機械人的手

—力學與運動—

M. VUKOBRATOVIĆ 著
趙　平　譯

臺隆書店

機械人的手

—力學與運動—

M. VUKOBRATOVIĆ 著
趙 平 譯

江苏工业学院图书馆
藏书章

臺隆書店出版

(台隆書店機械人系列之6)

DYNAMICS OF ROBOTS AND MANIPULATORS

Miomir Vukobratović Miomir Vukobratović

譯　序

本書係針對機械人與manipulator 以及動力義手等活動機構(active mechanism)之問題提示了一種有系統的approch 。尤其是對動態的模型(dynamic model)之構成與多自由度連桿運動之構成問題提示了獨特的解決方法。亦即，對前者而言，即使構成了模型，通常由於各自由度的變化量相互有複雜的干涉，因此，其解析與控制系統的設計都不太容易。作者Vukobratović 博士，對此採用了回歸性手法，給我們提示了電腦處理容易的動態模型計算演繹法，另一方面，對後者則闡述了導入規範控制概念的多關節臂系統協調控制之新手法。這些研究非但對今後的發展具有重要的意義，對從事此一分野的研究人員也提供了非常珍貴的理論基礎。

本書適合於此分野之大學研究所學生，以及從事研究之人員，作爲教材或參考之用。唯譯者學識疏淺，繆誤自當難免，尙祈讀者不吝指教，以匡不逮。(台隆書店機械人系列之6)

趙　平

1982.12.16.　於臺灣

目　次

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第 3 章 機能運動之構成

第 1 章　活動機構動力學的研究迄至目前之成果

本章主要係將冀圖應用於機械人動力學（ dynamics ）的各種解析手法予以分類。此處所列舉之活動機構（ active mechanism ）的數式模型（ mathematical model ）之作成手續，本來均非以機械人動力學與控制等具體性之應用爲目的，而是想出上記手續的專家中有幾位在實現各種機能運動時，出現了新的機構後，才開始嚐試將該方法使之也可以直接應用於機械人或 manipulator 的形式者。

作成活動機構數式模型之方法，可以作下列四種基本分類。

- 根據 Newton-Euler 方程式之模型。
- 根據 Lagrange方程式之模型。
- 依 D'Alambert 的假想工作（ virtual work ）之原理所作成之模型。
- 根據加速度能（ acceleration energy ）或 Gibbs 函數表現所作成之模型。

茲僅就此中之 Newton-Euler ， Lagrange，加速度能等三種方法在此第 1 章中詳加說明。原因是因爲此三種方法在某種意義上，明顯的表示出作成動性運動方程式的具有特色的三個範疇（ Kategorie，category ）。其他的，在直接以應用於機械人爲目的以前的初期工作，係以告知此新應用研究分野非常深遠的歷史背景爲其重要意義之所在。

1.1　根據 Newton-Euler 方程式之方法

活動機構之運動方程式，祇須就物體之各要素（ segment ）考慮要素與其運動聯結機構之間的結合方程式即可決定。 1963 年 H.J.Fletcher，L.Rongved 與 E.Y. Yu [1] 研究在重力下以萬向接頭（ universal joint ）結合，由兩個剛體（ rigid body ）所構成的衛星運動。其模型係驅動引擎等之轉矩在作用於 joint （接頭，關節）時，也可以簡單的擴張。此時雖將結合力除外，但非本質性的。

1965 年 W.W.Hooker 與 G.Margulies [2] 自前記的問題開始，就 $n+1$ 個物體，以有 1 乃至 2 旋轉自由度的 joint 所聯結的一般性剛體之運動進行研究。此方法之出現雖屬一大進步，但顯然尙有若干未臻完備之處，例如，雖然使用利用矩陣（ matrix ）定式化，但却無法求得作爲系統函數的矩陣。

R.E.Roberson 與 J.Wittenburg [3] ，他們的 approach是將物體系以圖形（ graph ）來定義，嚐試將此精巧的旣知圖形之性質，有効的利用於運動之解析。對象之系則限於 topological 的 branch 狀者，所有的兩個物體均以一個 joint 予以連絡。因

此，該系是由n個物體與$n-1$個 joint所構成。剛體系與圖形之同構映像（同形寫像，isomorphic mapping），如圖1·1般進行。亦即，物體重心部分構成圖形結點之集合$X=\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\}$，圖形的branch之集合$U=\{u_1,u_2,\cdots\cdots,u_n\}$被定義爲連絡物體的joint部分。而$F(x)\rightarrow X$的映像（寫像，mapping）係以圖形的箭頭來表示。將此系以topology（相位數學）來表現的方法迄今猶令人感到興趣。

圖1.1 物體系之例與對應之圖形

利用W.W.Hooker[4]的方法係賦與除去難以獲得運動方程式之新的可能性。

P.W.Likins[5]於1971年提議以前述之方法直接應用於運動解析。此方法尙將問題的一般性予以限制，而使運動學上的chain（kinematic chain，運動鏈）之物體與joint和旋轉曲的單位向量表現法單純化。此方法係以下列兩項爲基礎。

1： 文獻3，4之研究證明了決定基準物體與其他物體之間的順序之重要性。然後由基準物體開始，一面記述topological的branch，一面將增加其値之番號，記於物體。

2： 通常實際上多自由度之joint，必須導入媒介要素。此爲獨立控制各自由度時所必須者，因而在大部分的場合，將多自由度的joint分解爲1自由度的若干joint至爲自然。這是藉加入質量0的要素而經常可能。

P.W.Likins係假定joint已經經過分解。利用此approach可以將W.W.Hooker所提議的方程式予以單純化，Likins成功的把系的旋轉運動以矩陣方程式（matrix equation）予以表現。此approach係使由祇具有相對性旋轉運動的joint所結合的topological branch形之物體系，適合於以電腦來行模擬實驗（simulation）。

在此以前係屬topological branch形，而且一直僅就祇具有相對性旋轉運動之系的運動方程式的設定方法進行議論。而相對性的並進運動在人體型機械人（類人型機械人）中雖然沒有，但其控制對產業機械人則深具意義。又如在步容的兩腿支持期之解析，勢必須要開發處理閉合chain（closed chain，閉合鏈）機構之手法。基於這些理由，最近亦開始就極爲一般性的構造機構加以研究。茲就其中的一部分作簡略的敍述。

J.Wittenburg將具有topological branch構造，而且將其第j個的joint有旋轉自由度r_j與並進自由度t_j系的解析手法[3]，經更進一層的予以一般化[6]（$r_j,t_j=1,2,3$）。此方法雖積極具一般性，但並不包括閉合chain之情況，並因無法得到獲得方程式的明確之矩陣構成手續，所以目前尙僅止於理論性階段。

F.W.Ossenberg-Franzes於1973年根據Newton-Euler方程式提出了具有相對性的旋轉與並進的自由度，記述閉合chain之運動的一般方法。此方法是首先設對

$n+1$ 個物體使用 6 ($n+1$) 個座標的運動方程式，然後將此數導入拘束條件而漸次遞減。此方法亦未賦與獲得方程式所需之明確的矩陣構成手續。

1.2 根據 Lagrange 方程式之方法

由於使用Newton-Euler 方程式之方法，除去拘束力與拘束矩所需的手續困難，故通常頗爲複雜。而且，此方法將致動器（馬達），彈簧或阻尼器（ damper ）之力，以及轉矩之值表現得不明確。相比之下，如果使用Lagrange 方程式，則可以將方程式以系的控制量之函數寫出。但是，應用Lagrange 方程式，在本質上不適合之處是 Lagrange 函數，因而不得不計算運動能（動能）之偏微分。

系之Lagrangean L，如衆所週知倘將運動能E_k 與位能（ potential energy ） E_p 之差：$L=E_k-E_p$ 系，依據在一般化座標 $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ 與位函數（ potential function ）之偏微分無法導引的一般力 $Q_d{}^1, Q_d{}^2, \cdots\cdots, Q_d{}^n$（摩擦力或外力）來定義的話，則該系的Lagrange 方程式，亦如衆所週知可寫成下列形式。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_d{}^i \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n$$

1968 年 J.J.Uicker[8] 根據 Lagrange 方程式，提出研究由任意個要素所構成的閉合 chain 所構成的任意構造之關節系動作的方法。 joint 爲旋轉與並進運動均可能者，以此點即可謂此法爲一般性的方法。系在 time-varying 的力之場，而且各 joint 中，除一般化了的控制力以外，還獲有有關一般化了的彈簧力與摩擦力加入時的方程式。而那時的 potential 是重力與彈簧力之和。

Uicker 的方法極具一般性，由於可以將系之運動方程式以電腦行模擬實驗，故爲各類研究人員用來處理各種特別情況。

M.E.Kahn 係應用Uicker 的方法，而獲得解析性的，以旋轉機構所結合的 3 segment 物體系的運動方程式[9,10]。此系雖祇爲在平行軸周圍行 2 ~ 3 旋轉者，但所獲得的方程式仍然太過複雜，最後還是靠重新排列若干物體，才獲得方程式的單純化。

A.K.Bejczy 與 R.A.Lewis 爲了求解析性的，有 3 自由度的 gripper（夾具）之極座標型manipulator 的運動方程式，而嚐試應用Uicker 的方法。

A.K.Bejczy[11] 獲得解析性的，manipulator 的運動能與位能之表現。其所獲得的表現雖極爲複雜，但據說比分離manipulator 本體與 gripper 要來得簡便。

R.A.Lewis[12] 提出了 Lagrange 方程式之係數簡略化計算方法。

與前述之工作完全獨立，G.V.Koronev[13] 設了具有有 topological branch構造，亦即這位作者所稱屬於特別class 的 joint 之關節系的方程式。此方法爲Lagrange形式，祇是處理在求得自由系的方程式後之計算過程的結合問題。

首先，Koronev是從將物體系的運動能的2次形式作爲規定物體位置與方向的六個座標的偏微分函數之書寫開始。此方程式是表示將$6n$個座標作爲變數之自由系數式模型。這些$6n$個座標之採用，對以在外力與力矩（moment）所形成的一般化力中加入結合所產生的一般化力爲條件的實際之系，頗爲妥適。

其他各種形式的聯結器（結合器，coupling），以前述$6n$個方程式組中的h個的方程式予以考慮。因一般化座標數爲$6n-h$，所以可以將所有的座標，以$6n-h$個一般化座標之函數來表示。在前述的$6n$個方程式中，將$6n$個座標與其1次微分與2次微分，作爲對應的一般化座標値之函數而導入，因而除去了一般化的結合力的話，即可獲得$6n-h$個Lagrange方程式。

此方法祇是在理論面頗能引人入勝，在設方程式時則完全沒有獲得矩陣形式的可能。

M. Renaud[14,15]導出了具有座標系O_0，對基準物體0相對的對成branch構造的$n+1$個物體系之運動方程式。被容許的隣接物體間之相對運動，祇是旋轉與並進運動而已（圖1・2）。

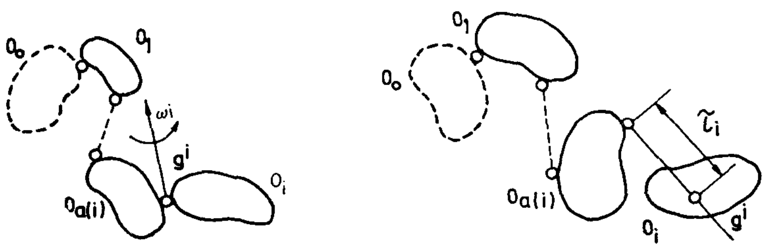

圖1.2 物體間的相對運動之定義

對各要素i（$i \in S$），座標系O_i（x^i, y^i, z^i）被固定，選擇其座標之方向以使之成爲$z^i = g^i$。但g^i是，例如對其前的要素之要素i的旋轉，亦即係所謂定義相對性旋轉之單位向量。在各座標系O_i（$i \in S$）與其他座標系$O_{a(i)}$之間定義旋轉量ω_i。這是按兩系之間的相對性旋轉角$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$而設定（圖1・3）。

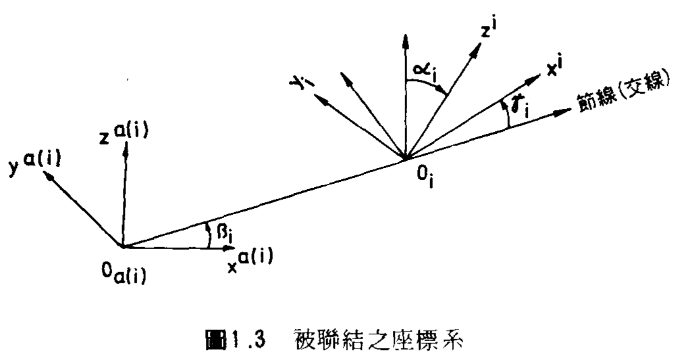

圖1.3 被聯結之座標系

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

附隨於 chain 構造之圖形將下列之值予以定義。

$$e=[e_{ij}] \quad ; \quad i,j\in S$$

$$e_{ij}=\begin{cases}1 & \text{物體 } j \text{ 直接結合於物體 } i\text{，而且不在物體 } o \text{ 與 } i \text{ 之間時}\\ 0 & \text{其他的場合}\end{cases}$$

下列之矩陣亦予定義。

$$\varepsilon=[\varepsilon_{ij}] \quad ; \quad i,j\in S$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1 & \text{物體 } i \text{ 在物體 } o \text{ 與 } j \text{ 結合之 chain 上時}\\ 0 & \text{其他的場合}\end{cases}$$

應將 index $a(i)$直接對合於物體 i，表示在物體 o與 i 之間的物體。係數 σ_i 被定義如下。

$$\sigma_i=\begin{cases}0 & \text{物體 } i \text{ 在物體 } a(i) \text{ 上之軸周圍旋轉時}\\ 1 & \text{物體 } i \text{ 向固定於物體 } a(i) \text{ 之軸方向並進時}\end{cases}$$

一般化座標被定義如下。

$$q_i=\tilde{\sigma}_i\omega_i+\sigma_i\tau_i \qquad \text{但，} \tilde{\sigma}_i \text{ 係 } \sigma_i \text{ 之共軛量}$$

Renaud 利用了像下列Lagrange 方程式的一般形之一。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}=Q^i$$

但，E_k 係系的運動能。一方面，系的位能可以以$U=U_p+U_{art}$ 求得。U_p是重力所產生的位能，U_{art} 是被附加於系的其他位能。

此方法是在對運動學上的 chain 設微分方程式時，能賦與極有系統性之手法者。此方法亦非常適合於實際之應用。

J.J.Uicker 之方法[8] 適於解析性的計算，以及將某任意之關節型機械系的運動方程式行再歸性的計算，但方程式有變得複雜之缺點[9,10]。爲了解決此項缺點M. Renaud 提出研究祇具有軸周圍旋轉的 topological branch狀關節型機械系之方法。

此方法來自 tensor 解析之觀點[14]，使用矩陣形式予以詳細說明[15,16]。下面再詳細一點的介紹對根據Lagrange 方程式，Gibbs-Appell 方程式，Newton-Euler 方程式的活動機械之運動微分方程式設定手續。

1.3　根據 Lagrange 方程式之活動機構解析法

本章首節已將依Lagrange 方程式記述活動 chain 的方法[14]加以敍述。但此方法尚未達到簡單實用之階段。茲就適合於具有旋轉 joint 的運動學上的 chain 之手續加

以列示[17,18]。

如衆所週知，直接應用Lagrange 方程式作成動性模型，因在途中會加入討厭的數値微分操作，故不太適當。下面所敍述的方法是避免上述情況，將Lagrange 方程式的係數以明白的形式來表現者。

manipulator 具有單純的旋轉 joint 是爲極普通之事。此處所使用之機構正係此種形式。

亦如衆所週知的那樣，剛體之運動能可以書寫成下列的形式。

$$E_k=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{h}_c \tag{1·1}$$

但，

$$\boldsymbol{h}_c=(J_1\omega^1)\boldsymbol{q}_1+(J_2\omega^2)\boldsymbol{q}_2+(J_3\omega^3)\boldsymbol{q}_3$$

$\boldsymbol{\omega}$ ：角速度向量

$\boldsymbol{h}_c$ ：對重心之物體角動量向量（角動量矢量）

ω^i ：角速度之 $\boldsymbol{q}_i$ 方向的成分

$\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3$ ：3 主軸方向之單位向量

J_1,J_2,J_3 ：3 主軸周圍之慣性矩

$\boldsymbol{v}$ ：物體重心之速度向量

圓筒時，角動量向量，因而運動能可表示於簡單的形式。亦卽，倘置 $J_1=J_S$ ；$J_2=J_3=J_N$ 則

$$\boldsymbol{h}_c=J_N(\omega^1\boldsymbol{q}_1+\omega^2\boldsymbol{q}_2+\omega^3\boldsymbol{q}_3)+(J_S-J_N)\omega^1\boldsymbol{q}_1=J_N\boldsymbol{\omega}+J_{SN}\omega^1\boldsymbol{q}_1 \tag{1·2}$$
$$J_{SN}=J_S-J_N$$

如果使用簡單的角動量向量，則圓筒全體的運動能卽成爲下列所示的那樣。

$$E_k=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{h}_c)=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2+\frac{1}{2}J_N\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}J_{SN}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{q}_1)^2 \tag{1·3}$$

茲再就開環（open loop）之運動學上的 chain 加以考慮。假定運動學上的chain 是由具有旋轉 joint 的同質圓筒所構成。而將 m_i ，$\boldsymbol{v}_i$ ，$\boldsymbol{\omega}_i$ ，$\boldsymbol{q}_i$ ，J_{is} ，J_{iSN} 分別當作是 chain 的第 i 個要素所具有之各量。倘使用圓筒運動能的表現式（1·3），則第 i 個的要素之運動能卽可表示於矩陣的形式。

$$E_{ki}=\frac{1}{2}[m_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_i+J_{iN}\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{\omega}_i+J_{iSN}(\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{q}_{i1})^2] \tag{1·4}$$

次就圖 1·4 所示那樣，運動學上的 chain，在固定端具有慣性系之原點（origin）者加以考慮。

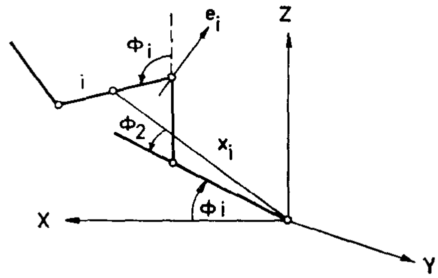

圖1.4　運動學上的chain

從原點到要素“ i ”的重心之距離向量$\boldsymbol{X}_i$ 係矩陣形式

$$\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{X}_i(\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_i) \qquad (1\cdot5)$$

因而，

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{d}{d_t}\boldsymbol{X}_i=\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_k}\phi_k \qquad (1\cdot6)$$

此種表現可以作下列般的修正。

$$\boldsymbol{v}_i=\left[\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_1}\ \frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_2}\cdots\cdots\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_i}\right]\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_i\end{bmatrix} \qquad (1\cdot7)$$

絕對角速度向量 ω_i 可以用下列形式來表示。

$$\boldsymbol{\omega}_i=\dot{\phi}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\phi}_2\boldsymbol{e}_2+\cdots\cdots+\dot{\phi}_i\boldsymbol{e}_i\doteq[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_i]\begin{bmatrix}\dot{\phi}_1\\ \dot{\phi}_2\\ \vdots\\ \dot{\phi}_i\end{bmatrix} \qquad (1\cdot8)$$

但，$\boldsymbol{e}_i$ 係 joint “ i ”的旋轉軸方向之單位向量。

式 (1·4)，亦即全運動能的各項係採用在式 (1·7)，(1·8)所表示的各量，可以用下列的 2 次形式來表示。

$$\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{\phi}}^T\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{X}_i^T}{\partial \phi_1}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{X}_i^T}{\partial \phi_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{X}_i^T}{\partial \phi_i}\\ \boldsymbol{O}\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\left[\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_1}\ \frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_2}\cdots\cdots\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \phi_i}\boldsymbol{O}\cdots\cdots\boldsymbol{O}\right]\dot{\boldsymbol{\phi}} \qquad (1\cdot9)$$

$$\omega_i^T\omega_i=\dot{\phi}^T\begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_i^T \\ O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}[e_1e_2\cdots\cdots e_iO\cdots\cdots O]\dot{\phi} \tag{1·10}$$

$$(\omega_i^Tq_{i1})^2=(\omega_i^Tq_{i1})(\omega_i^Tq_{i1})=\omega_i^Tq_{i1}q_{i1}^T\omega_i$$

$$=\dot{\phi}^T\begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_i^T \\ O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}q_{i1}q_{i1}^T[e_1e_2\cdots\cdots e_iO\cdots\cdots O]\dot{\phi} \tag{1·11}$$

因而，要素“ i ”的全運動能，可以歸納如下式。

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\dot{\phi}^TM^{1i}\dot{\phi} \tag{1·12}$$

但，有關 l，$m\leq i$ 的 l，m

$$M^{1i}{}_{lm}=\left[m_i\frac{\partial X_i^T}{\partial\phi_l}\frac{\partial X_i}{\partial\phi_m}+J_{iN}e_l^Te_m+J_{iSN}e_l^Tq_{i1}q_{i1}^Te_m\right]$$

$$=\left[m_i\frac{\partial X_i^T}{\partial\phi_l}\frac{\partial X_i}{\partial\phi_m}+J_{iN}e_l^Te_m+J_{iSN}(e_l^Tq_{i1})(e_m^Tq_{i1})\right] \tag{1·13}$$

或以向量形式

$$M^{1i}{}_{lm}=\left[m_i\frac{\partial X_i}{\partial\phi_l}\cdot\frac{\partial X_i}{\partial\phi_m}+J_{iN}e_l\cdot e_m+J_{iSN}(e_l\cdot q_{i1})(e_m\cdot q_{i1})\right] \tag{1·14}$$

但，對 l，$m>i$ 爲 $M^{1i}{}_{lm}=0$。

倘使用系 3：1（參閱附錄A）則

$$\frac{\partial X_i}{\partial\phi_l}\cdot\frac{\partial X_i}{\partial\phi_m}=(e_l\times r_{li})\cdot(e_m\times r_{mi})=(e_l\cdot e_m)(r_{li}\cdot r_{mi})-(e_l\cdot r_{mi})(e_m\cdot r_{li}) \tag{1·15}$$

因而，對 l，$m\leq i$

$$\begin{aligned}M^{1i}{}_{lm}&=m_i[(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_m)(\boldsymbol{r}_{li}\cdot\boldsymbol{r}_{mi})-(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{r}_{mi})(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{r}_{li})]\\&\quad+[J_{iN}(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_m)+J_{iSN}(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{q}_{i1})(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{q}_{i1})]\\&=[J_{iN}+m_i(\boldsymbol{r}_{li}\cdot\boldsymbol{r}_{mi})](\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_m)+J_{iSN}(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{q}_{i1})(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{q}_{i1})\\&\quad-m_i(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{r}_{mi})(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{r}_{li})\end{aligned}$$

對 $l, m > i$

$$M^{1i}{}_{lm}=0 \tag{1·16}$$

但，

$\boldsymbol{r}_{ij}$ 係 joint“ i ”至要素“ j ”之重心的距離向量。

$\boldsymbol{M}^{1i}$ 係表示開啟的運動學的上 chain 之要素“ i ”的一般化慣性量。$\boldsymbol{M}^{1i}$ 是在將運動學上的 chain 之長度作爲 n 時，明顯的是 $n\times n$ 的對稱矩陣。

另外的更較不易了解，但在令人深感興趣的物體 i 的一般化慣性量 $\boldsymbol{M}^{1i}$ 的性質中，第 l 行（row）的要素具有不依靠角座標 $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots, \phi_i$ 的性質。此係來自附錄A之定理 2 與定理 5 的結局。在知道軸方向與軸周圍之單位向量時，上記之表現是賦與對 chain 的要素“ i ”的一般化慣性量之閉合形式之解。

至於 chain 的要素“ i ”之位能 E_p，則以下式設定。

$$E_{pi}=m_i g(\boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{k}) \tag{1·17}$$

但，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 係慣性系之軸方向的單位向量。

要素“ i ”之 Lagrange 函數 L_i 係

$$L_i=E_{ki}-E_{pi}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{M}^{1i}\dot{\boldsymbol{\phi}}-m_i g(\boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{k}) \tag{1·18}$$

因而，

$$\frac{\partial L_i}{\partial\boldsymbol{\phi}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^T\frac{\partial\boldsymbol{M}^{1i}}{\partial\boldsymbol{\phi}}\dot{\boldsymbol{\phi}}-m_i g\left(\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}_i}{\partial\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{1·19}$$

又，

$$\frac{\partial L_i}{\partial\dot{\boldsymbol{\phi}}}=\boldsymbol{M}^{1i}\dot{\boldsymbol{\phi}} \qquad \text{故}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial\dot{\boldsymbol{\phi}}}\right)=\boldsymbol{M}^{1i}\ddot{\boldsymbol{\phi}}+\left(\sum_{k=1}^{i}\dot{\phi}_k\frac{\partial\boldsymbol{M}^{1i}}{\partial\phi_k}\right)\dot{\boldsymbol{\phi}} \tag{1·20}$$

但，$\dfrac{\partial\boldsymbol{M}^{1i}}{\partial\phi}$ 定義如下。

$$\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi}=\begin{bmatrix}\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_1}\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ \frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_1}\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ \frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_i}\\ \cdots\cdots\\ O\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ O\end{bmatrix} \tag{1·21}$$

在旋轉 joint 時，若無摩擦力，則要素"i"之運動所產生的一般化力，與 joint l 之驅動轉矩 $\mathcal{M}_i{}^i$ 相等。

因此，要素"i"之運動性Lagrange 方程式成爲下列形式。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L_i}{\partial \phi}=\mathcal{M}^i \tag{1·22}$$

如代入式 (1·19)，(1·20) 則

$$\mathcal{M}^i=M^{11}\ddot{\phi}+\left[\sum_{k=1}^{i}\dot{\phi}_k\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_k}-\frac{1}{2}(I)_{\dot{\phi}^T}\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi}\right]\dot{\phi}+m_i g\left(k\cdot\frac{\partial X_i}{\partial \phi}\right) \tag{1·23}$$

但，

$$(I)_{\dot{\phi}^T}\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}^T\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_1}\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ \dot{\phi}^T\frac{\partial M^{11}}{\partial \phi_i}\\ \cdots\cdots\\ O\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ O\end{bmatrix} \tag{1·24}$$

因而，在下列那樣的微分方程式，可以將系予以記述。

$$\mathcal{M}^i=M^{11}\ddot{\phi}+M^{21}\dot{\phi}+f^i \tag{1·25}$$

但，

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com