微积分程序教学讲义

中　册

（微　分　学）

上 海 师 范 学 院 数 学 系
上海徐汇区教师进修学院

一九八〇年十月

目　　录

第六章　导数与微分

第七章 微分学基本定理

第八章　导数的应用

第六章　导数与微分

§1　导 数 概 念

一　实例——导数概念的引出

瞬时速度

1〔引〕对于匀速的直线运动，可以用一个叫做“速度”的数值来衡量整个运动的快慢。为了求出速度这个数值，只须用除法就可以了。

例如，一个作匀速直线运动的物体，在Δt的时间里，经过路程为Δs，那末速度$v=$____。

【答案　$\Delta s/\Delta t$。】

2〔引〕对于变速的直线运动，就不能用一个数值来刻划整个运动的状态。

例如，从塔顶自由落下一只小球，从塔顶到地面，化时$\Delta t=5$秒，经过路程$\Delta s=125$米。如果仿照匀速直线运动求速度那样，做一个除法：$\Delta s/\Delta t=125/5=25$(米/秒)，由这个数值，能不能说小球每一秒钟都移动了25米呢？根据自由落体运动的规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$，我们来计算：

①运动开始到第一秒末，物体经过的路程为

$$s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot 1^2\doteq 5\text{米}(\text{为方便计，取}g\doteq 10\text{米/秒}^2)；$$

②第二秒末到第三秒末物体经过的路程为

$$s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot g\cdot 2^2 \doteq 25\text{米};$$

③第四秒末到第五秒末物体经过的路程为

$$s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot 5^2-\frac{1}{2}\cdot g\cdot 4^2 \doteq 45\text{米}.$$

可见，1秒钟内所走过的路程(都是　并不都是)25米。

25米/秒这个数值并不表示物体在整个运动过程中每一秒里运动的状态，而只是快慢的平均值，我们把它叫做**平均速度**，记作$\overline{v}$(读作：v 划)。

【答案　并不都是。】

3〔正〕对于变速直线运动，$\overline{v}$这个数值只能笼统地反映运动的快慢。要更精确地描述运动的快慢，还得想办法说清楚变速直线运动每一个时刻的快慢。

怎样来衡量变速直线运动某一时刻的快慢呢？譬如说，从塔顶自由落下一个小球，怎样衡量在 $t=1$ 这一时刻的快慢呢？

研究某时刻的快慢，我们毫无经验，但我们有研究一小段时间内平均速度的经验，为此，我们先考察这时刻邻近的一小段时间的运动状况：

①先研究 $t=1$ 秒到 $t=2$ 秒。

$\Delta t=2-1=1$秒，$\Delta s=\frac{1}{2}g\cdot 2^2-\frac{1}{2}g\cdot 1^2=15$米，

$\overline{v}=\Delta s/\Delta t=15$米/秒。

②再研究 $t=1$ 秒到 $t=1.1$ 秒。

$\Delta t=1.1-1=0.1$秒，　$\Delta s=\frac{1}{2}g\cdot 1.1^2-\frac{1}{2}g\cdot 1^2$

$=1.05$米，　$\overline{v}=\Delta s/\Delta t=10.5$米/秒。

③再研究 $t=1$ 秒到 $t=1.01$ 秒。

$\Delta t=0.01$秒，$\Delta s=0.1005$米，

$\overline{v}=\Delta s/\Delta t=10.05$米/秒。

这些平均速度15，10.5，10.05，……虽然不能用来精确地衡量 $t=1$ 秒这一时刻的快慢，但是可以近似地描写它。而且当 Δt 变得越小，所算得的 $\overline{v}$ 越有资格用来近似地描写 $t=1$ 秒这一时刻的快慢。有理由认为：当 $\Delta t\to 0$ 时，如果 $\overline{v}$ 的极限存在，这一极限 $\lim\limits_{t\to 0}\overline{v}$ 是衡量 $t=1$ 秒这一时刻的快慢的最恰当的数值，这个数值叫做 $t=1$ 秒时的**瞬时速度**。

4〔正〕现在来求自由落体运动 $t=1$ 秒时的瞬时速度，就是求 $\Delta t\to 0$ 时，$\overline{v}$ 的____。

第一步　当时间在 $t=1$ 时有增量 Δt，求路程的增量。

时间：从 $t=1$ 变到 $t=1+\Delta t$，共化了 Δt 秒，

路程：$\Delta s=\frac{1}{2}g\cdot(1+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g\cdot 1^2$

$=\frac{1}{2}g\cdot[(\Delta t)^2+2\cdot\Delta t]=\frac{1}{2}g\cdot\Delta t\cdot(\Delta t+2)$；

第二步　求平均速度

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g\cdot\Delta t\cdot(\Delta t+2)}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(\Delta t+2);$$

第三步　求当 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(\Delta t+2)=\_\_\_\_.$$

∴　$t=1$ 秒时的瞬时速度是____米/秒。

【答案　极限；g；g。】

5〔结〕对于匀速直线运动来说，用一个数值（速度）就可以把握整个运动的快慢；要想求出这个数值，只需用算术

中的一个___法运算，而对于变速直线运动来说，却不能只用一个数值来精密地描述整个运动的快慢。每一个时刻，一般就要用一个数值（瞬时速度）来刻划这一时刻的快慢。并且要想求出这个数值（瞬时速度），光用除法就不够了，还必须用到____这个工具。

【答案　除；极限。】

曲线的切线斜率

6〔引〕我们知道直线有一个特征：如果一动点 A 在直线 l 上运动（见图6—1—1），不管起点在哪里，只要水平方向前进了相同的距离 Δx，那么升高或降下的高度 Δy 也是相同的。所以，对一条直线来说，通常可以用斜率这一个数值来衡量它的陡坦，为了求出这一数值（斜率），只须用算术中的一个__法运算就够了，斜率 $k =$ ____。

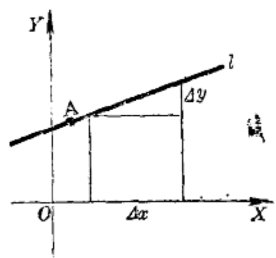


图 6—1—1

【答案　除；$\Delta y/\Delta x$.】

7〔引〕对于曲线，我们不能只用一个数值来衡量整个曲线的陡坦。

例如，设想一动点在如图 6—1—2 中的曲线 PP' 上运动，当它从 P 点到 P' 点水平前进 $\Delta x = 20$，上升了 $\Delta y = 10$。我们用除法可以算出：$\Delta y/\Delta x =$ __。

但它仅是这段曲线的“平均斜率”，实际上就是割线

PP'的斜率，它只能笼统地反映曲线的陡坦.

【答案 $\frac{1}{2}$.】

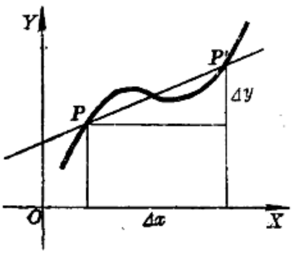


图 6—1—2

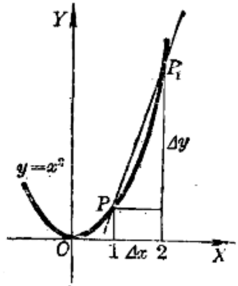


图 6—1—3

8〔正〕那么，怎样衡量曲线上某一点，譬如，曲线 $y=x^2$ 上的点 $P(1, 1)$ 的陡坦呢？我们毫无经验，但我们有研究一小段曲线的"平均斜率"的经验。我们来研究与 P 邻近的曲线段.

①先研究 $P(1, 1)$ 与 $P_1(2, 4)$ 间的曲线段的陡坦

(图6—1—3) $\Delta x=2-1=1$, $\Delta y=2^2-1^2=3$.

割线 PP_1 斜率 $\overline{k}=\Delta y/\Delta x=3$.

就是"平均斜率"等于3.

②再研究 $P(1, 1)$ 与 $P_2(1.1, 1.1^2)$ 间的曲线段

$\Delta x=1.1-1=0.1$, $\Delta y=1.1^2-1^2=0.21$.

"平均斜率" $\overline{k}=\Delta y/\Delta x=2.1$.

③再研究 $P(1, 1)$ 与 $P_3(1.01, 1.01^2)$ 间的曲线段

$\Delta x=1.01-1=0.01$, $\Delta y=1.01^2-1^2=0.0201$.

"平均斜率" $\overline{k}=\Delta y/\Delta x=2.01$.

上面求得的平均斜率$\overline{k}$，虽不能精确地反映点P处的陡坦，但是我们认为可以近似地描写它，而且当动点P'沿曲线趋于P点时，$\overline{k}$的极限是反映P点陡坦的最恰当的数值，我们称之为曲线在P点的**陡坦度**。

我们把**过P点、且以曲线在该点的陡坦度为斜率的直线叫做曲线$y=x^2$在点P的切线。**

因此，曲线在P点的陡坦度就是曲线在P点的切线的斜率。

9〔正〕现在我们来求曲线$y=x^2$上点$P(1,1)$的切线的斜率。就是求动点沿曲线趋于P点时$\overline{k}$的极限。

第一步　当自变量$x=1$处有增量Δx时，求Δy。

设P_1为曲线上的任一异于P的点，它的横坐标为$1+\Delta x$　$(\Delta x \neq 0)$，相应的

$$\Delta y=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2;$$

第二步　求割线PP_1的斜率，即曲线段PP_1的平均斜率　$\overline{k}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x;$

第三步　当P_1沿曲线趋于P　(即$\Delta x\to 0$)时，$\overline{k}$的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=\_\_\_\_.$$

所以，过$P(1,1)$的曲线的切线斜率为____。

【答案　2；2。】

10〔结〕对于直线来说，用一个数值(斜率)就可以把握整个直线的倾斜情况，想求出这个数值，只须用一个算术运算：___法。

对曲线来说，不能只用一个数值来衡量整个曲线的陡坦，每一个点，一般就要用一个数值(过这点的切线的斜率)来衡量这一点的陡坦。而想求出这一个个数值(切线斜率)光用除法就不够了，还必须用到____这个工具。

【答案　除；极限。】

11〔注〕应该指出，在平面几何中，把“与圆有且只有一个公共点的直线叫做圆的切线”作为切线定义。对于一般曲线能不能这样说？看下例：

① $y=x^2$ 与直线 $x=0$，有且只有 1 个公共点，直线 $x=0$ 可以算曲线 $y=x^2$ 的切线吗？

② $y=1$ 与 $y=\sin x$ 有无数个公共点，直线 $y=1$ 是曲线 $y=\sin x$ 的切线吗？

重复一下，切线一般定义是：**当动点 P_1 沿着曲线趋于 P 时，如果割线 PP_1 的斜率的极限存在并等于 k，那末过 P 点、且以 k 为斜率的直线叫做曲线在 P 点的切线。**

【答案　不能。① 不可；② 是。】

12〔结〕上面两个实例研究的问题虽然不同，一个是物理学中的瞬时速度问题，一个是几何中曲线的切线斜率问题，但它们的处理方法和步骤都一样，而且本质上都归结为研究极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ 的存在问题。在其它学科类似的问题还很多，抽去它们的具体意义，保留它们的数学特征，就得到了一个新的数学概念——导数。

填充下表：

	①自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$在$t=1$秒的瞬时速度	②曲线$y=x^2$在点$P(1,1)$的切线斜率
第一步 求增量	$\Delta s=$____$-$____ $=$______	$\Delta y=$____$-$____ $=$______
第二步 算差商	$\frac{\Delta s}{\Delta t}=$______	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$______
第三步 取极限	$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$______	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$______
结　论	在$t=1$时的瞬时速度 $v=$______	过$P(1,1)$点的切线斜率　$k=$____

【答案　①$\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2$，$\frac{1}{2}g\cdot 1^2$，$\frac{1}{2}g[2\Delta t+(\Delta t)^2]$；$\frac{1}{2}g(2+\Delta t)$；$g$；$g$米/秒；　　② $(1+\Delta x)^2$，x^2，$2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$；$2+\Delta x$；2；2。】

二　导数定义

$f(x)$在$x=x_0$时的导数

13〔正〕定义　**设函数**$y=f(x)$，**自变量**x_0**的任一增量**Δx，**函数对应的增量为**$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，**此时，如**

果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则此极限值就称作函数$f(x)$在$x=x_0$时的导数，并说$f(x)$在$x=x_0$可导。

14〔例〕有了导数概念，**瞬时速度**和**切线斜率**就可以用导数来叙述：

①自由落体运动 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 在 $t=1$ 时的瞬时速度，就是函数$f(t)$在$t=1$时的导数。

②曲线 $y=\phi(x)=x^2$ 在点$P(1,\ 1)$处的切线斜率，就是函数 $\phi(x)$在 $x=1$ 时的____。

【答案　导数。】

15〔正〕函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的导数通常用符号$f'(x_0)$或$y'|_{x=x_0}$表示。

16〔练〕将**14**题的结果用两种记号表出。

【答案　① $s'|_{t=1}=g$； $f'(1)=g$； ② $y'|_{x=1}=2$； $\phi'(1)=2$。】

17〔例〕$y=f(x)=x^2$，求$f'(2)$。

解　①求增量　设自变量x从2变化到$2+\Delta x$，则函数增量为

$$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2$$
$$=4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2;$$

②算差商　$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$$=4+\Delta x;$$

③取极限　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=$____。

∴　$f'(2)=$____。

【答案　4；4。】

18〔例〕$s=\frac{1}{2}gt^2$，求$s'|_{t=2}$。

解　①求增量　设自变量在 $t=2$ 处有一增量Δt，则函数增量　$\Delta s=$____；

②算差商　$\frac{\Delta s}{\Delta t}=$____；

③取极限　$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$____。

∴　$s'|_{t=2}=$____。

【答案　①$\frac{1}{2}g\cdot[4\Delta t+(\Delta t)^2]$；②$\frac{1}{2}g\cdot(4+\Delta t)$；③$2g$；$2g$。】

19〔引〕设 $x=x_0+\Delta x$，则在 x_0，Δx，x 三者中知道两个就可求第三个．下列各式试用 x_0，x 表达之：

①Δx；　　②Δy；　　③$\Delta y/\Delta x$；

④$\Delta x\to 0$；　　⑤$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。

【答案　①$x-x_0$。②$f(x)-f(x_0)$。③$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。④$x\to x_0$；⑤$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。】

20〔正〕函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的导数又可以写成下面的第二种形式：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

21〔例〕$y=f(x)=\frac{1}{x}$，求$f'(x_0)$　　$(x_0\neq 0)$

解　①求增量　设自变量从x_0变化到x　$(x\neq 0)$，则函数增量　$\Delta y=f(x)-f(x_0)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-x}{x_0x}$，

②算差商　$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0-x}{x_0x}\Big/(x-x_0)=-\frac{1}{x_0x}$.

③取极限　$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{-1}{x_0x}=$____.

∴　$f'(x_0)=$____.

这里本题用导数的第二种形式解出，读者可将本题用第一种形式解出，也可将**17**、**18**两题用第二种形式解出。

【答案　$-\frac{1}{x_0{}^2}$，$-\frac{1}{x_0{}^2}$。】

22〔练〕用定义求下列函数在指定点的导数

① $y=x^2$；$x=3$。　② $y=-3x^2+1$；$x=1$。

【答案　①6；②-6。】

23〔练〕① $s=\frac{1}{2}gt^2$，求$s'|_{t=3}$。

② $s=\phi(t)=-\frac{1}{2}t$，求$\phi'(0)$。

【答案　① $3g$；② $-\frac{1}{2}$。】

导数的几何意义

24〔正〕很明显，函数$y=f(x)$在$x=x_0$时的导数$f'(x_0)$的几何意义就是：曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,y_0)$的切线的____。

由**17**题，因为$f'(2)=4$，所以曲线在点$P(2,4)$的切线斜率为__。

【答案　斜率；4。】

25〔例〕求过曲线$y=x^2$上点$P(3,9)$的切线方程

解　由**22**题，因$f'(3)=6$，即过点P的切线斜率$k=6$。由点斜式，切线方程为　$y-9=6(x-3)$。

26〔练〕求曲线 $y=x^2$ 在点 $P(2,4)$ 处的切线方程

【答案 $4x-y-4=0$。】

27〔练〕求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $P(1,1)$ 处的切线方程和法线方程（注：过曲线上一点 P、且与曲线在该点的切线垂直的直线，叫曲线在 P 点的**法线**）。

【答案 $x+y-2=0$；$y=x$。】

28〔练〕试求过点 $(3,8)$ 且与曲线 $y=x^2$ 相切的直线方程。

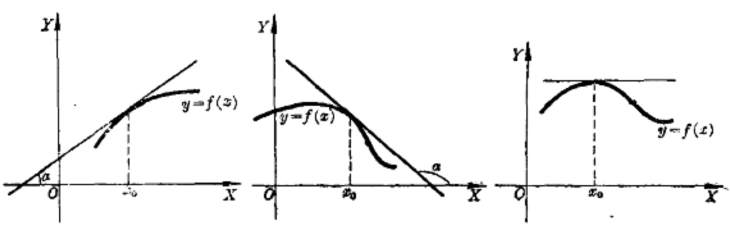
【答案 $4x-y-4=0$，$8x-y-16=0$。】

29〔练〕函数 $y=f(x)$，若

① $f'(x_0)>0$； ② $f'(x_0)<0$； ③ $f'(x_0)=0$。

那末曲线在点 (x_0, y_0) 的切线是怎样倾斜的？

【答案 见图6—1—4，①倾角α满足 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$。②倾角α满足 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$。③水平。】



①$f'(x_0)>0$ ②$f'(x_0)<0$ ③$f'(x_0)=0$

图 6—1—4