服极限（σ_s）时

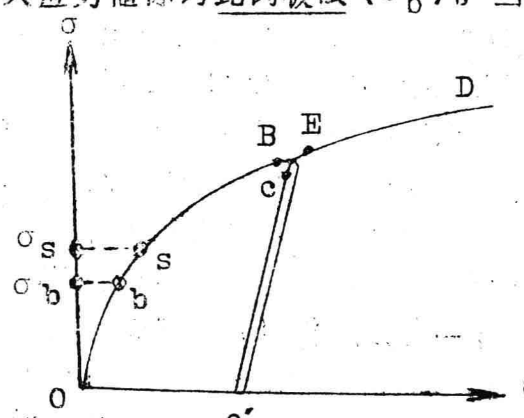

图1—1 σ～ε曲線

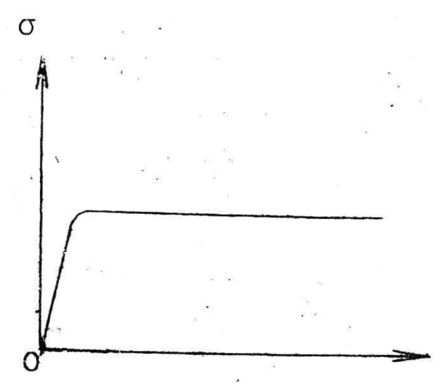

图1—2 完全塑性

时，即使卸去全部載荷，試件也不会恢复到原来的长度。这种不能恢复的永久变形称为塑性变形。由图1—1可見有$\sigma_s \geq \sigma_b$。

对于大多数金属，必須使应力进一步增加才能继续产生塑性变形，即应力应变曲线有$d\sigma/d\varepsilon > 0$的关系，这种現象称为应变强化或加

限

⑨

工硬化。如果进入屈服后，恒有$d\sigma/d\varepsilon=0$的关系（如图1—2），这种現象称为理想塑性或完全塑性的材料。有些材料进入大塑性区之后，会产生$d\sigma/d\varepsilon<0$的关系。

应該指出，对于彈塑性材料，在加載与卸載情況的应力应变曲线一般是不同的。若加載产生一定程度的塑性变形之后（图1—1中B点），再卸去全部載荷，这时卸載的应力应变曲线，将不再由原路徑B—s—b返回，而是按线性关系由B点退到O'点，并且BO'几乎平行于bo，这时产生的塑性变形（或称殘余应变）为$oo'=\varepsilon^p$，产生的彈性变形为$o'o_1=\varepsilon^e$，在B点的总应变量为$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p$。今由$o'$点再进行加載，则$\sigma-\varepsilon$曲线上的$o'c$线又几乎与卸載曲线$BO'$完全重合，在此范圍內是彈性变形，C点所对应的应力值，可視作材料具有永久变形oo'的新的比例极限。显然，这时的比例极限要比最初的σ_b大当应力接近于B点而达到E点后，继续加載的$\sigma-\varepsilon$曲线就按ED前进，这段曲线与一开始就加載到D点而不卸載的$\sigma-\varepsilon$曲线相差甚微。

为了討論方便，我們常常把$\sigma-\varepsilon$曲线簡化成图1—3的形状。首先計比例极限与屈服极限一致（即$\sigma_b=\sigma_s$），就是使b点与s点重合这样，材料一直到达s点都視为线性的彈性关系。当应力超过s点后，材料就进入塑性状态，此后的应力应变关系就是非线性关系了。其次計曲线中的B、C、E三点一致，并使co'与BO'重合且平行于bo。上述这样簡化过程仍然保留了彈塑性材料应力应变关系的基本特征，而有利于对它的研究。

2. 循环加載与卸載

我們将材料試件先作拉伸，使之进入塑性范圍，如图1—4所示，曲线上的点由$O\rightarrow S\rightarrow B$点，然后卸去載荷使变形退到$O'$点，产生了永久变形；今再继续加上負的載荷，使曲线到达C点，发現$O'C$仍然按彈性变形关系，并且有$BO'=O'C$，即$\sigma_B=\sigma_C$，由C点继续加上負的載荷，曲线按CD'前进，再卸去負

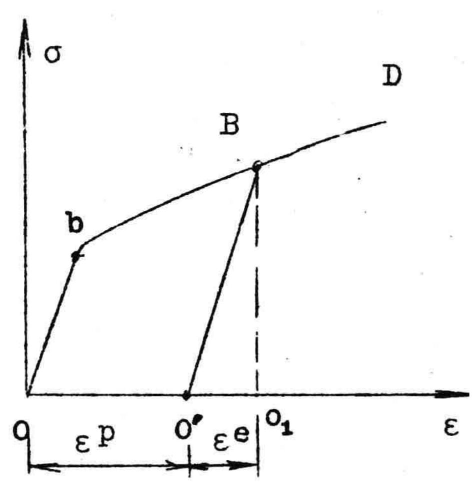

图 1—3

的载荷，曲线又按线性关系到达E′点。此时σ—ε曲线构成一个对称的滞后循环图形。这种現象称为材料的各向同性硬化。

实际上一般的材料滞后循环图形并不对称。卸载到图1—4中的A点时，就开始进入塑性区，并沿着AD曲线前进。由于曲线的上下不对称而有$\sigma_B > \sigma_A$关系。材料进入塑性区后，晶粒已经产生位錯而不再是各向同性的組织，并在晶粒之間产生残余应力，这种現象首先由

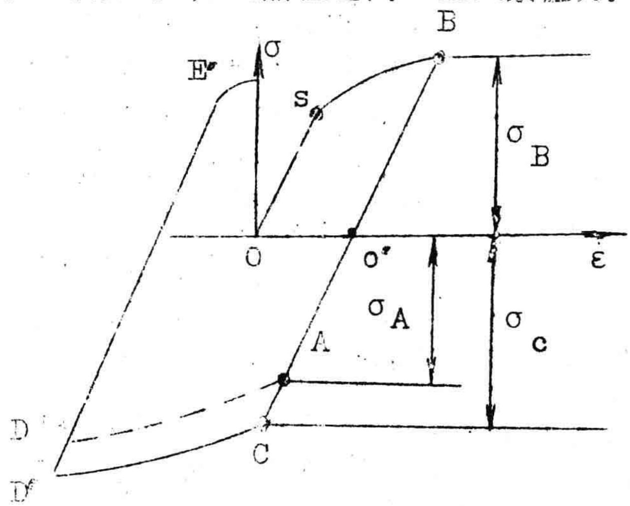

图1—4　一次加载卸载循环图

鲍辛格（Baushanger）发现，称为鲍辛格效应。

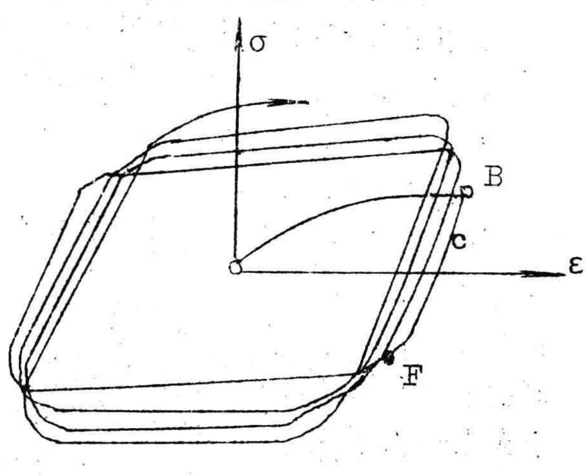

图1—5　多次加载卸载循环图

图1—5是多次加载与卸载的循环图，由图形可見，每次循环曲线并不重合，但循环到一定次数之后，曲线趋向于稳定到某一固定值（材料的硬化值或软化值）。在具有复合载荷和加载卸载的比例值不同时，曲线的变化关系更为复杂。总之，循环曲线图是反映材料内部机理和加载历史等多种情况的总合，其中許多微观问题，人們尚未完全识认清楚。

由此可見，对弹塑性材料，我們无法像弹性情况那样能建立起最終的应力状态与应变状态之間的全量关系，而只能建立起反映对加载

途徑有依賴关系的应力应变之間的增量关系；也可以说，塑性情况的应力应变的本质就是非线性变化的增量关系。

从实验中还发現，由塑性变形引起的永久体积改变量小到可以忽略不計，因此，一般就认为塑性变形不会引起体积改变，即在塑性变形时，某一方向的伸长与另一方向的缩短之比（即泊松比）为0.5。

3．屈服条件

在簡单拉伸时，应力达到材料的屈服极限σ_s，就进入塑性范圍；在复杂应力情况下，必須綜合各应力分量的某些关系，才能判断材料开始的屈服点。目前仍以常見的米賽斯（Von Mises）准則和特瑞斯加（Tresca）准則作为判断条件。

米賽斯准則：　　設有六个应力分量为σ_x、σ_y、σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}、τ_{zx}，并用$\{\sigma\}$表示其应力向量：

$$\{\sigma\}=[\sigma_x\ \sigma_y\sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]^T \qquad (1\cdot1)$$

其中T表示矩阵轉置。

今定义当量应力为$\bar{\sigma}$（或称等效应力）

$$\bar{\sigma}=\left\{\frac{1}{2}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2]+3(\tau^2_{xy}+\tau^2_{yz}+\tau^2_{zx})\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1\cdot2)$$

当量应力$\bar{\sigma}$达到屈服极限σ_s时，材料开始进入塑性区，这就是米賽斯准則。

又引入应力偏量为

$$\begin{aligned} S_1&=\sigma_x-\sigma_m, & S_4&=\tau_{xy},\\ S_2&=\sigma_y-\sigma_m, & S_5&=\tau_{yz},\\ S_3&=\sigma_z-\sigma_m, & S_6&=\tau_{zx}, \end{aligned} \qquad (1\cdot3)$$

其中　$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$＝平均垂直应力，及相应的应力偏量向量$\{S\}$：

$$\{S\}=[S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6]^T \qquad (1\cdot4)$$

于是得到用应力偏量所表示的当量应力$\bar{\sigma}$为

$$\bar{\sigma}=\left\{\frac{3}{2}[S_1^2+S_2^2+S_3^2+2(S_4^2+S_5^2+S_6^2)]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1\cdot5)$$

稍经运算，当量应力可以更簡洁地表示为

$$\bar{\sigma} = (\frac{3}{2}\{S\}^T\{S\})^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

又設σ_1，σ_2，σ_3分别为三个主应力，且有$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，可以把上式写成

$$\bar{\sigma}=\{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

容易看出$\bar{\sigma}$是坐标变换的不变量。在簡单拉伸时它正好等于拉伸应力σ。

在复杂应力情况下的应变用向量表示为

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T \tag{1.8}$$

进入塑性区以后，載荷按微小增量的方式逐步加載，在一个載荷增量的作用下，应力和应变都在原来的水平上增加了一个很小的增量$\{d\sigma\}$和$\{d\varepsilon\}$，此时应变增量可以如图1—1由两部分组成：即全应变增量$\{d\varepsilon\}$等于弹性应变增量$\{d\varepsilon^e\}$与塑性应变增量$\{d\varepsilon^p\}$之合，而$\{d\varepsilon^e\}$是随着卸載而消失的，与当量应力$\bar{\sigma}$相对应，定义等效应变为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{2(1+\nu)}\{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

在弹性情况下，簡单拉伸有$\varepsilon_x=\varepsilon$，$\varepsilon_z=\varepsilon_z=-\nu\varepsilon$，$\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，其中$\varepsilon$为拉伸应变。于是等效应变$\bar{\varepsilon}$正好等于拉伸应变$\varepsilon$。

进一步，我們把塑性应变增量的等效应变称为塑性等效应变增量，記作$\overline{d\varepsilon^p}$，在塑性时$\nu=0.5$，故有

$$\overline{d\varepsilon^p}=\frac{\sqrt{2}}{3}\{(d\varepsilon_x^p-d\varepsilon_y^p)^2+(d\varepsilon_y^p-d\varepsilon_z^p)^2+(d\varepsilon_z^p-d\varepsilon_x^p)^2+\frac{3}{2}[(d\gamma_{xy}^p)^2+(d\gamma_{yz}^p)^2+(d\gamma_{zx}^p)^2]\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

对于复杂应力状态，有如下的应变强化规律：在进入屈服以后进行卸載或部分卸載然后再加載，其新的屈服应力值仅与卸載前的等效塑性应变总量$\int\overline{d\varepsilon^p}$有关。也就是说新的屈服只有当等效应力适合

$$\bar{\sigma}=H(\int \overline{d\varepsilon^p}) \qquad (1\cdot 11)$$

时才会发生。这里的函数H反映了新的屈服应力对等效塑性应变总量的依赖关系。

在简单拉伸时，$\bar{\sigma}$就是拉伸应力σ，$\overline{d\varepsilon^p}$就是简单拉伸塑性应变增量$d\varepsilon^p$，所以（1·11）式中的函数关系可以通过简单拉伸时拉伸应力和总塑性应变ε^p之間的关系来确定。（1·11）式反映了屈服与强化之間的关系，称为等向强化材料的米賽斯准則。

特瑞斯卡（H·Tresca）准則：　由实驗发現当最大剪应力达到一定数值时，材料开始进入塑性状态。这是特瑞斯卡最先提出的，通常也称最大剪应力条件。它可写为

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}\sigma_s \qquad (1\cdot 12)$$

其中σ_s是一个常数，仅与材料性质有关。τ_{max}是三个剪应力中的最大值。若用三个主应力分量σ_1，σ_2，σ_3来表示，且有$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$的关系，則最大剪应力达到

$$\tau_{max}=(\sigma_1-\sigma_3)/2 \qquad (1\cdot 13)$$

时，材料开始屈服。

在上述两种准則中，米賽斯准則是由能量原理推导而来的，它是用連续的应力分量来描述材料屈服条件的，一般认为此法最为严格而精确，屈服曲面光滑而連续，便于分析計算。特瑞斯卡准則是分段的不連续的线性应力分量函数，它是一个接近于米賽斯曲面的六边形，一般认为此法为間断的直线所形成，有一定誤差，但偏于安全。最近有人作了大量实驗*，发現这种傳統看法并不完全适合实际情况，因为材料进入塑性范圍后的非正則特性的影响，在循环加载—卸载过程中，按特瑞斯卡准則作为判断屈服的条件，更加符合眞实情况，而米賽斯准則只是一种完全理想的情况。

---

*引自ASME series H, vol, 100, NO1, 1978。H·S Lamba, "Cyclic Plasticity for Nonproportional Path"。

另外，在实际的工作中，拉伸—— 压缩的比例不可能恒定不变。材料因鲍辛格效应引起 σ−ε 曲线并不对称，故拉一压载荷比例不同。也影响材料进入塑性后的屈服极限。有人作了許多工作之后，建议采用下面的公式計算临界屈服极限更为适合：

$$F(\sigma_{ij})=\bar{\sigma}^2=6J_2+AJ_1-B=0^{*} \qquad (1\cdot14)$$

其中：A、B根据载荷情况不同为待定常数。

$$J_2=\frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau^2_{xy}+\tau^2_{yz}+\tau^2_{zx})\right]$$

$$J_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_k$$

在单向拉伸——压缩情况下，若令

$\sigma_x=R$，受拉情况，其余应力分量为0。

$\sigma_x=-kR$，受压情况，其余应力分量为0。

K＝（压缩屈服极限）/（拉伸屈服极限），取絕对值。設 $K\geq1$，将拉伸压缩条件代入（1·14）解得：

$$A=2R(K-1)\,; \qquad B=2KR^2\,。$$

把A·B代入（1·14），最后得

$$F(\sigma_{ij})=3J_2+(K-1)J_1R-KR^2=0 \qquad (1\cdot15)$$

或者写成显式为

$$F(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau^2_{xy}+\tau^2_{yz}+\tau^2_{zx})\right]$$

$$+(k-1)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)R-KR^2=0 \qquad (1\cdot16)$$

很明显，K＝1时，表示循环载荷的拉伸压缩相等，（1·16）式就是前述的米賽斯准則，它代表抛物线关系。随着K值的不同，屈服条件的数値随之而易。

---

* M·Haitzman ,"stress -strain Relations for Meterials With Different Tension com-presion yield strengths"。J·AIAA, VOl. 11. NO 3. 1973

§1·3 彈塑性的构造方程式

1. 构造方程式

材料的应力与应变关系称为构造方程，也就是虎克定律，根据能量原理和力学特性上的对称性，对于正交各向異性材料的彈性法則，认为有9个独立的彈性常数，而应力与应变关系为

$$\{\sigma\}=[D^e]\{\varepsilon\} \tag{1·17}$$

其中

$$[D^e]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix}$$

式中 $d_{ij}=d_{ji}$ 。还应注意，上式只有在 xyz 軸与材料的正交各向異性主軸相一致的情况下，关系才能成立，否则还需要对 $\{\sigma\}$ 与 $\{\varepsilon\}$ 进行坐标变换。

对于各向同性材料，它們与坐标軸的选擇无关，仍有关系

$$\{\sigma\}=[D^e]\{\varepsilon\} \tag{1·18}$$

其中

$$\{\sigma\}=[\sigma_x,\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]^T$$

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}]^T$$

$$[D^e]=\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对 称} & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

此处的彈性矩阵$[D^e]$，具有对称性質。

在研究塑性状态时，这里把彈性应变与塑性应变一起考虑，卽不因材料进入塑性状态而忽略对彈性应变的关系，这样对材料内部晶粒的滑移变形的研究，将更为方便。

如前所述，在塑性区的应力与应变关系是非线性的，采用增量形式进行分析更为合适。并記应力增量和应变增量分别为$\{d\sigma\}$，$\{d\varepsilon\}$。而全应变增量$\{d\varepsilon\}$是由彈性部分$\{d\varepsilon^e\}$与塑性部分$\{d\varepsilon^p\}$所组成，故有

$$\{d\varepsilon\}=\{d\varepsilon^e\}+\{d\varepsilon^p\} \qquad (1\cdot19)$$

因此，彈性部份应变为

$$\{d\varepsilon^e\}=\{d\varepsilon\}-\{d\varepsilon^p\} \qquad (1\cdot20)$$

已知在彈性变形中，彈性矩阵$[D^e]$是常数，故$(1\cdot17)$或$(1\cdot18)$式用增量形式写出为

$$\{d\sigma\}=[D^e]\{d\varepsilon^e\} \qquad (1\cdot21)$$

把$(1\cdot20)$两端乘以$[D^e]$，代入$(1\cdot21)$式有

$$\{d\sigma\}=[D^e]\{d\varepsilon^e\}=[D^e]\{d\varepsilon\}-[D^e]\{d\varepsilon^p\} \qquad (1\cdot22)$$

现在，引入塑性理論中的流动法则：塑性应变增量向量的方向总与屈服曲面上的法向方向一致。它确定了塑性应变增量的流动规律，用公式表示为

$$\{d\varepsilon^p\}=\lambda\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}df \qquad (1\cdot23)$$

其中$f(\sigma_{ij})$是塑性流动势能，λ是一个比例系数（或函数），将在下面说明。而$\{\partial f/\partial\sigma\}$为势函数$f(\sigma_{ij})$对应力向量$\{\sigma\}$的偏导数；为方便計算，令$\sigma_1\cdots\sigma_6$代替$\sigma_x\cdots\tau_{zx}$，和$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_6$代替$\varepsilon_x\cdots\gamma_{zx}$。又

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}=\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_1}\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_3}\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_4}\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_5}\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_6}\right)^T \qquad (1\cdot24)$$

而

$$\{d\varepsilon^p\}=(d\varepsilon_1^p\ d\varepsilon_2^p\ d\varepsilon_3^p\ d\varepsilon_4^p\ d\varepsilon_5^p\ d\varepsilon_6^p)^T \qquad (1\cdot25)$$

把（1·23）式代入（1·22）式得到

$$\{d\sigma\} = [D^e]\{d\varepsilon\} - \lambda[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}df \qquad (1\cdot26)$$

塑性变形持续下去，屈服条件 $f(\sigma_{ij})$ 的值亦持续变化，其变化量用下式给出：

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}d\sigma_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}d\sigma_3 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_4}d\sigma_4 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_5}d\sigma_5 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_6}d\sigma_6 \qquad (1\cdot27)$$

或

$$df = [\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} \qquad (1\cdot28)$$

把（1·26）中的 $\{d\sigma\}$ 代入（1·28）式，得

$$df = [\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]\{d\varepsilon\} - \lambda[\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}df \qquad (1\cdot29)$$

对 df 求解得：

$$\lambda df = \frac{[\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]\{d\varepsilon\}}{\frac{1}{\lambda} + [\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}} \qquad (1\cdot30)$$

再将 λdf 代入（1·26）式，得

$$\{d\sigma\} = \left([D^e] - \frac{[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}[\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]}{\frac{1}{\lambda} + [\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}}\right)\{d\varepsilon\} \qquad (1\cdot31)$$

令

$$\left.\begin{aligned} [D^p] &= \frac{[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}[\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]}{\frac{1}{\lambda} + [\frac{\partial f}{\partial \sigma}]^T[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}} \\ [D^{ep}] &= [D^e] - [D^p] \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot32)$$

则得到与彈性情况完全相似的弹塑性应力应变关系。注意到(1·31)式包括弹性与塑性两部份，故把(1·31)式写成形式为

$$\left.\begin{aligned}&\{d\sigma\}=[D^{ep}]\{d\varepsilon\}，或\\&\{d\sigma\}=[D^{e}]\{d\varepsilon\}-[D^{p}]\{d\varepsilon\}=[D^{e}]\{d\varepsilon\}-\{d\sigma_{a}\}\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot33)$$

在上式中的$\{d\sigma_a\}$，是表現应力增量的項。它在热应力的处理时也存在。把(1·33)式中的$[D^{ep}]$形式直接求解的称为变剛度法(或切线模量法)。它在塑性变形的每一步驟，采用变化的$[D^{ep}]$进行計算。另一方面，把以分离形式的(1·33)中第二式用来求解，即每一步只求$\{d\sigma_a\}$的变化量，視它为载荷的增量，称为初应力法，这时的$[D^e]$不变。上述两种方法将在下面詳细討論。

这里，我們进一步确定比例系数λ；同时考虑到应变硬化理論的影响。今假定屈服条件的应变滞后性为

$$f(\sigma_{ij})=f(W^{p})\qquad(1\cdot34)$$

即(1·34)式中的$f(\sigma_{ij})$值受到塑性功W^{p}的影响，而塑性功的增量dw^{p}沿变形途徑的值为

$$\left.\begin{aligned}&dw^{p}=\sigma_1(d\varepsilon_1^{p})+\sigma_2(d\varepsilon_2^{p})+\sigma_3(d\varepsilon_3^{p})+\sigma_4(d\varepsilon_4^{p})+\sigma_5(d\varepsilon_5^{p})+\sigma_6(d\varepsilon_6^{p})\\&或\\&dw^{p}=[\sigma]^{T}\{d\varepsilon^{p}\}=\bar{\sigma}\,\overline{d\varepsilon}^{p}\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot35)$$

式中的$\bar{\sigma}$和$\overline{d\varepsilon}^{p}$分别为塑性区的等效应力和等效塑性应变增量。此时$\bar{\sigma}$值的更广泛意义是表示各应变阶段中，把应力分量代入屈服条件式$f(\sigma_{ij})$后的f值，因此有关系：

$$f(\sigma_{ij})=\bar{\sigma}=f\left(\int\bar{\sigma}\,\overline{d\varepsilon}^{p}\right)\qquad(1\cdot36)$$

若此式成立，則$\bar{\sigma}$与$\overline{d\varepsilon}^{p}$之間必定有下述另一关系存在：

$$f(\sigma_{ij})=\bar{\sigma}=H\left(\int\overline{d\varepsilon}^{p}\right)\qquad(1\cdot37)$$

式中H为包含$\bar{\sigma}$的某一函数。对(1·37)微分得

$$df=d\bar{\sigma}=H'\,\overline{d\varepsilon}^{p}，\qquad H'=\partial\bar{\sigma}/\partial\bar{\varepsilon}^{p}\qquad(1\cdot38)$$

(1·38)式中的H'表示等效应力增量与等效塑性应变增量的比值，就是应变硬化率；当$H'>0$是材料硬化情况，$H'<0$是材料軟化情况。

将(1·38)代入(1·23)式，则有

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\} H' \overline{d\varepsilon}^p \qquad (1\cdot39)$$

再以$[\sigma]^T$乘(1·39)式的两端，得

$$[\sigma]^T\{d\varepsilon^p\} = dw^p = \bar{\sigma}\,\overline{d\varepsilon}^p = \lambda[\sigma]^T\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}H' \overline{d\varepsilon}^p \qquad (1\cdot40)$$

经整理后得

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\sigma]^T\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \qquad (1\cdot41)$$

由(1·41)式就明确了(1·23)式中λ的函意。将λ代入(1·32)式，得到塑性矩阵$[D^p]$为

$$[D^p] = \frac{[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}[\frac{\partial f}{\partial\sigma}]^T[D^e]}{\frac{1}{\bar{\sigma}}[\sigma]^T\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}H' + [\frac{\partial f}{\partial\sigma}]^T[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}} \qquad (1\cdot42)$$

当$H'=0$时为理想塑性材料。

2. 弹塑性矩阵的表达式

由(1·32)知道，弹塑矩阵$[D^{ep}]$包含弹性矩阵$[D^e]$及塑性矩阵$[D^p]$。而$[D^e]$为已知数，关键在求$[D^p]$ 即(1·42)式时，先要計算$\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}$ 由(1·5)及(1·3)式，并注意到$S_1+S_2+S_3=0$，对f求偏导数，可得

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1} = \frac{3S_1}{2\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2} = \frac{3S_2}{2\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_3} = \frac{3S_3}{2\bar{\sigma}}$$
$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_4} = \frac{3\sigma_4}{\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_5} = \frac{3\sigma_5}{\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_6} = \frac{3\sigma_6}{\bar{\sigma}} \qquad (1\cdot43)$$

故$[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}$项可以写成

限

⑨

$$[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}=[D^e]\cdot\frac{3}{2\bar{\sigma}}[S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6]^T$$

$$=\frac{3G}{\bar{\sigma}}[S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6]^T \qquad (1\cdot 44)$$

式中 $G=E/2(1+\nu)$，为材料剪切系数。还注意到 $[D^e]$ 为对称矩阵，故有

$[D^e]\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T=\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D^e]$ 及（1·5）式易得

$$[D^p]=\frac{9G^2}{(H'+3G)\bar{\sigma}}\begin{bmatrix} S_1^2 & S_1S_2 & S_1S_3 & S_1S_4 & S_1S_5 & S_1S_6 \\ & S_2^2 & S_2S_3 & S_2S_4 & S_2S_5 & S_2S_6 \\ & & S_3^2 & S_3S_4 & S_3S_5 & S_3S_6 \\ & & & S_4^2 & S_4S_5 & S_4S_6 \\ \text{对} & \text{称} & & & S_5^2 & S_5S_6 \\ & & & & & S_6^2 \end{bmatrix} \qquad (1\cdot 45)$$

将（1·8）中的 $[D^e]$ 及（1·45）代入（1·32）得到三维问题的弹塑性矩阵为：

$$[D^{ep}]=\frac{E}{(1+\nu)}\begin{bmatrix} A-\omega S_1^2 & B-\omega S_1S_2 & B-\omega S_1S_3 & -\omega S_1S_4 & -\omega S_1S_5 & -\omega S_1S_6 \\ & A-\omega S_2^2 & B-\omega S_2S_3 & -\omega S_2S_4 & -\omega S_2S_5 & -\omega S_2S_6 \\ & & A-\omega S_3^2 & -\omega S_3S_4 & -\omega S_3S_5 & -\omega S_3S_6 \\ & & & C-\omega S_4^2 & -\omega S_4S_5 & -\omega S_4S_6 \\ & & & & C-\omega S_5^2 & -\omega S_5S_6 \\ \text{对} & \text{称} & & & & C-\omega S_6^2 \end{bmatrix}$$

（1·46）

式中 $\omega=9G/2\bar{\sigma}(H'+39)$，$A=(1-\nu)/(1-2\nu)$，$B=\nu/(1-2\nu)$，$C=\frac{1}{2}$。对强化程度不大（进入屈服后 $d\sigma/d\varepsilon \ll E$）的材料，其中的 H' 可以利用相应的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线的斜率来代替。

对于轴对称情况，我們取 $\sigma_1=\sigma_x$，$\sigma_2=\sigma_r$，$\sigma_3=\sigma_\theta$，

$\sigma_4=\tau_{xr}$，$\sigma_5=\tau_{x\theta}=0$，$\sigma_6=\tau_{r\theta}=0$，此时并記 $\{d\sigma\}=(d\sigma_x, d\sigma_r, d\sigma_\theta, d\tau_{xr})^T$，$\{d\varepsilon\}=(d\varepsilon_x, d\varepsilon_r, d\varepsilon_\theta, d\gamma_{xr})^T$，在（1·46）式中去掉最后两行两列，就得到相应的弹塑性矩阵为：

$$[D^{ep}]=\frac{E}{(1+\nu)}\begin{bmatrix} A-\omega S_1^2 & B-\omega S_1 S_2 & B-\omega S_1 S_3 & -\omega S_1 S_4 \\ & A-\omega S_2^2 & B-\omega S_2 S_3 & -\omega S_2 S_4 \\ & & A-\omega S_3^2 & -\omega S_3 S_4 \\ \text{对称} & & & C-\omega S_4^2 \end{bmatrix} \quad (1\cdot47)$$

式中 ω，A，B，C与上式相同，但

$$\bar{\sigma}=\left\{\frac{3}{2}(S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_4^2)\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1\cdot48)$$

对平面应力问题，仍可按上述原則推导出弹塑性矩阵的表达式，此时 $\sigma_3=\sigma_z=\sigma_5=\tau_{yt}=\sigma_6=\tau_{zx}=0$，但其偏应力 $S_3=\sigma_3-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y)$。一般不等于零。于是其等效应力为

$$\bar{\sigma}=\left\{\frac{3}{2}(\sigma_x S_1+\sigma_y S_2+2\tau_{xy}^2)\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1\cdot49)$$

或

$$\bar{\sigma}=\left\{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1\cdot50)$$

因为

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}=\frac{3}{2\bar{\sigma}}(S_1\ S_2\ 2\tau_{xy})^T$$

$$[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}=\frac{3G}{\bar{\sigma}(1-\nu)}\begin{Bmatrix} S_1+\nu S_2 \\ S_2+\nu S_1 \\ (1-\nu)\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

利用上式代入（1·32）式，得到 (D^p)：

$$[D^p]=\frac{E}{Q(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} (S_1+\nu S_2)^2 & (S_1+\nu S_2)(S_2+\nu S_1) & (1-\nu)(S_1+\nu S_2)\tau_{xy} \\ & (S_2+\nu S_1)^2 & (1-\nu)(S_2+\nu S_1)\tau_{xy} \\ \text{对称} & & (1-\nu)^2\tau_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

（1·51）