应用概率统计

下册

马逢时　何良材
余明书　范金城　合编

一九八四年五月

第二篇　多元统计分析

多元统计分析（简称多元分析）是运用数理统计的方法来研究多指标问题的理论和方法。它是一元统计学的推广，它对所研究的每个观测对象（又叫个体）要同时观测 p（$p\geqslant 2$）个变量值。例如，我们要挑选一部分人，担任一部门的某一工作，必须对被挑选的对象进行多指标的观测。如：要了解他的学术能力、精明程度、理解能力、交际能力、适应性、外貌等。现有了 n 个人的以上这些指标所测得的数据表，怎样分析这些数据，从而找到最好的挑选方法呢？这就是多元分析所要研究的内容之一。多元分析以 p 个变量的多组数据建立的资料表为依据，寻求多种方法，或对所考查的观测对象进行分组、分类，或分析这 p 个变量之间的相互关联程度，或找出内在规律等等。随着电子计算机的广泛应用以及科研、生产发展方面的迫切需要，多元分析已广泛地应用于工业、农业、经济、医学、文教、气象、地质、考古、社会科学等各个方面。下面我们分三章介绍有关基本概念和常用的一些统计方法。

第七章　多元正态分布及参数的估计和检验

在多元统计学中，多元正态分布占有相当重要的位置。这是因为，一方面，许多随机向量确实服从正态分布，或近似服从正态分布。另一方面，对于多元正态分布，已有一整套统计推断方法，并且得到了许多完整的结果。本章要从多元正态分布的样本观测值——样本资料阵开始，介绍一些直观背景和简单分析，再正式给出多元正态分布的定义及一些重要性质，最后讨论多元正态分布的参数估计、均值检验。

§1　随　机　向　量

我们所讨论的是多个变量的总体，所研究的数据是同时观测 p 个变量（即指标），又进行 n 次观测得到的，我们把这 p 个指标表示为 x_1，……，x_p 常用随机向量

$$X=(x_1,\cdots,x_p)'$$

表示对同一个体观测的 p 个变量。如果观测了 n 个个体，则称每一个个体的 p 个变量为一个**样品**，而全体 n 个样品形成一个**样本**。

编号＼变量	x_1	$x_2\cdots\cdots x_p$
1	x_{11}	$x_{12}\cdots\cdots x_{1p}$
2	x_{21}	$x_{22}\cdots\cdots x_{2p}$
⋮	⋮	⋮　　⋮
n	x_{n1}	$x_{n2}\cdots\cdots x_{np}$

一、样本资料阵：

本节中我们先介绍样本观测值形成的样本资料阵。然后介绍一般的多元随机变量——随

机向量的数字特征及其计算公式。

对上表中横看，记

$$X_{(\alpha)}=(x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2},\cdots x_{\alpha p})' \qquad \alpha=1,\ 2,\cdots,n$$

它表示第 α 个样品观测值。

竖看上表，第 j 列的元素

$$X_j=(x_{1j},\ x_{2j},\ \cdots x_{nj})'$$

表示对第 j 个变量 x_j 的 n 次不同的取值数。

故样本资料表可用矩阵语言表为

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}=(X_1,X_2,\cdots,X_p)=\begin{pmatrix} X'_{(1)} \\ X'_{(2)} \\ \vdots \\ X'_{(n)} \end{pmatrix}$$

有时，也简单的表示为

$$X_{(\alpha)}=(x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2},\ \cdots x_{\alpha p})' \qquad \alpha=1,\ \cdots,\ n$$

为了避免使用过多的符号，在不致混淆的情况下，我们一般对随机变量及其取值使用相同符号。大写字母表示向量，如 $X_{(\alpha)}$（第 α 个样品），X_j（第 j 个分量的 n 个值）。用大写黑体字母表示矩阵，如 $\mathbf{X}$（表示资料阵）等。变量用小写字母，如 x_j（表示第 j 个变量）。

二、随机向量的数字特征

设 $X=(x_1,\ \cdots,x_p)'$， $Y=(y_1,\cdots,y_q)'$ 是两个随机向量，其中 x_i，y_j 是随机变量 $i=1,\cdots,p$， $j=1,\cdots,q$

1． 随机向量 X 的均值

随机向量 X 有 p 个分量。若 $E(X_i)=\mu_i$ 存在， $i=1,\ 2,\cdots,p$,，我们定义随机向量 X 的均值为

$$EX=\begin{pmatrix} Ex_1 \\ Ex_2 \\ \vdots \\ Ex_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}=\mu \tag{1.1}$$

μ 是一个 p 维向量，称为**均值向量**。类似地可以定义 X 为矩阵时的均值。

2． 向量的 X 的协差阵

$$V=D(X)=E(X-EX)(X-EX)'$$

$$=\begin{pmatrix} Dx_1 & C_{OV}(x_1,x_2)\cdots & C_{OV}(x_1,x_p) \\ C_{OV}(x_2,x_1) & Dx_2\quad\cdots & C_{OV}(x_2,x_p) \\ \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots \\ C_{OV}(x_p,x_1) & C_{OV}(x_p,x_2)\cdots & Dx_p \end{pmatrix}\triangleq(\sigma_{ij}) \tag{1.2}$$

3． 向量 X 和向量 Y 的协差阵

$$C_{OV}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)'$$

$$=\begin{pmatrix} Cov(x_1,y_1) & Cov(x_1,y_2), & \cdots & Cov(x_p,y_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(x_p,y_1) & Cov(x_p,y_2) & \cdots & Cov(x_p,y_q) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

4. 向量X的相关矩阵

$$R=(r_{ij})$$

其中

$$r_{ij}=\frac{Cov(x_i,x_j)}{\sqrt{Dx_i}\sqrt{Dx_j}}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}} \quad i,\ j=1,\cdots p。(1.4)$$

三、常用的公式及其性质

1. 常用公式：设X，Y为随机向量，A，B为常数矩阵

则

$$E(AX)=AE(X) \quad (1.5)$$

$$E(AXB)=AE(X)B \quad (1.6)$$

$$D(AX)=AD(X)A'=AVA' \quad (1.7)$$

$$Cov(AX,BY)=ACov(X,Y)B' \quad (1.8)$$

上述式中（1.5）（1.6）当向量X为矩阵$\mathbf{X}$时，等式仍然成立。

2. 关于协差阵

任何随机向量$X=(x_1,\ \cdots,x_p)$的协差阵V，都是对称阵，同时总是非负定（也称半正定）的。大多数情形下是正定的。

以后将"V是正定阵"表示为$V>0$；"V是半正定阵"表示为$V\geqslant 0$。

从矩阵代数知识可知，若协差阵$V>0$，则V的特征根均为正数；$|V|>0$，$V'=V$；同时有$V=AA'$（即正定阵可分解为非奇异矩阵A与其转置阵的乘积）。我们还可以要求A是对称阵，记这样的A为$V^{\frac{1}{2}}$，则V可表示为$V^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$。若将$V$剖分为

$$V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

其中V_{11}，V_{22}为方阵，则V_{11}，V_{22}亦为正定阵。

四、多元变量的独立性

设$X=(x_1,\cdots,x_p)$，$Y=(y_1,\cdots,y_q)'$分别是p维，q维随机向量，X与Y的独立性定义可以有下列三种方式：

1. 称多元变量X，Y为相互独立，若它们的分布函数满足关系

$$F(X,Y)=F_1(X)F_2(Y) \quad (1.9)$$

其中$F(X,Y)$是（X，Y）的联合分布函数，$F_1(X)$，$F_2(Y)$分别是X，Y的边缘分布函数。

2. 若多元变量X，Y的联合分布密度函数存在，分别记为

$$f(X,Y),\ f_1(X),\ f_2(Y) \quad (1.10)$$

则称X与Y相互独立，若$f(X,Y)=f_1(X)$，$f_2(Y)$成立。

3. 记$X=(x_1,\cdots,x_p)'$的特征函数为

$$\varphi(t)=Ee^{it'X}$$

其中 $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_p)'$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_p)'$，$i=\sqrt{-1}$

即 $$\varphi(\mathbf{t})=Ee^{i\mathbf{t}'X}=Ee^{i(t_1x_1+\cdots+t_px_p)}$$

称X，Y相互独立，如果

$$\varphi(\mathbf{t})=\varphi_1(\mathbf{t}_1)\cdot\varphi_2(\mathbf{t}_2) \tag{1.11}$$

成立，其中$\mathbf{t}'=(\mathbf{t}_1',\ \mathbf{t}_2')$，$\varphi(\mathbf{t})$，$\varphi_1(\mathbf{t}_1)$，$\varphi_2(\mathbf{t}_2)$ 分别是（X，Y），X及Y的特征函数。

可以证明，当密度存在时，三者是等价的。在多元分析的理论中，特征函数是不可缺少的工具，对这部分内容不熟悉的读者，有关证明可以暂时略去不读。

§2 多元正态分布

一、多元正态分布的定义

在概率论中，已讲过一元正态分布的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0。$$

上式可以改写成

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)\right\}$$

这里（$x-\mu$）′代表（$x-\mu$）的“转置”，但由于x，μ均为一维的数字，转置与否都相同，因此可以这样写。

当服从一元正态分布的随机变量X的概率密度函数改写为上式时，我们就可以将其推广，定义出多元正态分布。

定义2.1 若p元随机向量$X=(x_1,\ \cdots,\ x_p)'$的概率密度函数为

$$f(x_1\cdots,x_p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\ |V|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'V^{-1}(X-\mu)\right\}$$

$$(V>0) \tag{2.1}$$

则称$X=(x_1,\ \cdots,\ x_p)'$服从**p元正态分布**，也称X为**p元正态变量**。记为$X\sim N_p(\mu,\ V)$，在不强调维数时可以简记为$X\sim N(\mu,V)$。

可以证明，这里的μ即为X的**均值向量**（或称数学期望向量），V即为X的**协差阵**，它是$p\times p$阶正定阵。具体写出来就是

$$\mu=E\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}Ex_1\\ \vdots\\ Ex_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_p\end{pmatrix}\qquad V_{p\times p}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\cdots&\sigma_{1p}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\cdots&\sigma_{2p}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \sigma_{p1}&\sigma_{p2}&\cdots&\sigma_{pp}\end{pmatrix}$$

$|V|$为协差阵V的行列式。

当 $p=2$ 时，我们可以得到二元正态分布的密度式：

设 $X=(x_1, x_2)'$ 服从二维正态分布，其概率密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'V^{-1}(X-\mu)\right\}\quad V>0$$

其中

$$V=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 r\\ \sigma_1\sigma_2 r & \sigma_2^2\end{pmatrix}\qquad r\neq\pm 1$$

这里 σ_1^2，σ_2^2 分别是 x_1 与 x_2 的方差，r 是 x_1，x_2 的相关系数。由于 $|V|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)$，

$$V^{-1}=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2 r\\ -\sigma_1\sigma_2 r & \sigma_1^2\end{pmatrix}$$

故

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

这与我们在概率论中所学的结果是一致的。

对于 p 维正态分布，也可以用特征函数来定义。

定义2.2 若随机向量 X 的特征函数为 $\varphi_X(\mathbf{t})=e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'V\mathbf{t}}$，则称 X 服从 p 维正态分布（这里 μ 为 p 维列向量，V 为 p 阶非负定阵）。记为 $X\sim N(\mu, V)$。

下面讲述一下它的来源。并且由密度求出特征函数来。

对于一元正态分布 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，它的特征函数为（t 是单个变量）

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

注意到：$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

由于 $$itx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}=\frac{-(x-\mu-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}$$

故

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}dx$$

$$= e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

为了推广它得到多维正态分布的特征函数，注意t'与t是一回事，故这时特征函数亦可写为

$$\varphi(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\sigma^2 t} \qquad (2.2)$$

因为特征函数唯一地决定分布函数，故由正态分布的特征函数$\varphi(t)$的表达式中也能直接看到其中的参数μ和σ^2正好是正态随机变量X的数学期望与方差。

如果随机向量$X=(x_1, \cdots, x_p)' \sim N_p(\mu, V)$，$(V>0)$，则$X$的特征函数可以仿上述方法推出。

首先，当$X=(x_1, \cdots, x_p)'$的各分量为p个独立标准正态变量时，有$X \sim N_p(0, I_p)$，这时可求出X的特征函数

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= Ee^{it'X} \\
&= Ee^{i\sum_{j=1}^{p} t_j X_j} \\
&= E\prod_{j=1}^{p} e^{it_j X_j} \\
&= \prod_{j=1}^{p} Ee^{it_j x_j} \\
&= \prod_{j=1}^{p} (e^{it_j' 0 - \frac{1}{2}t_j' 1^2 t_j}) \\
&= e^{it'0 - \frac{1}{2}t' I_p t}
\end{aligned}$$

即
$$Ee^{it'X} = \int\cdots\int \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-t'X - \frac{1}{2}X'X} dX = e^{-\frac{1}{2}t't} \qquad (2.3)$$

其次，当$X=(x_1, \cdots, x_p)' \sim N_p(\mu, V)$ $(V>0)$，则X的特征函数可以证明为：

$$\varphi_X(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'Vt}$$

由于$V>0$，故$V^{-1}>0$，因而$V^{-1}=B'B$，其中B为p阶非退化方阵，且$|B| = |V|^{\frac{1}{2}}$，这时

$$\varphi_X(t) = E(e^{it'X}) = \int\cdots\int e^{it'X} \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|V|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)'V^{-1}(X-\mu)} dX$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|V|^{\frac{1}{2}}} \int\cdots\int e^{it'X - \frac{1}{2}(X-\mu)'B'B(X-\mu)} dX$$

令$Y=B(X-\mu)$，则由$dX = dx_1\cdots dx_p$到$dY = dy_1\cdots dy_p$的积分变量变换的Jacobi行列式

$|J| = \left|\dfrac{\partial Y}{\partial X}\right| = |B|$，又 $X = B^{-1}Y + \mu$。

故
$$\varphi_X(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|V|^{\frac{1}{2}}}\int\cdots\int e^{i\mathbf{t}'(B^{-1}Y+\mu)-\frac{1}{2}Y'Y}\frac{1}{|B|}dY$$
$$= e^{i\mathbf{t}'\mu}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{p/2}}\int\cdots\int e^{i(\mathbf{t}'B^{-1})Y-\frac{1}{2}Y'Y}dydY$$

由于此式后一个因子即是（2.3）式中形式，只不过这里要用 $\mathbf{t}'B^{-1}$ 代替（2.3）式中的 $\mathbf{t}'$ 而已。故

$$\varphi_X(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{t}'B^{-1})(\mathbf{t}'B^{-1})'}$$
$$= e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'B^{-1}B^{-1\prime}\mathbf{t}}$$
$$= e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'V\mathbf{t}}$$

多元正态分布还可以用另一种方式来定义。

若
$$\underset{p\times1}{X} = \underset{p\times m}{A}\ \underset{m\times1}{Y} + \underset{p\times1}{\mu} \tag{2.4}$$

其中 $Y \sim N_m(0, I_m)$，A 为任意矩阵，（p 可以比 m 小，也可以比 m 大），则称 $X \sim N_p(\mu, AA')$。

我们下面推出这时 X 的特征函数为 $\varphi_X(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'A'A\mathbf{t}}$

由于
$$\varphi_X(t) = Ee^{i\mathbf{t}'X} = Ee^{i\mathbf{t}'(AY+\mu)}$$
$$= Ee^{i\mathbf{t}'\mu}\cdot Ee^{i\mathbf{t}'AY}$$
$$= e^{i\mathbf{t}'\mu}\cdot Ee^{i(A'\mathbf{t})'Y}$$
$$= e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}(A'\mathbf{t})'(A'\mathbf{t})} = e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'AA'\mathbf{t}}$$

令　　$V = AA'$，则　$V \geqslant 0$，故
$$\varphi_X(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'V\mathbf{t}}$$

以上我们实际上给出了正态分布的三种定义：

1. 密度定义

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|V|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)'V^{-1}(X-\mu)} \qquad (V>0)$$

则称 $X \sim N_p(\mu, V)$。

2. 特征函数定义

若
$$\varphi(\mathbf{t}) = Ee^{i\mathbf{t}'X} = e^{i\mathbf{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathbf{t}'V\mathbf{t}} \qquad (V\geqslant 0)$$

则称 $X \sim N_p(\mu, V)$

3.
$$\underset{p\times1}{X} = \underset{p\times m}{A}\ \underset{m\times1}{Y} + \underset{p\times1}{\mu} \qquad y \sim N(0, I_m)$$

则　　$X \sim N_p(\mu, AA')$　　$(V = AA' \geqslant 0)$

可以证明：在 $V>0$ 时，三者是等价的，而后二定义包含了 $V\geqslant 0$ 的情形，因而严格说来，后二者更广泛些。

为了简便，以下各章均假定$V>0$。

二、多元正态分布的性质

多元正态分布有许多重要性质，这些性质对于建立多元统计分析的理论是极为重要的基础。下面我们根据需要，讨论最重要的几条：

性质1 如果正态随机向量$X=(x_1, \cdots, x_p)'$的协差阵V是对角阵，则X的每一分量是相互独立的随机变量。

证： 设随机向量$X=(x_1, \cdots, x_p)'\sim N_p(\mu, V)$，其中

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_p\end{pmatrix}, \qquad V=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sigma_p^2\end{pmatrix}$$

则随机向量X的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi_X(\mathrm{t})&=e^{i\mathrm{t}'\mu-\frac{1}{2}\mathrm{t}'V\mathrm{t}}\\ &=e^{i(t_1\mu_1+\cdots+t_p\mu_p)-\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2+\cdots+t_p^2\sigma_p^2)}\\ &=\prod_{j=1}^{p}e^{it_j\mu_j-\frac{1}{2}t_j^2\sigma_j^2}\\ &=\prod_{j=1}^{p}e^{it_j'\mu_j-\frac{1}{2}t_j'\sigma_j^2t_j}\\ &=\varphi_{x_1}(t_1)\cdot\varphi_{x_2}(t_2)\cdots\varphi_{x_p}(t_p)\end{aligned}\tag{2.5}$$

由（1.11）及（2.2）知，$x_1, \cdots, x_p$相互独立，且分别具有均值$\mu_1, \mu_2, \cdots\mu_p$和方差$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_p^2$。

性质2 多元正态变量$X=(x_1, \cdots, x_p)'$的任意线性变换仍然服从多元正态分布。即设$X\sim N_p(\mu, V)$而m维随机向量$Y_{m\times 1}=AX+b$，其中$A=(a_{ij})$是$m\times p$阶的常数矩阵，b是m维的常向量。则m维随机向量y也是正态的，且$Y\sim N_m(A\mu+b, AVA')$。即Y服从m元正态分布，其均值向量为$A\mu+b$，协差阵为AVA'。

证： 我们直接求随机向量Y的特征函数：

$$\begin{aligned}\varphi_Y(\mathrm{t})&=Ee^{i\mathrm{t}'Y}\\ &=Ee^{i\mathrm{t}'(AX+b)}\\ &=Ee^{i\mathrm{t}'AX+i\mathrm{t}'b}\\ &=e^{i\mathrm{t}'b}\cdot Ee^{i(A'\mathrm{t})'X}\\ &=e^{i\mathrm{t}'b}\cdot e^{i(A'\mathrm{t})'\mu-\frac{1}{2}(A'\mathrm{t})'V(A'\mathrm{t})}\\ &=e^{i\mathrm{t}'b}\cdot e^{i\mathrm{t}'A\mu-\frac{1}{2}\mathrm{t}'AVA'\mathrm{t}}\\ &=e^{i\mathrm{t}'(A\mu+b)-\frac{1}{2}\mathrm{t}'AVA'\mathrm{t}}\end{aligned}\tag{2.6}$$

由上所证，就知m维随机向量Y服从m维正态分布，其均值向量为$A\mu+b$，协差阵为AVA'即$Y\sim N_m(A\mu+b，AVA')$

性质3 多元正态分布的任何边际分布都是正态分布。（多元正态随机向量X的某些分量的联合分布称为X的边际分布）。

即设$X=(x_1，\cdots，x_p)'\sim N_p(\mu，V)$，如果将$X$、$\mu$、$V$作相应的剖分

$$X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}，\mu=\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\\mu^{(2)}\end{pmatrix}，V=\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}$$

则$X^{(1)}$，$X^{(2)}$都服从多元正态分布。

证：现在求$X^{(2)}$的分布。

我们取$t=\begin{pmatrix}0\\t_2\end{pmatrix}$，$t_2$与$X^{(2)}$同维数，$t$与$X$同维数，则$X^{(2)}$的特征函数为

$$\varphi_{X^{(2)}}(t)=\varphi\begin{pmatrix}0\\t_2\end{pmatrix}=e^{i'\mu t-\frac{1}{2}t'Vt}$$

$$=e^{i(0\quad t_2')\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\\mu^{(2)}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}(0\quad t_2')\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\t_2\end{pmatrix}}$$

$$=e^{it'\mu^{(2)}-\frac{1}{2}t_2'V_{22}t_2}$$

由此可知，$X^{(2)}$服从正态分布，且其均值为$\mu^{(2)}$，协差阵为V_{22}，即$X^{(2)}\sim N(\mu^{(2)}，V_{22})$。

同样可以证明$X^{(1)}\sim N(\mu^{(1)}，V_{11})$，这就证明了性质3。

性质4 若p元随机向量$X=(x_1，\cdots，x_p)'$服从p元正态分布$N_p(\mu，V)$，$(V>0)$。我们对X，μ，V作相应的剖分。

$$X\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}，\mu=\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\\mu^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}，V=\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p_1\quad p_2$$

$$p_1+p_2=p$$

则$X^{(1)}$与$X^{(2)}$独立的充要条件是$X^{(1)}$的每一分量与$X^{(2)}$中的每一分量的协方差为0，即$V_{12}=V_{21}'=0$

证：

$X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}$的特征函数为：

$$\varphi_{(X^{(1)},X^{(2)})}(t)=e^{i(t_1'\mu^{(1)}+t_2'\mu^{(2)})-\frac{1}{2}(t_1',t_2')\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}}$$

$$=e^{(it_1'\mu^{(1)}-\frac{1}{2}t_1'V_{11}t_1)}\cdot e^{(it_2'\mu^{(2)}-\frac{1}{2}t_2'V_{22}t_2)}\cdot e^{-t'V_{12}t_2}$$

$$=\varphi_{X^{(1)}}(t)\cdot\varphi_{X^{(2)}}(t_2)\cdot e^{-t_1'V_{12}t_2}$$

故$X^{(1)}$与$X^{(2)}$相互独立的充要条件是$t_1'V_{12}t_2=0$，对于任何的t_1，t_2成立。故要上式为零，其充要条件为$V_{12}=0$。

§3 均值向量和协差阵的估计和检验

上节讨论了多元正态分布的性质，在实际问题中，多元正态分布的参数μ和V都是未知的，我们只能观测到样本资料阵。如何通过样本资料阵，对参量μ和V作出估计呢？又怎样检验总体之间是否存在着差异？这就是本节所要讨论的问题。

一、多元正态分布的参数估计

我们首先通过一个实例，了解求μ和V的估计量的方法，再讲到一般的公式。

例3.1 表中的数据，是从某地一个村庄里关于黄麻的一项试验中收集的。对于20个随机选取的个体植株，记录其青黄麻植株的重量(x_2)与它们的干黄麻纤维的重量(x_1)，假定$X=(x_1, x_2)'$是正态分布的，它具有均值$\mu=(\mu_1, \mu_2)'$，且协差阵是V，求μ和V的估计$\hat{\mu}$和$\hat{V}$。

植株号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_1(克)	68	63	70	6	65	9	10	12	20	30	33	27	21	5	14	27	17	53	62	65
x_2(克)	971	892	1125	82	931	112	162	321	315	375	462	352	305	84	229	332	185	703	872	740

解：均值μ的估计量记作$\overline{X}$，称为**样本均值**。

$$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}(68+63+\cdots+65)\\(971+892+\cdots+740)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33.85\\477.50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix}$$

协差阵V的估计量记作$\hat{V}$，对它有多种估计法。这里用样本协差阵，它是$\hat{V}$的无偏估计。为计算$\hat{V}$，先计算离差阵S，而

$$\hat{V}=\frac{1}{20-1}S$$

令 $$X_{(\alpha)}=(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2})' \qquad \alpha=1, \cdots, 20$$

则
$$S=\sum_{\alpha=1}^{20}(X_{(\alpha)}-\overline{X})(X_{(\alpha)}-\overline{X})'$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{20}\left[\begin{pmatrix}x_{\alpha 1}\\x_{\alpha 2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}x_{\alpha 1}\\x_{\alpha 2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix}\right]'$$

$$=\begin{pmatrix}\sum\limits_{\alpha=1}^{20}(x_{\alpha 1}-\overline{x}_1)^2 & \sum\limits_{\alpha=1}^{20}(x_{\alpha 1}-\overline{x}_1)(x_{\alpha 2}-\overline{x}_2)\\ & \sum\limits_{\alpha=1}^{20}(x_{\alpha 2}-\overline{x}_2)^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 10838.6 & 149056.6 \\ & 2135681 \end{pmatrix}$$

由于$\widehat{V}$为对称阵，这里只需写出上三角部分，下同。所以协差阵V的估计量为

$$\widehat{V}=\frac{1}{20-1}\begin{pmatrix} 10838.6 & 149056.6 \\ & 2135681 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 570.45 & 7845.08 \\ & 112404.26 \end{pmatrix}$$

在一般情况下，如果样本资料阵为

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1p} \\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{np} \end{pmatrix}=(X_1,\ X_2,\cdots,X_p)=\begin{pmatrix} X'_{(1)} \\ X'_{(2)} \\ \vdots \\ X'_{(n)} \end{pmatrix}$$

设样品$X_{(1)}$，$X_{(2)}$，$\cdots X_{(n)}$相互独立，同服从于p元正态分布$N_p(\mu,V)$，而且$n>p$，$V>0$，则总体参数μ和V的估计量分别是

$$\widehat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}X_{(\alpha)}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum\limits_{\alpha=1}^{n}x_{\alpha 1} \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{n}x_{\alpha 2} \\ \vdots \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{n}x_{\alpha p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_p \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

即，均值向量μ的估计量，就是样本均值。这是由极大似然法推导出来的。容易看出，当我们的样本资料阵选取的是p个变量的数据时，则$\widehat{\mu}=\overline{X}$当然也是$p$维向量。协差阵$V$的极大似然估计量$\widehat{V}$为

$$\widehat{V}_M=\frac{1}{n}S=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(X_{(\alpha)}-\overline{X})(X_{(\alpha)}-\overline{X})' \tag{3.2}$$

其中S是离差阵，它是每一个样品（向量）与样本均值（向量）的离差积形成的n个$p\times p$阶对称阵的和。求出S，再除以样本容量n就是总体协差阵V的极大似然估计。同一维相似，用$\widehat{V}_M$估计V并不是无偏的，为了得到无偏估计我们常用样本协差阵$\widehat{V}=\frac{1}{n-1}S$作为总体协差阵的估计。以下我们都是这样做的。

可以证明，μ的估计量$\overline{X}$是最小方差无偏估计，是有效估计，是强相合估计。V的估计量$\widehat{V}=\frac{1}{n-1}S$是最小方差无偏估计，是渐近有效估计，是强相合估计。

二、总体均值向量的检验

在一元统计中，有检验总体均值的问题，如：当总体是正态分布$N(a,\sigma^2)$时，要由样本资料检验假设H_0：$a=a_0$，a_0是某指定的数。在方差未知时，我们用统计量t来作检

验统计量。

$$T=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{S}$$

其中n是样本容量，$\overline{X}$是样本均值，S^2是样本方差。

由于在H_0下，统计量T服从$n-1$个自由度的t分布，给出检验水平α，可以求出相应的拒绝域，从而得出对假设H_0：$a=a_0$ 作出判断的一般方法。

现在，假设总体是多元正态分布的，但μ和V未知，我们的任务是要寻找一个最有代表性而且易求出分布规律的统计量，然后根据检验水平α，求出拒绝域，从而对假设H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$ 作出肯定或否定判断。

在多元正态分布下，均值检验能否化为p个一维正态分布检验来作呢？这是不能的。因为通常这p个分量之间有互相依赖的关系，分开作，往往得不出正确结论。

在多元分析中，常用的是T^2统计量和χ^2统计量，现分别叙述如下：

1．协差阵V已知时，均值向量的检验

（i）均值向量为指定值的检验

设$X_{(\alpha)}=(X_{\alpha 1},\cdots,X_{\alpha p})'$，$\alpha=1,\cdots,n$，是容量为$n$的随机样本，它们来自均值向量为$\mu$，协差阵为已知正定阵$V$的$p$元正态总体，对于指定向量$\mu_0$，要检验假设$H_0$：$\mu=\mu_0$，$H_1$：$\mu\neq\mu_0$，这时检验统计量为

$$D=n(\overline{X}-\mu_0)'V^{-1}(\overline{X}-\mu_0) \tag{3.3}$$

可以证明：在H_0成立条件下，它服从自由度为p的χ^2分布。其中$\overline{X}$是样本均值，n是样本容量。而在备择假设成立时，D有变大的趋势，因而拒绝域可以取为D值较大的右侧部分。因此，当给定检验水平α后，由样本值可以算出$\overline{X}$的值，当

$$D=n(\overline{X}-\mu_0)'V^{-1}(\overline{X}-\mu_0)\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(p)$$

时，便拒绝H_0，其中$\chi^2_{1-\alpha}(p)$是自由度为p的χ^2分布的$1-\alpha$分位数。

即 $$p\{\chi^2(p)\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(p)\}=1-\alpha$$

（ii）两个正态总体均值向量相等的检验

设$X_{(\alpha)}=(x_{\alpha 1},\cdots,x_{\alpha p})'$，$\alpha=1,\cdots,n_1$，是来自$p$元正态总体$N_p(\mu_1,V)$的容量为$n_1$的样本，$Y_{(\alpha)}=(y_{\alpha 1},\cdots,y_{\alpha p})'$，$\alpha=1,\cdots,n_2$，是来自$p$元正态分布$N_p(\mu_2,V)$的容量为$n_2$的样本，并且两个样本间相互独立。又设$V>0$是两个正态总体共同的协差阵。

当V已知时，我们要检验假设

H_0：$\mu_1=\mu_2$，备择假设 H_1：$\mu_1\neq\mu_2$。

这时检验统计量为

$$D^*=\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\overline{X}-\overline{Y})'V^{-1}(\overline{X}-\overline{Y}) \tag{3.4}$$

可以证明，当H_0成立时，D^*服从自由度为p的χ^2分布，其中$\overline{X}$，$\overline{Y}$分别是两个总体的样本均值，n_1，n_2是样本容量。当H_1成立时，D^*有变大的趋势，因而拒绝域可取为D^*值较大的右侧部分。具体做法是，当给定检验水平α后，由样本值计算出统计量D^*的值，当

$$D^*=\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\overline{X}-\overline{Y})'V^{-1}(\overline{X}-\overline{Y})\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(p)$$

时，便拒绝H_0，即认为两个总体的均值向量不等，其中$\chi^2_{1-\alpha}(p)$是自由度为p的χ^2分布的$1-\alpha$分位数。

2. 协差阵未知时，均值向量的检验

（i） 均值向量为指定值的检验。

设$X_{(\alpha)}=(X_{\alpha 1},\cdots X_{\alpha p})'$，$\alpha=1,\cdots,n$，是容量为$n$的样本（$n>p$），它们来自均值向量为$\mu$，协差阵为未知正定阵$V$的$p$元正态总体，要对假设

H_0：$\mu=\mu_0$，备择假设H_1：$\mu\neq\mu_0$

进行检验，其中μ_0是指定的已知向量。这时，所用统计量为

$$F=\frac{(n-p)}{(n-1)p}T^2=\frac{n}{p}(n-p)(\overline{X}-\mu_0)'S^{-1}(\overline{X}-\mu_0) \quad (3.5)$$

其中

$$T^2=n(n-1)(\overline{X}-\mu_0)'S^{-1}(\overline{X}-\mu_0)$$

称为霍太林T^2统计量，有些书中有它的分布表，但一般均用F检验来代替它。式中

$$S=\sum_{\alpha=1}^{n}(X_{(\alpha)}-\overline{X})(X_{(\alpha)}-\overline{X})'$$

是样本的离差阵，$\overline{X}$是样本均值，n为样本容量，p是随机向量的维数。

当假设H_0：$\mu=\mu_0$ 成立时

$$F=\frac{(n-p)}{(n-1)p}T^2=\frac{n}{p}(n-p)(\overline{X}-\mu_0)'S^{-1}(\overline{X}-\mu_0)\sim F(p,n-p)$$

且当H_1成立时，统计量F有变大的趋势。故在检验水平α下，如果

$$F=\frac{(n-p)}{(n-1)p}T^2\geqslant F_{1-\alpha}(p,\ n-p)$$

则拒绝H_0，否则接受H_0。

（ii） 两个正态总体均值向量相等的检验。

设$X_{(\alpha)}=(X_{\alpha 1},\cdots,X_{\alpha p})'$，$\alpha=1,\cdots,n_1$，为来自$p$元正态总体$N_p(\mu_1,V)$的容量为$n_1$的样本，$Y_{(\alpha)}=(y_{\alpha 1},\cdots,y_{\alpha p})'$，$\alpha=1,\cdots,n_2$，为来自$p$元正态总体$N_p(\mu_2,V)$容量为$n_2$的样本，且两样本间相互独立。假定两总体协差阵相等，但未知，我们考虑对假设

H_0：$\mu_1=\mu_2$，备择假设H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

的检验问题。这时，选用的统计量是

$$\widetilde{F}=\frac{n_1n_2(n_1+n_2-p-1)}{p(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)}(\overline{X}-\overline{Y})'\widehat{V}^{-1}(\overline{X}-\overline{Y}) \quad (3.6)$$

其中$\overline{X}$，$\overline{Y}$分别是两个总体的样本均值，n_1，n_2是样本容量，p为样品变量的维数，而

$$\widehat{V}=\frac{1}{n_1+n_2-2}(S_1+S_2)$$

是协差阵V的估计量，其中S_1，S_2是两个总体的样本离差阵，即

$$S_1=\sum_{\alpha=1}^{n_1}(X_{(\alpha)}-\overline{X})(X_{(\alpha)}-\overline{X})'$$

$$S_2=\sum_{\alpha=1}^{n_2}(Y_{(\alpha)}-\overline{Y})(Y_{(\alpha)}-\overline{Y})'$$

当 H_0：$\mu_1=\mu_2$ 成立时，$\widetilde{F}\sim F(p,n_1+n_2-p-1)$。

当 H_1：$\mu_1\neq\mu_2$ 成立时，$\widetilde{F}$ 有变大的趋势。因而拒绝域可以取为 F 值较大的右侧区域，即当给定检验水平 α，若

$$\widetilde{F}\geqslant F_{1-\alpha}(p,n_1+n_2-p-1)$$

时，则拒绝 H_0，否则接受 H_0。

例3.2 设 $X=(x_1,\cdots,x_4)'\sim N_4(\mu_1,V)$，$Y=(y_1,\cdots,y_4)'\sim N_4(\mu_2,V)$。$V>0$ 未知。现分别测得来自两个总体的数据如表，试检验假设：H_0：$\mu_1=\mu_2$ （$\alpha=0.01$）

变量 / 编号	x_1	x_2	x_3	x_4
1	13.85	4.79	7.8	49.6
2	22.31	4.67	12.31	47.8
3	28.82	4.63	16.18	62.15
4	15.29	3.57	7.58	43.2
5	28.29	4.90	16.12	58.7

变量 / 编号	y_1	y_2	y_3	y_4
1	2.18	1.06	1.22	20.6
2	3.85	0.8	4.06	47.1
3	11.4	0	3.50	0
4	3.66	2.42	2.14	15.1
5	12.10	0	5.68	0

注：作这种检验时，必须用较多的样品。本例中样本量太少，仅用来解释计算步骤，实际中是不允许的。

解：此题属于对两个未知协差阵的总体，检验均值是否相等的问题，故首先要计算统计量 $\widetilde{F}$ 的值。

$$\widetilde{F}=\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)}\cdot\frac{n_1+n_2-1-p}{p}(\overline{X}-\overline{Y})'\widehat{V}^{-1}(\overline{X}-\overline{Y})$$

$$\stackrel{\Delta}{=}\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)}\cdot\frac{n_1+n_2-1-p}{p}D^2$$

其中 D^2 是两个样本的马氏距离。马氏距离概念见214页。

$$D^2=(\overline{X}-\overline{Y})'\widehat{V}^{-1}(\overline{X}-\overline{Y})=(n_1+n_2-2)(\overline{X}-\overline{Y})'(S_1+S_2)^{-1}(\overline{X}-\overline{Y})$$

$\left(\text{因为}\widehat{V}=\frac{1}{n_1+n_2-2}(S_1+S_2)\right)$。$S_1$，$S_2$是两总体的样本离差积和阵。

为计算 D^2

第一步：求 $\overline{X}$，$\overline{Y}$

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n_1} x_{j1}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_1} x_{jp}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}13.85+\cdots+28.29\\ \vdots \\ 49.6+\cdots+58.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21.712\\4.105\\11.998\\52.290\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \overline{x_3}\\ \overline{x_4}\end{pmatrix}$$

同理

$$\overline{Y}=\begin{pmatrix}6.638\\0.856\\3.320\\16.560\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\\ \overline{y_3}\\ \overline{y_4}\end{pmatrix}$$

第二步，计算$\overline{x_i}-\overline{y_i}$　　　$i=1$，2，3，4。

$$a_1=\overline{x_1}-\overline{y_1}=21.712-6.638=15.074$$
$$a_2=\overline{x_2}-\overline{y_2}=4.105-0.856=3.249$$
$$a_3=\overline{x_3}-\overline{y_3}=11.998-3.820=8.673$$
$$a_4=\overline{x_4}-\overline{y_4}=52.290-16.560=35.730$$

第三步，计算S_1+S_2

$$S_1+S_2=\begin{pmatrix}\Sigma(x_{j1}-\overline{x_1})^2+\Sigma(y_{j1}-\overline{y_1})^2\cdots\Sigma(x_{j1}-\overline{x_1})(y_{j4}-\overline{x_4})+\Sigma(y_{j1}-\overline{y_1})\cdot(y_{j4}-\overline{y_4})\\ \\ \cdots\cdots \\ \\ \Sigma(x_{j4}-\overline{x_4})^2+\Sigma(y_{j4}-\overline{y_4})^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}286.230 & 9.1034 & 142.964 & -79.0278\\ & 7.232 & 9.1758 & 41.590\\ & & 83.671 & 91.43\\ & & & 1747.944\end{pmatrix}$$

第四步：为计算$D^2=(n_1+n_2-2)(\overline{x}-\overline{y})'(S_1+S_2)^{-1}(\overline{x}-\overline{y})$，令

$$(S_1+S_2)^{-1}(\overline{x}-\overline{y})=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

即

$$(S_1+S_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

由

$$\begin{pmatrix} 286.230 & 9.1034 & 142.964 & -79.0278 \\ & 7.232 & 9.1758 & 41.590 \\ & & 83.671 & 91.483 \\ & & & 1747.944 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15.074 \\ 3.249 \\ 8.678 \\ 35.30 \end{pmatrix}$$

得方程组

$$\begin{cases} 286.230b_1+9.1034b_2+142.964b_3-79.0278b_4=15.074 \\ 9.1034b_1+7.232b_2+9.1758b_3+41.590b_4=3.249 \\ 142.964b_1+9.1758b_2+83.6713b_3+71.4839b_4=8.678 \\ -79.0278b_1+41.590b_2+91.483b_3+1747.944b_4=35.730 \end{cases}$$

解上述方程组得

$$b_1=0.6136 \quad b_2=0.5452 \quad b_3=-1.1063 \quad b_4=0.0931$$

第四步：计算D^2，$\widetilde{F}$

$$\begin{aligned} D^2 &= (n_1+n_2-2)\ (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)(b_1\ b_2\ b_3\ b_4)' \\ &= (5+5-2)\ (15.074\quad 3.249\quad 8.678\quad 35.730)\cdot \\ &\quad \cdot(0.6136\quad 0.5452\quad -1.1061\quad 0.0931)' \\ &= 37.9744 \end{aligned}$$

于是

$$\widetilde{F}=\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)}\cdot\frac{n_1+n_2-p-1}{p}D^2$$

$$=\frac{5\times 5}{(5+5)(5+5-2)}\times\frac{5+5-4-1}{4}\times 37.9744=14.822$$

第五步：查F分布的$1-\alpha=0.99$的分位点表

$$F_{1-\alpha}(p,n_1+n_2-p-1)=F_{0.99}(4,5)=11.4$$

第六步：比较作结论

因为14.822>11.4，故否定H_0，即认为两总体均值有高度显著差异。