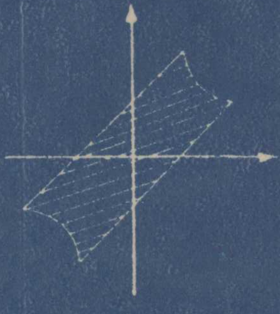
高等数学习题课教程



河北大学出版社

高等数学习题课教程

编写者:(按姓氏笔划)

方　耀　卢玉文　刘志岩

侯家玺　郝万德　耿景昕

徐安农

河北大学出版社

1992·5

(冀)新登字 007 号

责任编辑：韩建民
封面设计：刘长海
责任校对：柳金浦

高等数学习题课教程

侯家玺 耿景昕 主编

※ ※

河北大学出版社出版发行
（保定合作路4号河北大学院内）
邮政编码：071002 电话：222929—585
全国新华书店经销
河北省〇五印刷厂印刷

开本：850×1168 印张：14.25 字数280千字
1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数：1—5000册

ISBN7—81028—028—7/O·4 定价：6.30元

前　言

高等数学课程是高等工科学校的一门重要基础理论课，概念性、逻辑性强，抽象程度高，它既是学习后继课程的重要工具，又是学生毕业后从事各种创造性工作的基础，通过学习高等数学逐步培养学生思维方法，和逻辑推理能力及运算能力。提高解决实际问题的能力。习题课是学习、巩固、深化所学知识、锻炼能力的重要实践环节，同时又是教师检查教学效果，借以改进教学的重要手段，因此，这种实践环节在高等数学的教学中占有特殊的重要地位，因而提供一本类型全面、内容精选、分析和解答问题准确、巧妙简捷的《高等数学习题课教程》供广大师生在教学和学习中作为主要参考书，将大大有助于高等数学的教学。为此，根据我们多年的实践总结及现行的高等数学教学基本要求，我们编写了《高等数学习题课教程》，编写时，我们力求做到习题类型全面，搭配适当，内容系统性，针对性强，重点突出，解答准确。

全书根据教学基本要求编进了 *24* 次习题课的教学内容，每次习题课按照理论与实践，讲与练，课内外，概念与计算相结合的原则，每次习题课都编有：目的与要求；复习总结与思考；典型例题分析；课内外练习与解答，从而加强了习题课这一实践环节，对青年教师也具有一定的指导意义。

本书对报考研究生，及各大专院校的学生及教师、工程技术人员都是很好的参考书。

本书由侯家玺、耿景昕主编，参加编写的有：徐安农

(第一章)，耿景昕（第二、三章)、刘志岩（第四章)、侯家玺（第五、六章)，方耀（第七、八章)，卢玉文（第九、十章)，郝万德（第十一、十二章)。

本书能和读者见面，是由于河北大学出版社的大力支持，　　　天津教育科学院的李玉民同志对此书的出版也给予了热情帮助，在此表示谢意。

由于水平所限，在取材及结构上难免存在不妥之处，望读者批评指正。

编者　　1992年3月

目　　录

第一章　函数与极限

第一次　函数的概念和性质

一、安排习题课的时间

本习题课安排在讲完函数概念，函数的简单性质，反函数，复合函数等内容之后进行。

二、目的与要求

1、掌握函数的概念，理解函数的三要素：定义域、对应规律和值域。

2、熟悉基本初等函数的定义，表达式，定义域，值域，简单性质及图象。

3、搞清反函数和复合函数的概念。

4、学会在简单实际问题里建立函数关系。

三、教学方法建议

本习题课重点放在提高学生的理解水平上。建议采用提问、讨论，然后释疑的方式。

四、复习、总结与思考

问题 1　函数定义的三要素是什么?

答：构成函数关系的三要素是 ① 定义域，② 对应规律，③ 值域。一般只要定义域和对应规律确定了，值域也随之确定。如果定义域和对应规律中有一项没确定，就不构成函数关系。

问题 2　判别两个函数是否相同的依据是什么?

答：如果两个函数的定义域和对应规律完全相同，尽管表达方式不同，仍然是同一函数。两者有一个不同，就是不同的函数。

问题3　函数的定义域怎样确定？

答：由分析式子表示的函数，其定义域就是使算式有意义的所有实数值的集合。

对于实际问题中的函数关系，除考虑使解析式子有意义，还要注意到由实际意义产生的限制。

分段函数的定义域就是各段函数定义集合的并集。

问题4　设函数 $y=f(x)$　(1)

所确定的反函数是 $x=\Psi(y)$　(2)

若将（2）中 X 与 Y 位置对调得函数

$$y=\Psi(x) \tag{3}$$

试问（3）是否为（1）的反函数？（3）和（1）的图形有何关系？

答：因为函数定义的要是定义域和对应规律，而和所采用的符号无关。因此（3）也是（1）的反函数。

在同一坐标系中，直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\Psi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

问题5　是否任何两个函数都可以复合成复合函数？

答：并非如此。若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，而函数 $u=\Psi(x)$的定义域为D_2，值域为W_2，且$W_2\subset D_1$，此时两个函数才能复合成D_2上的复合函数。试看函数

$y=arcsinu$　　$u=x^2+2$

由于对于任何实数 X，U 的值域为〔$2,\infty$），而 $y=arcsinu$ 的定义域为〔$-1,+1$〕，因此这两个函数不能

复合成复合函数。

五典型例题分析

1、下列问题（1）～（5）中，y 是 x 的函数吗？

$(1)y=\sqrt{-x}$ ；$(2)y=5$ ；$(3)x=3$ ；

$(4)y=\begin{cases}-x,当x<0,\\ x^2,当x\geqslant 0;\end{cases}$ $(5)y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2}}$

答：（1）是。根据函数定义，对 $(-\infty,0]$ 中每一个 x 值，都有确定的 y 值与之对应。

（2）有的学生可能认为在表达式 $y=5$ 中设有出现自变量，因此不是函数，事实上在 $y=5$ 中，不论 x 取什么实数，总有确定的值5与之对应，因此其定义域为 $(-\infty,\infty)$，对应关系也是确定的，这是一个函数，称为常数函数。

（3）不是函数。这个表达式没有给出确定的对应规律，函数定义的要素之一不确定，因此不是函数。

（4）y 是 x 的函数，且这种函数叫分段函数，其定义域是 $(-\infty,0)\bigcup[0,+\infty)$ 即 $(-\infty,+\infty)$。当 x 在不同区域取值时，依不同的对应规律有确定的 y 值与之对应。

（5）y 不是 x 的函数，其定义域是空集 Ψ。

2、求函数 $y=(x-|x|)\sqrt{-sin2\pi x}$ 的定义域。

解：$\sqrt{-sin^2\pi x}$ 有意义，必须 $-sin^2\pi x\geqslant 0$，只有 $sin\pi x=0$，即 $x=K$ （$K=0$、±1、±2，…），又因为对于 $x\geqslant 0$ 有 $x-|x|\equiv 0$，即使 $\sqrt{-sin^{2\pi x}}$ 不属于实数范

围、也总有 $y\equiv 0$，因此函数 y 的定义域为

$$D=\{x|x\geqslant 0\}\bigcup\{x|x=-K\}\quad (K=1,2,\cdots)$$

3、设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4, 当x<0,\\ 2x+1, 当\geqslant 0.\end{cases}$$

求 $f(-1),f(0),f(1)$

解　分段函数求值必须注意当自变量在不同范围取值时，要依不同的对应规律计算 y 值。

$$f(-1)=(-1)^2+4=5$$

$$f(0)=2\cdot 0+1=1$$

$$f(1)=2\cdot 1+1=3$$

4、设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{ 次}}$

若　$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

求 $f_n(x)$

解：$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

现用归纳法证明

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

假设 $n=K$ 时，命题成立，即

$$f_K(x)=\frac{x}{\sqrt{1+Kx^2}}$$

当 $n=k+1$ 时

$$f_{k+1}(x)=f\left[f_k(x)\right]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由归纳法，对任何正整数 n，命题成立。

5、设 $f(x)$ 定义域是〔0,1〕，求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域。其中 $(a>0)$

解：$f(x+a)$ 可看作 $y=f(u)\quad u=x+a$ 复合而成，因此要 u 的值域即 $f(u)$ 的定义域 $\subset$〔0,1〕，即

$$0\leqslant x+a\leqslant 1 \qquad (1)$$

同理 $f(x-a)$ 要求 $\quad 0\leqslant x-a\leqslant 1 \qquad (2)$

$f(x+a)+f(x-a)$ 要求同时满足（1），（2）。因此其定义域为

$$D=\{x|a\leqslant x\leqslant 1-a\}$$

显然仅当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，D 才非空。

6、设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$

$$g(x)=\begin{cases}x,当x<0,\\ x^2,当x\geqslant 0;\end{cases}$$

求$f〔g(x)〕$，$g〔f(x)〕$

解：$f〔g(x)〕=\frac{1}{2}(g(x)+|g(x)|)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+|x|), & 当x<0,\\ \frac{1}{2}(x^2+|x^2|) & 当x\geqslant 0;\end{cases}=\begin{cases}0, & 当x<0,\\ x^2, & 当x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$g〔f(x)〕=\begin{cases}f(x), & 当f(x)<0,\\ f^2(x), & 当f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

事实上 $$f(x)=\begin{cases}0, & 当x<0,\\ x, & 当x\geqslant 0.\end{cases}$$

因此 $$g〔f(x)〕=\begin{cases}0, & 当x<0,\\ x^2, & 当x\geqslant 0.\end{cases}$$

7、求分段函数

$$y=\begin{cases}lnx, & 当0<x<1;\\ x-1, & 当1\leqslant x<2;\\ (x-2)^2+1, & 当2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

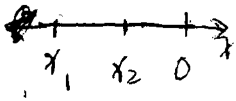
的反函数。

解：当 $0<x<1$ 时，$y=Lnx$ 为单调增函数，故有 $-\infty<y<0$，同理，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有 $0\leqslant y<1$，当 $2\leqslant x<+\infty$ 时，有 $1\leqslant y<+\infty$

因此，反函数亦为分段函数、

$$x=\begin{cases} e^{y}, & 当-\infty<y<0, \\ 1+y, & 当0\leqslant y<1; \\ 2+\sqrt{y-1}, & 当1\leqslant y<+\infty. \end{cases}$$

8、设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 也单调增加。



证，在 $(-l,0)$ 内任取 x_1,x_2，设 $x_1<x_2$，

则 $|x_1|,|x_2|$ 在 $(0,l)$ 内，且 $|x_2|<|x_1|$

由题设 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调，有

$$f(|x_2|)<f(|x_1|)$$

由 $f(x)$ 为奇函数，有

$$f(x_1)=-f(|x_1|),\quad f(x_2\quad)=-f(|x_2|$$

所以 $f(x_2)-f(x_1)=-f(|x_2|)-〔-f(|x_1|)〕$

$$=f(|x_1|)-f(|x_2|)>0$$

即 $\qquad f(x_2)>f(x_1)$

由单调增定义，$f(x)$在$(-l,0)$内单调增。

9、试分解下列复合函数

$(1) y=arctg^{2}\dfrac{2x}{1-x^{2}}$

$(2) y=5^{(2x+1)^{2}}$

解：$(1) y=u^{2},\quad u=arctgv,\quad v=\dfrac{2x}{1-x^{2}}$

$(2) y=5^{u}.\quad u=v^{2},\quad v=2x+1.$

注意在分解复合函数时应使每个步骤都是一个基本初

等函数，一般分解到基本初等函数的和，差，积或商即不再分解。

10、在等腰梯形 $ABCD$（图 1—1）中，底 $AD = a$，$BC = b$　$(a > b)$，高 $HB = h$，引直线 MN。$MN \parallel HB$，MN 与顶点 A 相距 $AM = x$。试把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数，并作出 $S = S(x)$ 的图形。

解：当$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(a-b)$时

$$S(x)=\frac{1}{2}x\frac{hx}{\frac{1}{2}(a-b)}$$

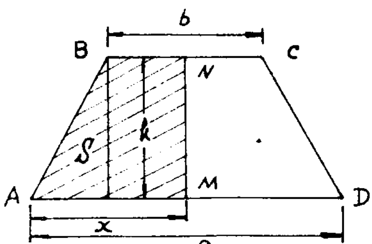
$$=\frac{hx^2}{a-b}$$

当$\frac{1}{2}(a-b) < x \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$时，

$$S(x)=xh-\frac{1}{2}\cdot h\cdot\left[\frac{1}{2}(a-b)\right]=xh-\frac{1}{4}(a-b)h$$

当$\frac{1}{2}(a+b) < x \leqslant a$时，

$$S(x)=\frac{1}{2}(a+b)h-\frac{h(a-x)^2}{(a-b)}$$



1—1

归结以上

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{hx^2}{a-b},当0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}(a-b)\\ xh-\dfrac{1}{4}(a-b)h,当\dfrac{1}{2}(a-b)<x\leqslant\dfrac{1}{2}(a+b).\\ \dfrac{h}{2}(a+b)-\dfrac{h(a-x)^2}{a-b},当\dfrac{1}{2}(a+b)<x\leqslant a\end{cases}$$

其图形为

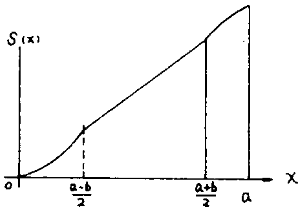


图 1—2

六、课内练习

1、设函数 $H(x)=\begin{cases}0,当x<0;\\ 1,当x\geqslant 0,\end{cases}$

求$H(x)-H(x-1)$.

2、设$f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x)$

3、将下列函数分解

(1)$y=log_a{}^{\sqrt{x}}$　　(2)$y=sin^2\sqrt{1-x-x^2}$

4、求$y=chx$的反函数及反函数的定义域。

七、课外作业

1、设$f(x)$定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域。

$(1) f(\sin x)$ ； $(2) f(\ln x)$ ； $(3) f\left(\frac{[x]}{x}\right)$

2、设 $\Psi(x)=sgn x$;　　$\Psi(x)=\frac{1}{x}$

求 $\Psi[\Psi(x)]$, $\Psi[\Psi(x)]$, $\Psi[\Psi(x)]$ 和 $\Psi[\Psi(x)]$.

3、设球半径为 r，作外切于球的圆锥如图 1—3 所示。试将圆锥体积表示为高的函数，并说明其定义域。

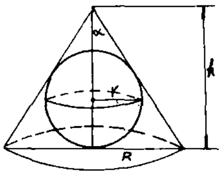


图 1—3

4、一下水道截面是矩形加半圆形（如图 1—4）截面面积为 A（常数），周长设为 L，底宽为 X，试建立 L 与 X 的关系式。

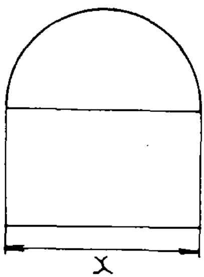


图 1—4

八、提示与答案

课内练习部分