十二年制学校初級中学課本

代　　数

DAISHU

（試教本）

第 三 册

（供二年級用）

人 民 教 育 出 版 社

十二年制学校初級中学課本代数(試教本)第三冊

目　录

第十章　数的开方

I　开平方

10.1 平方根　我們知道，正方形的面积等于它的边长的平方．例如，边长是 3 尺的方桌面，它的面积等于 3^2 就是 9 平方尺．有时，我們知道了正方形的面积，要計算它的边长．例如，要做一个面积是 9 平方尺的方桌面，就要先求出这个方桌面的边长，也就是要求出一个平方后等于 9 的正数．因为 $3^2=9$，所以这个方桌面的边长是 3 尺．

一个数的平方等于 a，这个数就叫做 a 的**平方根**．例如，$3^2=9$，3 就是 9 的平方根；又如，$(-3)^2=9$，-3 也是 9 的平方根．

因为两个相反的数的平方是同一个正数，例如，3^2 和 $(-3)^2$ 都是 9，$\left(\frac{2}{5}\right)^2$ 和 $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ 都是 $\frac{4}{25}$，所以，**一个正数有两个平方根，这两个平方根的絕对值相等，符号相反．**

因为零的平方是零，并且只有零的平方才是零，所以，**零的平方根是零．**

任何正数、任何負数以及零的平方都不是一个負数，

因此，**负数沒有平方根***．例如，-4 沒有平方根．

求一个数的平方根的运算叫做**开平方**，这个数叫做**被开方数**．例如，求 9 的平方根，就是把 9 开平方，9 就是被开方数，所得的平方根就是 $+3$ 和 -3，簡写作 ± 3，这里的符号"$\pm$"讀作"正負"．

开平方和平方互为逆运算．因此，我們可以利用平方的运算来求一个数的平方根．

例 求下列各数的平方根：

(1) 36；(2) $\frac{81}{121}$；(3) 0.0004．

解 (1) $\because (\pm 6)^2 = 36$，$\therefore$ 36 的平方根是 ± 6；

(2) $\because \left(\pm\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{81}{121}$，$\therefore \frac{81}{121}$的平方根是$\pm\frac{9}{11}$；

(3) $\because (\pm 0.02)^2 = 0.0004$，$\therefore$ 0.0004 的平方根是 ± 0.02．

练 习

1. 一个正数有几个平方根？为什么？
2. 說出 16、25、49、64、100、144 的平方根各等于多少．

10.2 算术平方根 我們讲过，一个正数有两个平方根，它們的絕对值相等，符号相反．因此，求一个正数的平方根，只要求出了它的正的平方根，就可以知道它的負

---

* 将来数的概念扩大到复数以后，負数也有平方根．負数的平方根是虛数．

的平方根．例如，求 169 的平方根，只要求出了它的正的平方根是 13，就可以知道它的負的平方根是 -13．

一个正数的正的平方根叫做这个数的**算术平方根**．正数 a 开平方所得的算术平方根用符号 $\sqrt{a}$ 表示．例如，$\sqrt{49}=7$，$\sqrt{0.16}=0.4$．0 的算术平方根是 0，就是 $\sqrt{0}=0$．

必須注意，如果 $a>0$，那么符号 $\sqrt{a}$ 所表示的数是一个正数；如果 $a=0$，那么 $\sqrt{a}=0$；如果 $a<0$，那么 $\sqrt{a}$ 沒有意义*．

一个正数 a 的正的平方根（就是它的算术平方根）用符号 $\sqrt{a}$ 表示，那么它的負的平方根就可以用符号 $-\sqrt{a}$ 表示．因此，正数 a 的两个平方根可以記作 $\pm\sqrt{a}$．例如，$\frac{4}{9}$ 的两个平方根可以記作 $\pm\sqrt{\frac{4}{9}}$．

练　习

1. 81 的平方根是多少？81 的算术平方根是多少？
2. 說出下列各数的算术平方根各是多少？

   (1) 196；(2) 400；(3) $\frac{4}{25}$；(4) 0.09．
3. $\sqrt{9}$ 表示什么？$\sqrt{9}$ 是不是等于 ± 3？为什么？
4. 用符号表示：

   (1) 121 的算术平方根是 11；

---

* 将来数的概念扩大到复数以后，可以知道，当 $a<0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示虛数．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(2) $\frac{16}{25}$的算术平方根是$\frac{4}{5}$;

(3) 0.64 的算术平方根是 0.8.

5. 計算: (1) $\sqrt{49}$; (2) $\sqrt{0.36}$; (3) $\sqrt{\frac{9}{100}}$.

6. 用符号表示: (1)正数 x 的算术平方根; (2)正数 y 的平方根.

10.3 整数开平方 我們先来研究整数的算术平方根的位数.

我們知道:

$$1^2=1, \qquad 9^2=81,$$
$$10^2=100, \qquad 99^2=9801,$$
$$100^2=10000, \qquad 999^2=998001,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可見: 一位数的平方是一位数或者两位数; 两位数的平方是三位数或者四位数; 三位数的平方是五位数或者六位数; ……. 反过来, 就可以知道:

一位数和两位数的算术平方根有一位整数;

三位数和四位数的算术平方根有两位整数;

五位数和六位数的算术平方根有三位整数;

…………………………………………….

因此, 我們把一个整数从个位起向左每隔两位用一个撇号分开, 所分得的段数, 就是这个数的算术平方根的整数位数. 例如, 1156 可以分成 11′56 两段, 它的算术平

方根有两位整数；40401 可以分成 4′04′01 三段，它的算术平方根有三位整数；86713344 可以分成 86′71′33′44 四段，它的算术平方根有四位整数．

其次，我們再来研究一个数的算术平方根的最高位上的数．

我們知道，两个正数中，較大的数的平方也較大；因此，两个正数中，較大的数的算术平方根也較大．根据这个性质，可以确定一个数的算术平方根的最高位上的数．例如，11′56 的左边第一段的数是 11，11在 3^2 与 4^2 之間，所以 1156 的算术平方根的最高位上的数是 3；4′04′01 的左边第一段的数是 4，4 是 2^2，所以 40401 的算术平方根的最高位上的数是 2；86′71′33′44 的左边第一段的数是 86，86 在 9^2 与 10^2 之間，所以 86713344 的算术平方根的最高位上的数是 9．

练 习

下列各数的算术平方根各有几位整数？最高位上的数各是几？

529，7396，45369，259081，9114361，15217801．

現在我們来研究求整数的算术平方根的方法．

我們看怎样求 1156 的算术平方根．把 1156 写成 11′56，可以知道它的算术平方根是两位数，并且最高位上的数是 3．如果我們用 a 代表这个算术平方根的个位

上的数，那么就可以把这个算术平方根写成 $30+a$ 的形式．于是

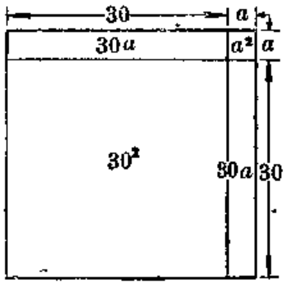

图 10.1

$$1156=(30+a)^2$$
$$=30^2+2\cdot30a+a^2.$$

从 1156 减去 900(就是 30^2)，得：

$$\begin{array}{rl} 1156 & \cdots\cdots(30+a)^2 \\ -)\ 900 & \cdots\cdots 30^2 \\ \hline 256 & \cdots\cdots 2\cdot30a+a^2 \end{array}$$

就是說，所得的 256 应該等于 $2\cdot30a+a^2$．根据这个关系，我們可以求出这个算术平方根的个位数 a．

因为 a 是个位数，所以在 $2\cdot30a+a^2$ 里的 $2\cdot30a$ 要比 a^2 大得多，也就是說 $2\cdot30a$ 只略小于 256．因此，可以用 $2\cdot30$(就是 60)去除 256 来求 a，所得的商的整数部分是 4，所以 a 的值不会超过 4．

要确定 a 的值是不是 4，只要計算 $2\cdot30a+a^2$ 的值是不是 256 就可以了．因为 $2\cdot30a+a^2=(60+a)a$，现在 $(60+4)\cdot4=64\cdot4=256$，所以 a 的值就是 4．因此，$\sqrt{1156}=34$．

上面所說的計算过程，可以写成下面的形式：

$$\begin{array}{lrl} & 1156 & \cdots\cdots(30+a)^2 \\ & -)\ 900 & \cdots\cdots 30^2 \\ \hline 2\cdot30+a=60+4=64 & 256 & \cdots\cdots 2\cdot30a+a^2 \\ a \qquad\qquad\quad = 4 & 256 & \cdots\cdots(2\cdot30+a)a=64\cdot4 \\ \hline & 0 & \end{array}$$

还可以簡写成下面的形式:

$$\begin{array}{r|l} & \quad\ \ 3\ \ \ 4 \\ & \sqrt{11'56} \\ & \quad\ \ 9 \\ \hline 64 & \quad 2\,56 \\ & \quad 2\,56 \\ \hline & \qquad\ \ 0 \end{array}$$

在根号上面对着左边第一段 11 写上算术平方根的最高位上的数 3(实际表示 30)，$3^2=9$(实际表示 900)写在 11 下面，$11-9=2$(实际表示 200)，把第二段 56 移下得 256，在竖綫左边写上 3 的 2 倍 6(实际表示 $2\cdot30$，就是 60；所以在 6 右边要留出一位写个位上的数)，256 除以 60 得試商 4，在根号上面对着第二段 56 写上 4，同时在竖綫左边 6 的右边也写上 4. 因为 $64\cdot4=256$，$256-256=0$，所以 $\sqrt{1156}=34$.

例 1 求 $\sqrt{1444}$.

解

$$\begin{array}{r|l} & \quad\ \ 3\ \ \ 8 \\ & \sqrt{14'44} \\ & \quad\ \ 9 \\ \hline 68 & \quad 5\,44 \\ & \quad 5\,44 \\ \hline & \qquad\ \ 0 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{1444}=38.$

544 除以 60 得試商 9，但是 $69\cdot9$ 的积大于 544，所以改用 8.

例 2　求$\sqrt{841}$.

解

$$\begin{array}{rr}
 & 2\quad 9 \\
 & \sqrt{8'41} \\
 & 4 \\
\cline{2-2}
49 & \multicolumn{1}{|r}{4\ 41} \\
 & \multicolumn{1}{|r}{4\ 41} \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{841}=29.$

441 除以 40 得試商 11，但是試商只能是一位数，所以改用 9.

练　习

求下列各数的算术平方根：4096，784.

四位以上的整数开平方，也可以用上面的方法进行計算.

例 3　求$\sqrt{54756}$.

解

$$\begin{array}{rr}
 & 2\quad 3\quad 4 \\
 & \sqrt{5'47'56} \\
 & 4 \\
\cline{2-2}
43 & \multicolumn{1}{|l}{1\ 47} \\
 & \multicolumn{1}{|l}{1\ 29} \\
\cline{1-2}
464 & \multicolumn{1}{|r}{18\ 56} \\
 & \multicolumn{1}{|r}{18\ 56} \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{54756}=234.$

在得到 $147-129=18$ 以后，再把 56 移下得 1856. 再画竖綫并且在它左边写上 23 的 2 倍 46（实际表示 460，所以仍留出一位写个位上的数），1856 除以 460 得

試商 4，然后继續进行.

例 4　求$\sqrt{33721249}$.

解

```
            5  8  0  7
        √ 33'72'12'49
          25
   108 │ 8 72
       │ 8 64
    11607 │ 8 12 49
          │ 8 12 49
                    0
```

$\therefore\quad \sqrt{33721249}=5807.$

在 812 除以 1160 时，因为 812 小于 1160，所以只能得到試商 0. 再移下 49 得 81249，除以 11600 求試商.

从上面的例子，可以得出整数开平方的法则如下：

> **1. 把要开平方的整数从右向左每两位用撇号分开.**
>
> **2. 从左边第一段求得算术平方根的最高位上的数.**
>
> **3. 从第一段减去这最高位上的数的平方，在差的右边添写第二段，作为第一个余数.**
>
> **4. 把最高位上的数乘以 20 去除第一个余数，所得的商的整数部分作为試商（如果这个整数部分大于或者等于 10，就用 9 作試商）.**
>
> **5. 把最高位上的数的 20 倍加上試商的和乘以**

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

这个試商，如果所得的积大于余数时，把試商减 1 再試，直到积小于或者等于余数为止，这个試商就是算术平方根的第二位上的数.

6. 用同样的方法，继續求算术平方根的其他各位上的数.

例 5 某种一定厚度的鋼板，每平方厘米重 1.25 克. 現在有正方形的这种鋼板一块，重 81.92 公斤，求它每边的长.

解 設鋼板每边的长是 x 厘米. 那么它的面积是 x^2 平方厘米. 根据題意，得

$$1.25x^2=81920.$$

把 x^2 当作未知数，解这个方程，得

$$x^2=65536.$$

$$\therefore \quad x=\pm 256.$$

$x=-256$ 不合題意.

答：鋼板每边的长是 256 厘米，就是 2.56 米.

練 习

求下列各数的算术平方根:

45369; 34596; 758641; 202500.

10.4 小数开平方 小数开平方的方法和整数开平方的方法一样，所不同的是分段的时候，小数部分要从小数点起向左向右每隔两位用撇号分开. 这是因为

$$0.1^2=0.01, \qquad 0.9^2=0.81,$$
$$0.01^2=0.0001, \qquad 0.09^2=0.0081,$$
$$0.001^2=0.000001, \qquad 0.009^2=0.000081,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

所以被开方数有两位小数，它的算术平方根有一位小数；被开方数有四位小数，它的算术平方根有两位小数；被开方数有六位小数，它的算术平方根有三位小数，……。

例 1 求：(1) $\sqrt{0.3249}$；(2) $\sqrt{316.4841}$；(3) $\sqrt{0.000729}$.

解 (1)

$$\begin{array}{r|l}
 & \ \ 0.\ \ 5\ \ \ 7 \\
 & \sqrt{0.32'49} \\
 & \ \ \ 25 \\
\hline
107 & \ \ \ 7\ 49 \\
 & \ \ \ 7\ 49 \\
\hline
 & \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}$$

$\therefore \quad \sqrt{0.3249}=0.57.$

(2)

$$\begin{array}{r|l}
 & \ 1\ \ \ 7.\ \ 7\ \ \ 9 \\
 & \sqrt{3'16.48'41} \\
 & \ 1 \\
\hline
27 & 2\ 16 \\
 & 1\ 89 \\
\hline
347 & 27\ 48 \\
 & 24\ 29 \\
\hline
3549 & 3\ 19\ 41 \\
 & 3\ 19\ 41 \\
\hline
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}$$

$\therefore \quad \sqrt{316.4841}=17.79.$

(3)

$$\begin{array}{r|l}
 & \ \ 0.\ \ 0\ \ \ 2\ \ \ 7 \\
 & \sqrt{0.00'07'29} \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ 4 \\
\hline
47 & 3\ 29 \\
 & 3\ 29 \\
\hline
 & \ \ \ \ \ 0
\end{array}$$

$\therefore \quad \sqrt{0.000729}=0.027.$

例 2 做一个长方体的木箱，它的底是正方形，高是

1.5 米，体积是 2.16 立方米．这个木箱的底每边长多少？

解 設木箱的底每边长 x 米，那么它的体积是 $1.5x^2$ 立方米，根据题意，得

$$1.5x^2=2.16.$$

把 x^2 当作未知数，解这个方程，得

$$x^2=1.44.$$

$$\therefore \quad x=\pm 1.2.$$

$x=-1.2$ 不合题意．

答：木箱的底每边长 1.2 米．

练 习

1．小数开平方的方法和整数开平方的方法有什么不同？

2．計算：

$\sqrt{0.2116}$，$\sqrt{713.4241}$，$\sqrt{0.00005329}$.

习题四十三

1．(1) 塡表：

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n^2											

(2) 根据上表写出下列各数的平方根：

225，625，441，361，484，324，289，529，576，256.

2．利用平方的运算求下列各数的平方根：

900，3600，0.64，$\frac{256}{361}$.

3. 求下列各数的算术平方根:

1600, 10000, 441, $\frac{169}{625}$.

4. 求下列各式的值:

$\sqrt{6400}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{0.0009}$, $\sqrt{\frac{1}{196}}$.

5. 下列各数的算术平方根各有几位整数? 它的最高位上的数是几?

1172889, 46090521, 87025, 870489.

6. 求下列各数的算术平方根:

961, 1849, 6724, 9409.

7. 計算:

$\sqrt{1521}$, $\sqrt{676}$, $\sqrt{4489}$, $\sqrt{9025}$.

8. (1) 一个数的平方等于 5776, 求这个数.

(2) 一个正数的平方等于 8464, 求这个数.

(3) 一个負数的平方等于 3969, 求这个数.

9. 求下列各数的算术平方根:

39601, 100489, 259081, 1172889.

10. 求下列各数的平方根:

1296, 7744, 65025, 49126081.

11. 求适合下列各式的 x:

(1) $x^2=18496$; (2) $x^2=84100$.

12. 求下列两数的比例中項:

(1) 32 和 72; (2) 375 和 135.

13. 5 块同样大小的正方形木板, 面积共是 42320 平方厘米, 求每块木板的一边的长.

14. 某地准备新建工厂, 划出长方形的厂址一块, 寛和长的比是 5:8, 面积是 64000 平方米, 求这块厂址的长和寛.

15. 某种一定厚度的玻璃板, 每平方厘米重 1.2 克. 現在有同

样大小的正方形的这种玻璃板 10 块，共重 67.5 公斤．求每块玻璃板一边的长．

16．計算：

$\sqrt{0.3969}$，$\sqrt{552.7201}$，$\sqrt{0.00080089}$，$\sqrt{8114.4064}$．

17．求适合于下列各式的 x：

(1) $4x^2-4.41=0$；　　(2) $125a^2=583.2$；

(3) $2x^2-0.95665=8x^2-1$；　　(4) $\dfrac{0.32}{x}=\dfrac{x}{0.98}$．

18．一个比例的两个外項分别是 0.294 和 0.024，两个內項是相等的正数，这两个內項各是多少？

19．一个正方形水池，容积是 6.05 立方米．池深 0.8 米，求水池每边的长．

20．圆柱形玻璃管內盛有 266.9 克的水銀，水銀柱高 25 厘米，求玻璃管內部的半徑（1 立方厘米水銀重 13.6 克，π 取 3.14）．

10.5 近似平方根　我們来計算 $\sqrt{5}$．因为 $2^2<5<3^2$，所以 $\sqrt{5}$ 不是一个整数，而是比 2 大比 3 小的一个小数．我們可以在 5 的后边添上小数点和零（添零后要使小数点后面的数能划成两位一段），按照小数开平方的方法来計算：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2.\ 2\ \ 3\ \ 6 \\
 & \sqrt{5.00'00'00} \\
 & \quad 4 \\ \hline
42 & \quad 1\ 00 \\
 & \quad\ \ 84 \\ \hline
443 & \quad\ \ 16\ 00 \\
 & \quad\ \ 13\ 29 \\ \hline
4466 & \quad\ \ \ 2\ 71\ 00 \\
 & \quad\ \ \ 2\ 67\ 96 \\ \hline
 & \quad\ \ \ \ \ \ \ 3\ 04
\end{array}
$$

$\therefore \quad \sqrt{5}=2.236\cdots\cdots.$

以后我們会知道，5的算术平方根无論計算到哪一位小数，总不能使余数得零．也就是説，我們只能用小数表示$\sqrt{5}$的近似值．

从上面的計算可以知道：2、2.2、2.23、2.236、……都小于$\sqrt{5}$，但是在末一位数上加1，得3、2.3、2.24、2.237、……，它們都大于$\sqrt{5}$．我們説，2、2.2、2.23、2.236、……是$\sqrt{5}$的不足近似值，3、2.3、2.24、2.237、……是$\sqrt{5}$的过剩近似值．

因为$2<\sqrt{5}<3$，所以$\sqrt{5}$与2或3的差的絕对值都不超过1，我們説2和3分別是$\sqrt{5}$精确到1的不足和过剩近似值．同样，我們説2.2和2.3分別是$\sqrt{5}$的精确到0.1的不足和过剩近似值；2.23和2.24分別是$\sqrt{5}$的精确到0.01的不足和过剩近似值．

在两个精确度相同的不足和过剩近似值里，通常按照四舍五入的法則取其中的一个．例如，我們取2.2作为$\sqrt{5}$精确到0.1的近似值，取2.24作为$\sqrt{5}$精确到0.01的近似值．

练　习

1. 已知$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$，說出$\sqrt{2}$精确到1、0.1、0.01、0.001、0.0001的不足近似值和过剩近似值．

2. 已知$\sqrt{271}=16.46\cdots\cdots$，說出$\sqrt{271}$精确到1和精确到0.1的近似值．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com