彈塑力学及断裂力学

机械系金相热处理专业教材

一九八〇年十一月

第一章 弹性力学的基本概念

第二章 弹性力学的数学分析

第三章 弹塑性变形理论（全量理论）

第四章　线弹性断裂力学

第五章　弹塑性断裂力学基础

第六章　断裂力学的应用

第七章 提高断裂韧性的途径

A

第一章　弹性力学的基本概念

含裂纹构件的低应力脆断往往是快速脆性断裂，构件破坏之前宏观裂纹没有明显的扩展且裂纹前缘的塑性变形相对于构件的尺寸来说也是比较小的。因此裂纹周围的材料仍可看成是均匀，连续的弹性介质。这就表明：可以用弹性力学的方法定量地研究裂纹前缘的应力，应变场，及与裂纹扩展有关的能量关系。这就是线弹性断裂力学研究的主要内容，也是比较成熟的部分。为此我们首先要熟悉弹性力学的基本知识。本章主要介绍弹性力学的基本概念。

§ 1、概述

一、弹性力学研究的任务

弹性力学研究的是理想弹性体在力和温度下作用的应力和变形。它所研究的变形固体，从几何形状上来说，比较广泛并不局限于杆件，如滚动轴承中的滚珠或滚柱，又如平板和壳体，这些外杆件均是材料力学方法所研究不了的。又如机器中有很多零件其截面尺寸经常有突然变化如轴肩、切槽、油孔等，而按材料力学公式计算出来的结果与实际应力有很大差异，如在均匀拉伸下的有孔平板（如图 1—1）其孔边的应力就远远大于按材料力学公式计算出来的平均值。这些都说明弹性力学可以研究材料无法求解的问题，而且对

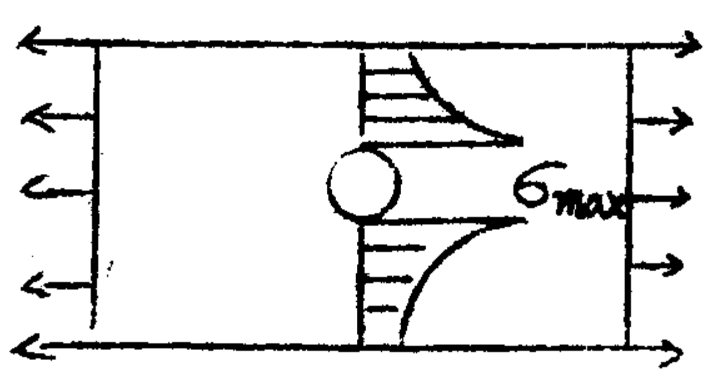

图 1—1

于已由材料力学求得的近似解的问题还可以进一步求得精确解，也就是说虽然它和材料力学一样同是研究弹性体的应力和变形，但研究的变形固体之几何形状要更广泛、更复杂。同时由于弹性力学能解决比较复杂问题，相对来说也使用了比较多的数学工具以求得比较精确的解。

二、弹性力学研究中的基本假设：

弹性力学对变形固体仍然采用均匀，连续各向同性等基本假设；下面我们就来具体论述它们。

1 ）物体是均匀、连续、各向同性的。

为此物体中的应力，位移，应变，均是连续的，可以用连续的坐标函数表示；且表示物体弹性的常数不随位置的坐标、方向而变化。

2 ）物体是完全弹性的：

为此外载去除后，物体变形完全恢复，且应力和变形之间服从虎克定律。

3 ）物体的变形是很小的

为此在研究物体受力后的平衡状态时可以不考虑尺寸改变，且在研究物体的变形时，可以略去二阶微量，这样得到的微分方程是线性的。

4 ）物体内无初应力。

上述基本假设均与材料力学中所遇到的相合，不同的是材料力学中为了简化计算，针对不同问题还附加了一些有关的变形假设，如“平面假设”等，而限制了求解的精确度及适用范围。

以上述四条基本假设为依据的弹性力学，称为线性弹性力学，它是我们这门课要阐述的基本内容。

三、弹性力学研究的基本方法

我们知道，材料力学解决的是静定问题，因此求解物体应力时常采用截面法，即假设用截面将物体剖开取截面一边的部分物体作为截离体，利用静力平衡条件，以求得截面上的应力再利用几何物理条件以求得变形，如图（1—2）。

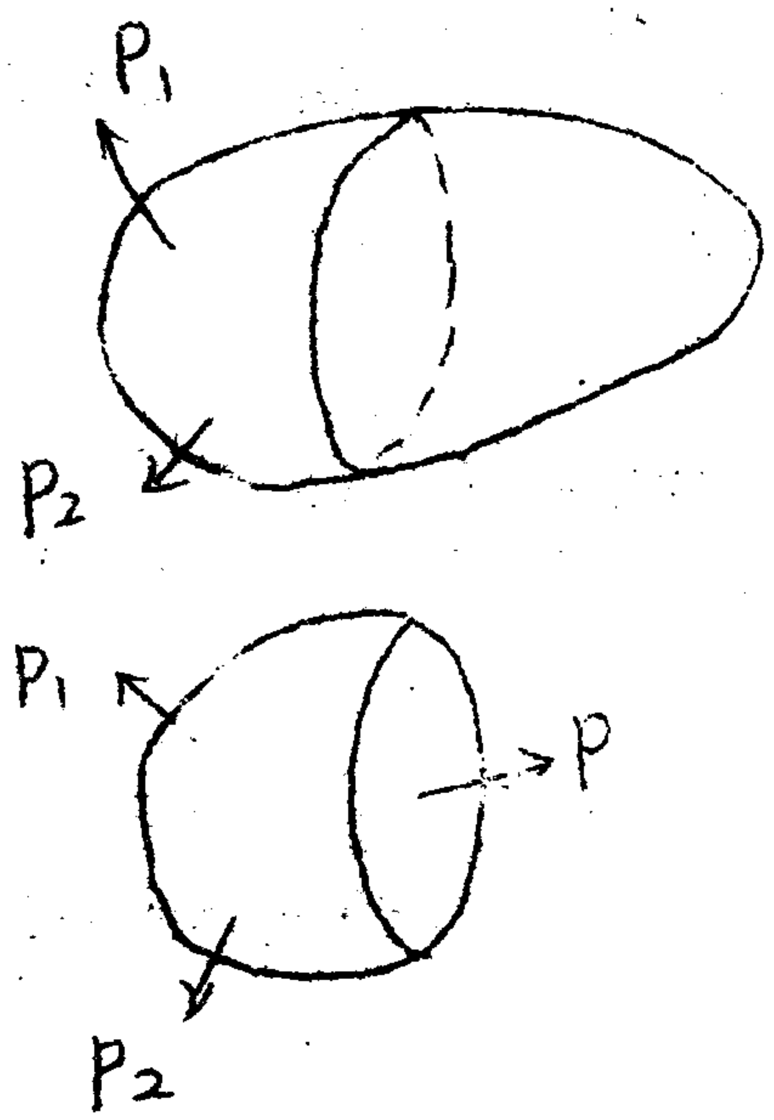

图1—2

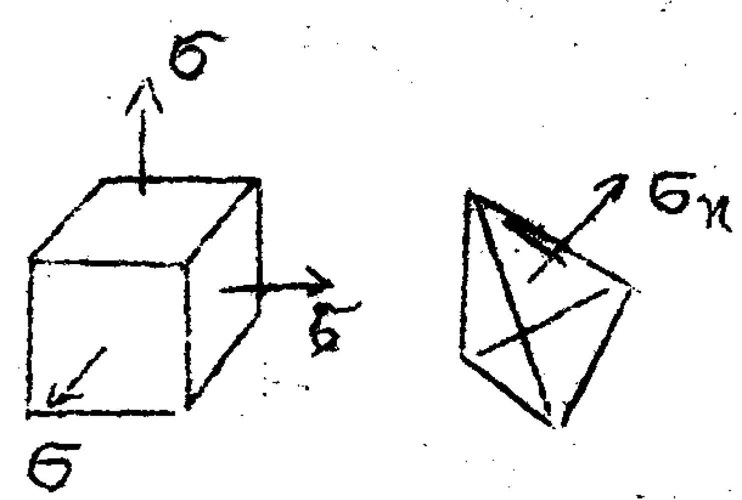

图1—3

弹性力学解决问题的方法不同。它假想物体内部是由无数个单元平行六面体，表面是由无数个单元四面体组成的。考虑这些单元体的静力平衡就可得出一组平衡微分方程。但因未知数总是超过微分方程数，为此得到的是超静定问题，因此除了综合考虑几何变形条件及物理条件外，还需附加边界条件后才能求解问题。（如图1—3）上述这些微分方程还可以综合简化为以应力为基本未知函数的偏微分方程或以位移为未知函数的偏微分方程。若引进应力函数

φ，则问题就变成求解满足边界条件之φ的拉氏方程。常用"逆解法"，或半逆解法求解φ。对于复杂的实际问题还往往采用差分法、变分法、有限单元法来解决。

§2、两个基本概念

介绍主要内容以前，先介绍两个基本概念。

1、通用的记号与正负号

(1)应力分量：

设物体在外力作用下，通过物体中的一点A作垂直于X轴的截面。如这截面不是A点的主平面，则在该截面上应有正应力和剪应力。

$$\sigma_x\ 、\ \tau_{xy}\ 、\ \tau_{xz}$$

其中，正应力σ_x的脚标表示正应力σ_x所作用的平面垂直于x轴，σ_x自然也就沿着x轴。剪应力τ_{xy}的第一个脚标x表示τ_{xy}的作用平面垂直于x轴，而第二个脚标y表示τ_{xy}沿着y轴方向。

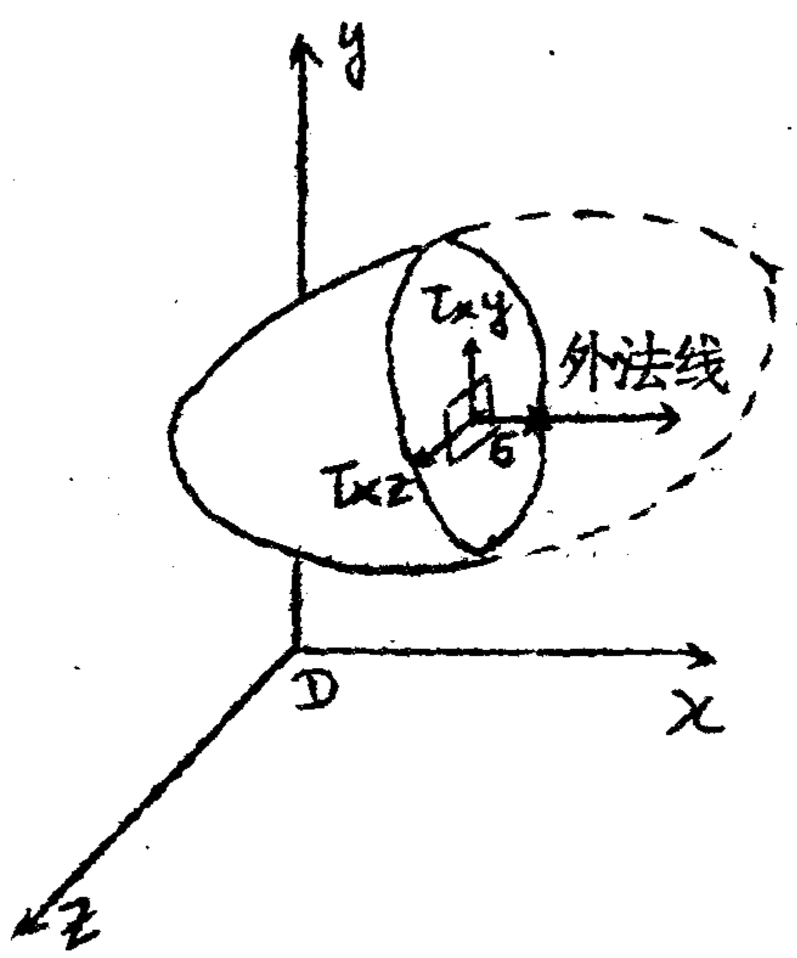

图 1—4

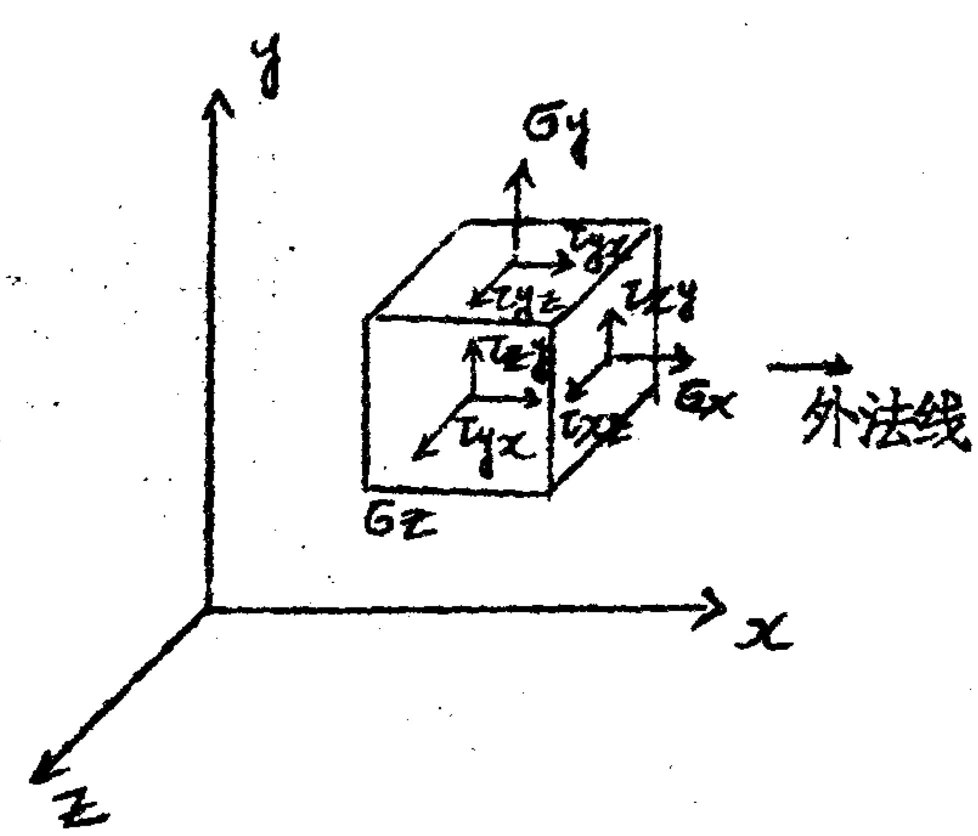

图1—5

A

同样道理，如通过A点作垂直于y轴的截面则在A点这一截面上又有三个应力分量

$$\sigma_y,\ \tau_{yx},\ \tau_{yz}$$

同理，在通过A点并垂直于z轴的截面上还有三个应力分量

$$\sigma_z,\ \tau_{zx},\ \tau_{zy}$$

综合，对于一个平行六面体其各面上作用的应力分量如图（1—5）所示。

关于应力符号的规定为：若平面的外法线方向与x轴的正方向相 ，则该平面上方向与坐标轴正向相同的应力规定为正，方向与坐标轴方向相反的应力则为负，如上图示的应力都是正的，反之则为负。同时倘若平面的外法线方向与坐标轴的正方向相反，则把方向与坐标轴正向相反的应力规定为正，与坐标轴正相相合的应力规定为负如图（1—6）。

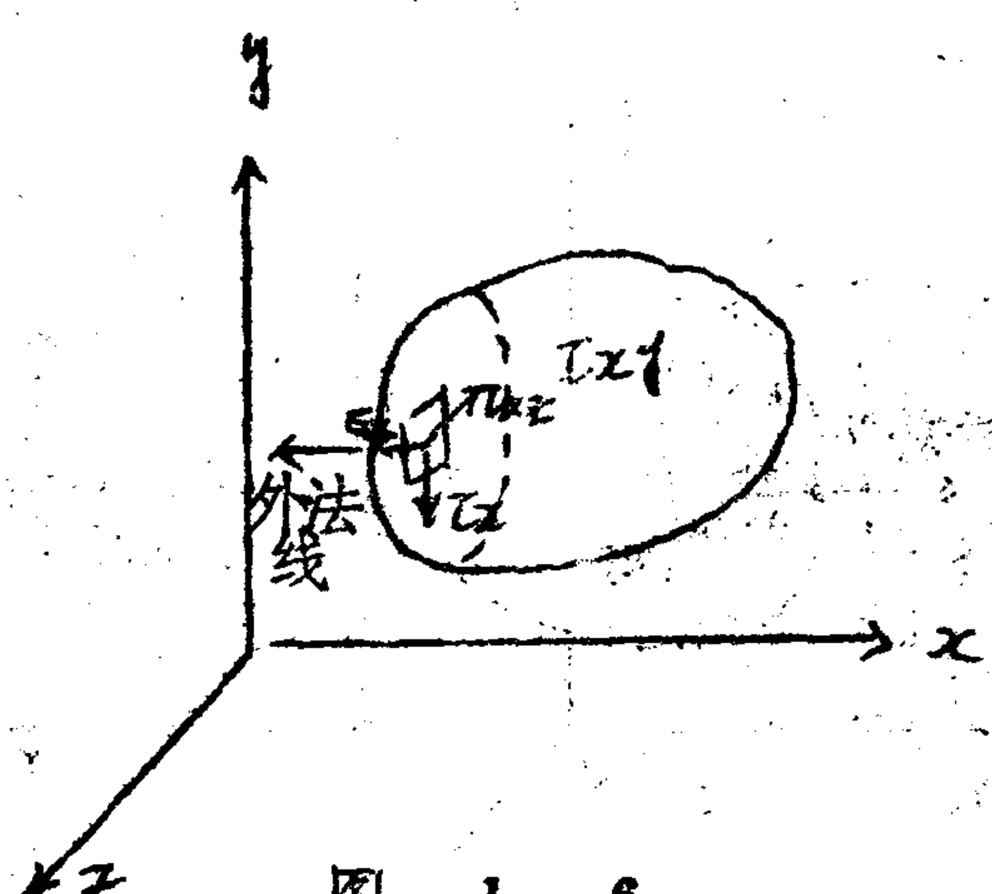

图 1—6

根据剪应力互等定理：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\ \tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{yz}=\tau_{zy}$$

为此任务一点A在x、y、z三个方向上独立的应力分量只有六个：

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}$$

且这六个应力分量完全确定了一点的应力状态，在一个受力作用的物体中，每点的应力与该点的坐标位置有关即：

$$\sigma_x = f_1(x,y,z);\quad \rho_y = f_2(x,y,z);\quad \rho_z = f_3(x,y,z)$$

$$\tau_{xy} = f_4(x,y,z);\quad \tau_{yz} = f_5(x,y,z);\quad \tau_{xz} = f_6(x,y,z)$$

如上节中悬臂梁弯曲得出的应力σ_x、σ_y、τ_{xy}皆为x，y的函数。

(2)位移应变分量

物体变形时，坐标为（x、y、z）的质点A将移动到B点，其坐标为x'，y'，z'。

且
$$\begin{cases} x' = x + u(x,y,z) \\ y' = y + v(x,y,z) \\ z' = z + w(x,y,z) \end{cases}$$

其中u，v，w分别为x，y，z方向的位移。

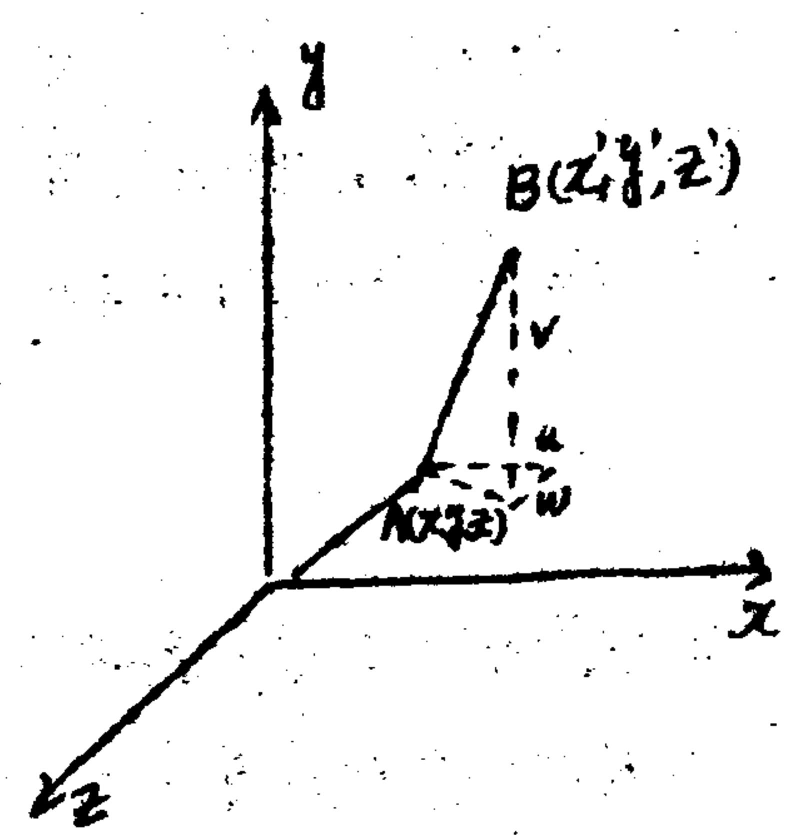

图 1—7

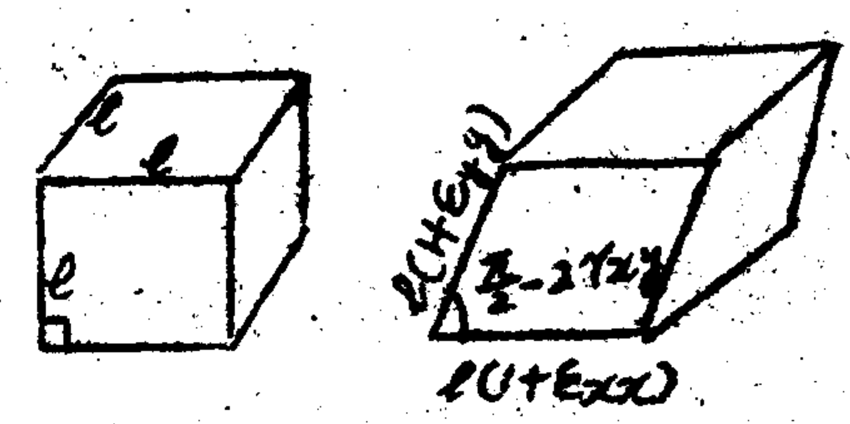

图1—8

这说明，物体内各质点在变形时均要产生位移，而最终结果将使一个各边皆平行于坐标轴，边长为 1 的足够小的立方体（如图 1—8）变形为一个平行六面体。且只要知道三条共总边的新长度和它们之间的角度就能确定平行六面体的形变。若 γ_{ij}（γ_{ij} 表示平行 i 轴的位移在 j 轴方向上的相对变化）表示应变分量，则平行六面体的边长和各边之间的夹角又可表示为：

$$1(1+\gamma_{xx}),\quad 1(1+\gamma_{yy}),\quad 1(1+\gamma_{zz})$$

及：

$$\frac{\pi}{2}-\partial\gamma_{xy},\quad \frac{\pi}{2}-\partial\gamma_{yz},\quad \frac{\pi}{2}-\partial\gamma_{zy}$$

其中：

$$\gamma_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdots$$

γ_{xx}，γ_{yy}，γ_{zz} 又常记为 ε_x，ε_y，ε_y 表示在 x、y、z 方向上的正应变（线应变）。

γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{xz} 分别表示切应变（角应变）。

由上式还可以知道 $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$，$\gamma_{yz}=\gamma_{zy}$，$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}$

因此表示一个平面六面体的形变共有六个应变分量，他们来自三个位移分量。u，v，w 很明显 u，v，w 及 ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz} 均是 x，y，z 的函数。

2、平面应变，平面应力状态

(1)在机器的机体结构中，建筑和桥梁结构中船舶的板架结构中经常遇到某些　厚度的板件，其厚度 t 远小于板的长与宽（图 1—9）即所谓的薄板。且只沿边缘承受着平行薄板平面，并沿着板厚

t 均匀分布的力。

由于前后两表面为自由面，则 $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xj} = 0$，又因为

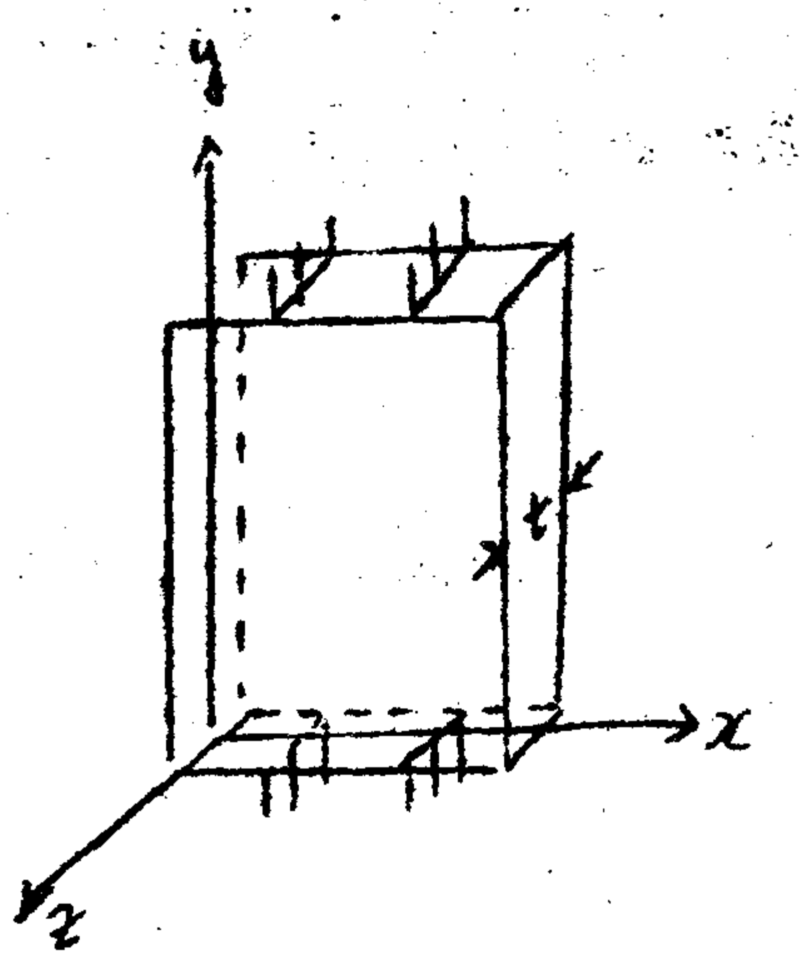

图 1 — 9

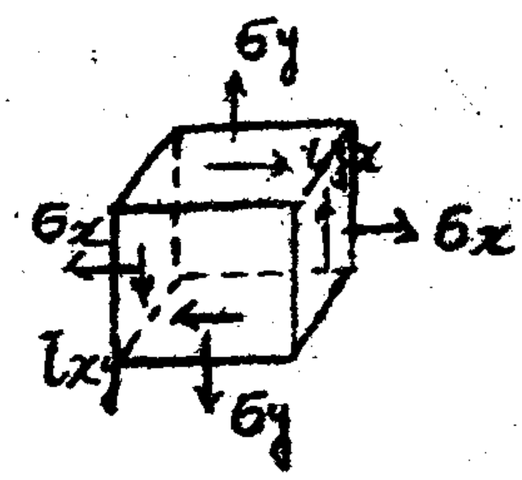

图 1 — 1 0

薄板厚度 t 很小，外力沿厚度 t 方向无变化，故可以认为在薄板内到处都有 $\sigma_z = 0$。因此薄板体内就只存在平行于 xoy 平面三个应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 且沿着板厚均匀分布，和 z 坐标无关，仅是 x、y 的函数，即：

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \sigma_x(x, y) \\
\sigma_y = \sigma_y(x, y) \\
\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)
\end{cases}
$$

可以看到此时薄板前后两自由表面不受任何约束，板内任何点在 z 方向的变形都不受限制故　　$\varepsilon_z \neq 0$

上述情况称之为平面应力状态。

A

2、平面应变状态

对于轴线方向尺寸很大的物体，例如很长的棱柱、高压容器、管道坝身等，作用于这类物体上的力平行于横截面 xoy 且沿轴线 z 无变化。故在距两端较远处应力分量都只与 x，y 有关，与坐标 z 无关。且因应力对任意一个平行于 xoy 横截面都应对称。

故

$$\tau_{zy}=\tau_{xz}=0=\tau_{yz}=\tau_{zx}$$

又因：物体沿 z 轴方向很长，在离两端较远的中间部分受到两侧材料的限制沿 z 轴方向很难发生 w 方向位移，故：

$$\varepsilon_z=0$$

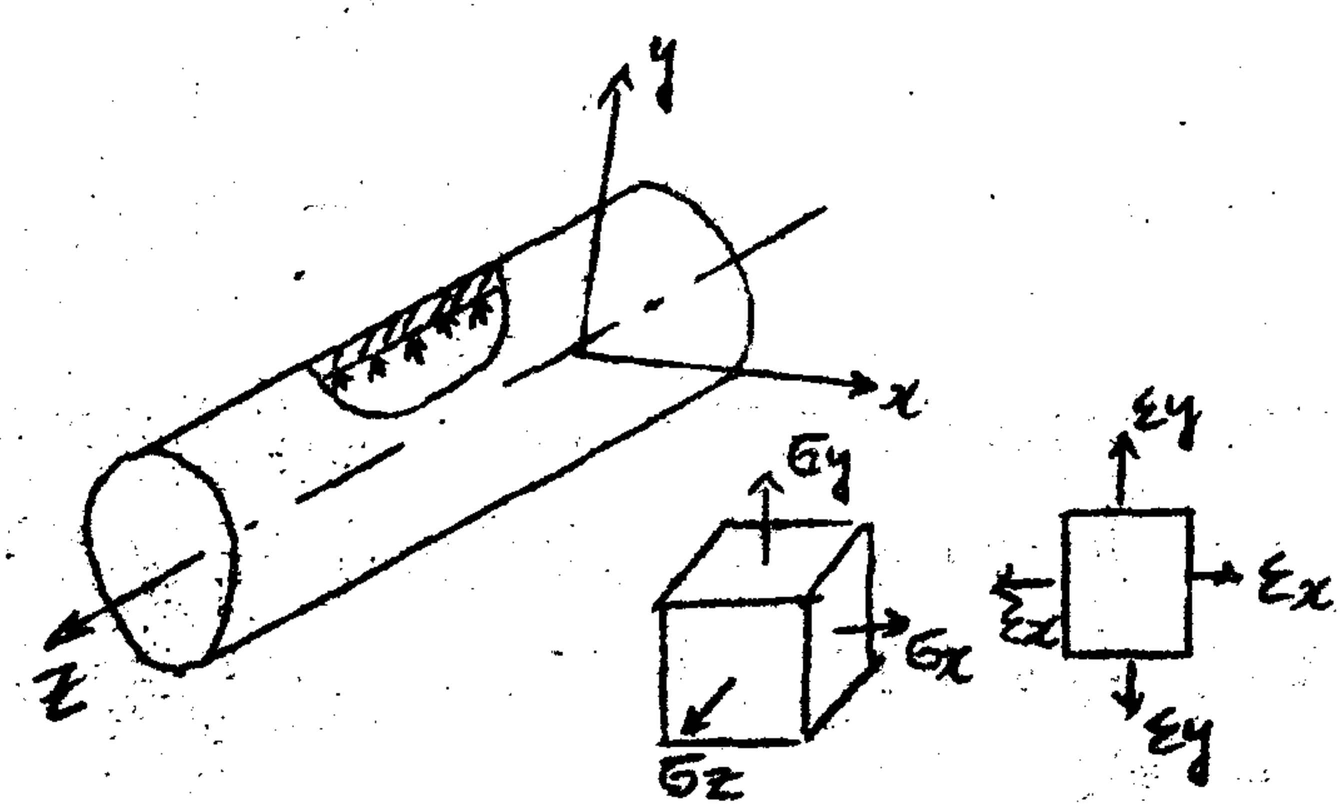

图 1—11

上述情况称为平面应变状况，这就是说体内应变分量只有三个，即：ε_x，ε_y，γ_{xy}，都限于 xoy 平面内（即在 z 坐标无关）。

综上所述，平面应力和平面应变虽然是性质不同的两类问题，但它们具有共同的特点是，应力分量和应变分量都只是 x、y 的函数，与坐标 z 无关，统称为平面问题。

§3、几个平面问题中简单例子

下面我们仅介绍弹性力学中的平面问题。所谓逆解法就是根据问题的具体情况或经过简单计算，假定应力函数，然后再校核这些应力函数是否满足平衡方程及边界条件，如果满足即为问题的解，否则必须重新假定，直到满足各条件为止。

在许多问题下，采用半逆解法比较方便，根据物体的外形和荷载情况给定不同解析形式的应力函数。例如对于简单周界（如矩形），且边界条件可用代数整函数表示的，其应力函数可取多项式；若对于周界载荷分布是不连续的，不能表示成代数整函数，但可展开为三角级数的其应力函数可取三角级数形式。在有些情况若采用极坐标形式或复杂的函数形式求解问题也显得很方便。然后根据φ函数应该满足连续性条件和边界条件确定φ中的常数。

下面就试用上述方法来考虑几个最简单的平面问题

1、φ应力函数为二次函数的情况

设 $\varphi(x、y)=\dfrac{a}{2}x^2$ 　　其中a为待定常数

因为，拉氏方程中每一项均是四价偏导数故φ无论a取什么常数均能满足条件，且有

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=a \quad \tau_{xy}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0$$

很明显，上式表示的应力函数其应力状态对应着如图1—12a）表示的板条拉伸情况（若a为负值即为压缩）还可以看到应力函数φ由于它满足拉氏方程，又符合图1—12a所示的边界条件，

A

因而满足了弹性力学的所有要求，是问题的精确解。

还可以看到，当板条的上下两端作用集中力P，且$P=Fa=F\cdot\sigma_y$时（其中F为板条面积）。严格地说此时的边界条件并不满足所要求的条件，但根据圣文南原理，在杆件两端局部范围内用静力相等的力系取代后只影响端部附近区域的应力分布。于是上面表示的φ应力函数同样可以作为图b）所示之问题的解。

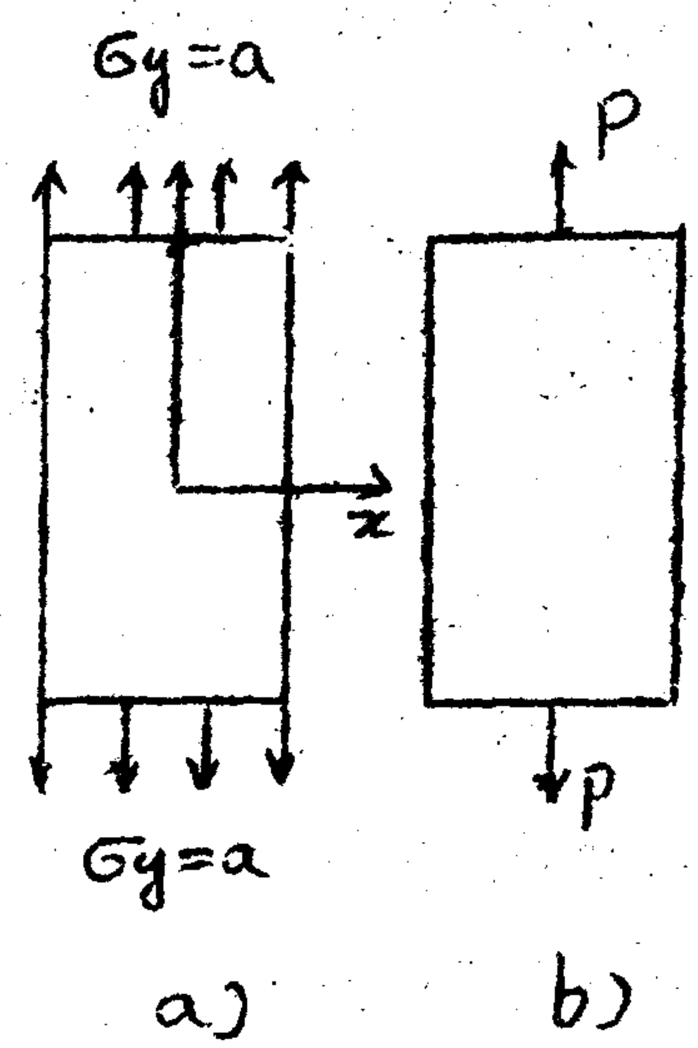

图1—12

2、取φ为y的三次函数即$\varphi=\frac{c}{b}y^3$

可以看到无论系数c取何值，函数φ皆能满足拉氏方程，其相应的应力是

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=cy,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \tau_{xy}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0$$

按照上式，其应该满足的边界条件是：在矩形板条左右两端作用着按线性分布的正应力而没有剪应力，在上下两边无应力。（如图示）它显然是纯弯曲情况，所以三次函数的应力函数φ对应着两端纯弯曲的条件其中的c可由边界条件确定。

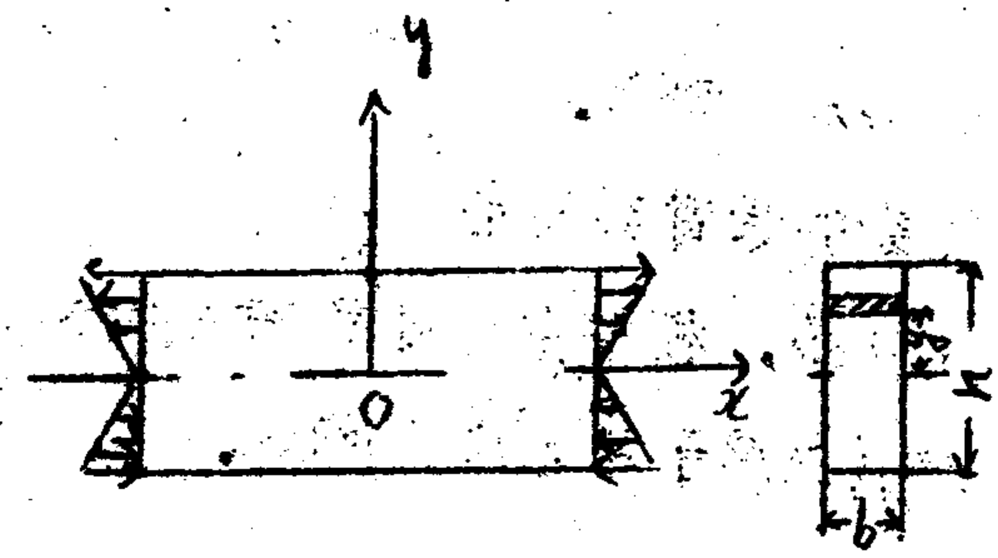

图 1—13

边界上合力

$$X=\int_F \sigma_x dF=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\cdot bdy=0$$

合力矩

$$M=\int_F \sigma_x dF\cdot y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} cy^2\cdot bdy$$

$$=\frac{bh^3}{12}c=J\cdot C$$

得到

$$C=\frac{M}{J}\text{，其中 }J=\frac{b}{12}h^3$$

故 $\varphi=\frac{1}{6}\frac{M}{J}y^3$ 　而 $\sigma_x=\frac{M}{J}y$

由于这样求得的解满足弹性力学的所有要求，故是问题的精确解。还可以看到：它与材料力学求得的解完全相同。这说明使用材料力学平面假设导出的纯弯曲的解，即为精确解。为此还可以推断：

对任何杆件，只要两端作用的纯弯曲力矩所在平面包含杆件轴线，按材料力学求得的解均为精确解。

下面介绍较为复杂的悬臂梁弯曲问题

如图（1—14）示，板条左端固定右端截面上作用力P，截面厚度为1。该问题显然属于平面应力问题。

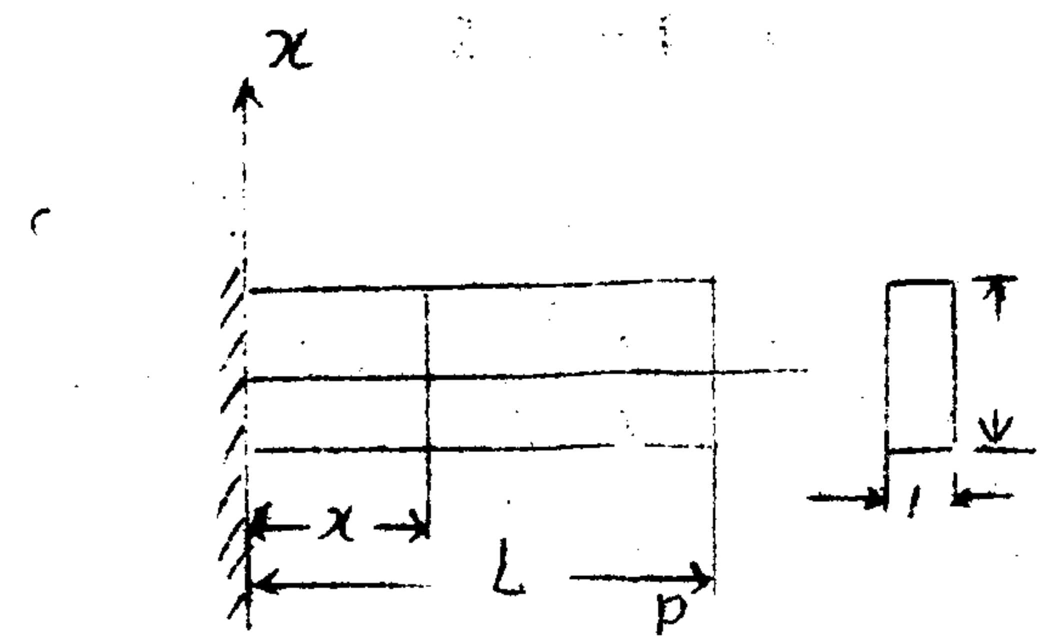

图 1—14

按照材料力学可以求得位于x坐标的梁内应力是：

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{My}{J} = \dfrac{p(l-x)y}{J} \\[2mm]
\sigma_y = 0 \\[2mm]
\tau_{xy} = \dfrac{Qs}{Jb} = -\dfrac{p}{2J}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)
\end{cases}
$$

可以参考上式把应力写成下面形式

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Ay - Bxy \\[2mm]
\sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \\[2mm]
\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = C + Dy^2
\end{cases}
$$