

107819

高等數學大綱

Vessiot et Montel 著
勞君展譯

商務印書館發行

高等數學大綱

Vessiot et Montel 著

勞君展譯

商務印書館發行



序

勞君展女士所譯韋孟兩氏高等數學大綱之前十章，包括高等數學與微分，最適合於大學數理化系及工科一年級之用；一者，學者由此直接高等數學分析，可無困難；一者，此實為理化家及工程師必需之基本數學故也。韋孟兩氏之書，本為巴黎大學講義，兩氏在數學上，均有極大貢獻，則此書之價值可知。聞嚴濟慈李珩兩先生已將此書之機械學部分譯成付梓，而魏璧女士聞亦正從事翻譯此書之解析幾何部分及積分部，不久可成全璧，而分之尤合於中國學生之用；蓋中國大學制，不甚注重混合教法，即偶有採用混合教法者，於機械學亦不如是之偏重，故分之實有益而無損也。勞女士所譯部分優點，實可得而言焉。中國通行之微積分及高等分析各書，對於代數初等函數，指數函數，對數函數，三角函數，反三角函數，雙曲線函數，及反雙曲線函數等，皆語焉不詳；學生欲求深切瞭解，非參考專書不可。此書則挾其原本，附以圖解，使學生於極短時間，澈底瞭解此等函數，以引起其研究微積分之興趣，其為優點一也；法國著者，往往偏於理論，而忽實際，惟此書精確實用並稱，其為優點二也；函數變值法，最有助於解析幾何，此書論之甚詳，取材尤新，其為優點三也；學子關於計算，往往任取小數至若干位，此實不知精密有所限制，本書於微分章後，關於計算差錯，及應如何取數字以適合於一定精密，可以補助中國學子之不逮，其為優點四也。有此四優點，吾等可卜其決風行於世。譯者讀此書甚久，對於數學造詣甚深，譯筆暢達；又加以嚴濟慈博士之參訂，故無待於瑣述；謹論其大者，以就教於讀者之前焉，是為序。

何 魯
熊慶來 同識
中華民國二十六年六月

目 錄

序

第一篇 大代數 微分學 解析幾何

第一章 函數及極限的通性	1
第一節 變數及函數	1
1. 定義	1
2. 顯函數(Fonctions Explicites)	2
3-4. 多元函數(Fonctions de plusieurs Variables)	2
5. 一元之圖示(Réprésentation Graphique d'une Variable)	3
6. 一系二元之圖示(réprésentation graphique d'un système de deux Variables)	4
7. 一個一元函數之圖示	5
8. 隱函數(Fonctions implicites)	5
9. 反函數(Fonctions inverses)	8
10. 關於實際的變數及函數的概念	9
第二節 無窮小(infiniment petits)	10
11. 定義	10
12. 定理	11
第三節 極限(Limite)	13
13. 定義	13
14. 極限的概念之普遍性	15
15-16-17. 關於極限的定理	16
18. 求極限	21
第二章 連續性的概念(La notion de Continuité)	23
第一節 變數的一個數值之連續性	23
19. 定義	23

20. 連續性的定理.....	24
第二節 應用於多項式的理論.....	25
21. 兩個多項式恆等的條件.....	25
22. 泛係數法(Methode des Coefficients indeterminés).....	27
23. 多項式的運算法.....	29
第三節 在一節內的連續性 (Continuité dans un intervalle).....	30
24. 連續函數在一節內的定義和性質.....	30
25. 應用.....	33
第四節 不連續性(Discontinuité)自變數的無窮大數值.....	34
26. 函數變為無窮大.....	34
27. 另一種的不連續.....	36
28. 自變數的無窮大數值.....	37
第一及第二章的練習.....	40
第三章 冪的概念 La Notion de puissance).....	41
第一節 無盡級列 (suites infinies).....	41
29. 定理.....	41
30. 小數的近似值.....	41
31. 極限.....	43
32. 對於級列的定理.....	43
33. 增級列及減級列.....	43
第二節 正整數冪.....	45
34. 定義.....	45
35. 定理.....	45
第三節 有理正冪.....	46
36. 分數冪.....	46
37. 有理正冪的性質.....	47
38. 定理.....	49
第四節 無公度的正數冪 (Puissances incommensurables positives).....	50
39. 無公度正冪的定理.....	50
40. 無公度之正冪的各種性質.....	51

41. 定理.....	52.
第五節 零指數，負數冪.....	52
42. 定義.....	52
43. 性質.....	53
44. 定理.....	54
第四章 函數 x^m , $a^m \log_a x$	55
第一節 函數 $y=x^m$	55
45. 增加及減少.....	55
46. $y=x^m$ 的性質.....	56
47. 原點的切線.....	57
48. 乘法的定理.....	58
第二節 指數函數 $y=a^x$	59
49. a^x 的第一種性質.....	59
50. 與 a^x 的變值法有關係的性質.....	59
51. 定義及變值法.....	62
52. 證明.....	63
53. 算術的性質.....	64
54. 連續性.....	65
55. 由某一系的對數變為另一系的對數.....	66
56. 對數表.....	67
57. 十進對數.....	67
58. 計算尺的原理.....	69
第三及第四章的練習.....	71
第五章 級數 (Séries).....	73
第一節 概要.....	73
59. 收斂性及散發性 (Convergence et divergence).....	73
60. 例題：幾何級數.....	74
61. 正項級數.....	74
第二節 普通定理.....	75
62. 定理 I.....	75
63. 定理 II.....	76

64. 絕對收斂級數(Séries absolument convergentes).....	76
65. 半收斂級數.....	78
第三節 正項級數.....	82
66. 兩正項級數的比較.....	82
67. 應用於無限小數 (Application aux nombres décimaux illimités)	83
68. 由 $\sqrt[n]{a_n}$ 的研究詳解收斂性的性質.....	86
69. 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的研究詳解收斂性的性質.....	87
70. 注意.....	88
第四節 e 數.....	89
71. 牛頓二項式 (Binôme de Newton).....	89
72. 注意.....	91
73. e 數之定理.....	93
74. 定理.....	94
75. 定理.....	96
76. 納氏對數 (Logarithmes Népériens)	99
第五章的練習.....	100
第六章 紀數 (Dérivées).....	103
第一節 平面解析幾何之緒論.....	103
77. 矢 (Vecteurs)	103
78. 與原點成直線之點.....	104
79. 一直線之定向係數 (Coefficients de direction d'une droite)	105
80. 角係數(Coefficient angulaire)	106
81. 方向之極限.....	108
82. 直線經過兩點.....	109
第二節 紀數之定義.....	110
83. 紀數概念之幾何的原來.....	110
84. 注意.....	112
85. 紀數概念之物理的原來.....	113

第三節 紀數之運算	114
86. 初步的結論	114
87. 普遍的定理	116
88. 函數之函數的定理	119
89. 返函數之定理	122
90. a^x 之紀數	124
91. x^m 之紀數	124
92. $\sqrt[n]{x}$ 之紀數	126
93. 三角函數之紀數	126
94. 應用	127
95. 對數之紀數	129
96. 對數之紀數的各種重要例題	130
第六章的練習	132
第七章 反三角函數及雙曲線函數	134
第一節 反三角函數	134
97. 反正切函數	134
98. 反正弦函數	136
99. 反餘弦函數	138
第二節 雙曲線函數	140
100. 雙曲線函數之定義	140
101. 雙曲線函數的性質	142
102. 反雙曲線函數	146
102 ^{bis} . 反雙曲線函數之紀數	148
第三節 關於初級超然之注意	149
103. 超然之紀數表	149
104. 加法的公式	149
105. 雙曲線函數與圓函數中之相應	150
第七章的練習	151
第八章 紀數之初步的應用, 無窮小及無窮大之比較	153
第一節 羅爾(Rolle)之定理——基本公式	153
106. 羅爾之定理	153

107. 定理	155
108. 幾何的解釋	156
第二節 累次紀數	158
109. 累次紀數	158
110. 定理	160
第三節 無窮小之比較	160
111. 兩無窮小之相關級	160
112. 等價的無窮小	161
113. 定理	162
114. 各級的無窮小	164
115. 應用到級數的理論	165
第四節 應用紀數於無窮小之比較, 阿比達爾之規則 (Règle de l'Hopital)	168
116. 阿比達爾之規則	168
117. 幾何學及運動學的解釋	171
118. 求無窮小之級及主部	173
第五節 無窮大之比較	174
119. 概念	174
120. 紀數的應用	176
121. 幾何的解釋	178
122. 對數及指數之增加	179
第八章的練習	181
第九章 馬格老臨 (Uae-Laurin) 及戴勞 (Taylor) 之公式用整級數代表函數	183
第一節 馬格老臨及戴勞之公式	183
123. 馬格老臨之公式之於多項式	183
124. 馬格老臨之公式之於一隨意函數	184
125. 戴勞之公式	185
第二節 應用 —— 有限微差之公式 —— 原函數之基本的概念	186
—— 三重根	
126. 有限微差之公式	186

127. 定理 I.....	187
128. 原函數 (Fouction primitive).....	187
129. 定理 I 及 II.....	188
130. 多項式之複根(Racines multipleo des polynomes).....	189
第三節 馬格老臨的級數	190
131. 馬格老臨的級數.....	190
132. 定理.....	190
第四節 整級數的性質.....	193
133. 收斂半徑 (Rayon de Convergence).....	193
134. 整級數之普遍性質.....	195
135. 求紀法——連續性.....	195
136. 二項式之級數.....	197
137. 求積分法.....	199
138. 應用.....	199
第五節 整級數之運算, 應用於研究真數值.....	202
139. 整級數之加法及乘法.....	202
140. 冪之昇高及除法.....	203
141. 應用於研究真數值.....	205
142. 不定式 $\infty - \infty$	207
第六節 對數之算法, π 之算法.....	208
143. 納氏對數之算法.....	208
144. π 之算法.....	210
第七節 對整級數基本的定理.....	211
145. 收斂性 (Convergence).....	211
146. 紀數.....	213
147. 乘法.....	215
148. 函數之函數.....	216
第九章的練習.....	221
第十章 函數變值法之研究.....	223
第一節 平直函數及直線之圖解.....	223
149. 定義.....	223

150. 經過一已知點之直線	224
第二節 函數之變分的研究	225
151. 定理 I 及 II	225
152. 反演 1	225
153. 應用於研究函數的變值法	226
154. 例題 1	227
155. 注意	228
156. 例題 2	228
第三節 研究函數在變數之一數值的鄰近	229
157. 概論	232
158. 極大與極小(Maxima et Minima)	234
159. 凹之研究 (Etude de la Concavite)	236
160. 極大與極小之研究	241
161. 應用——汪特瓦斯之曲線 (Courbe de Van der Waals)	241
第四節 無窮枝之研究	241
162. 漸近線的研究	241
163. 例題 1	244
164. 各級數展式之使用	246
第五節 討論及解方程式	247
165. 離根法	247
166. 例題 1	248
167. 一個根的算法	252
168. 假位規則及部份比例法	254
169. 牛頓之方法	255
169 ^{bis} 連續近似法或反覆法	257
第六節 對於差數之概論	260
170. 定義	260
171. 定理	261
172. 牛頓推值法之公式	262
173. 蘭格倫日 (Langrange) 推值法之公式	265

第十章的練習.....	266
華法索引.....	269

高等數學大綱

第一篇 大代數 微分學 解析幾何

第一章 函數及極限的通性

第一節 變數及函數

1、定義——在所研究的問題中，一個 x 字母，能隨意給 x 以許多的數值，就稱 x 爲自變數 (Variable indépendante)。

另一字母 y ，在同一問題中，與 x 有聯帶關係； y 的每一數值與 x 的一數值相應；於是稱 y 爲 x 的函數。

在這種情況中，也說 y 是一個因變數 (Variable dépendante)。

用記號 $y=f(x)$ 說明這個因變 (dépendance) 的意義。在 $y=f(x)$ 式中， $f(x)$ 是代表 x 每一數值。函數 y 的相應數值，又念 $f(x)$ 爲 x 的 f 。

例題——若以 y 代三項式 x^2-4x+3 ，寫爲

$$y=x^2-4x+3$$

這個式子又表示 y 爲 x 的函數，用符號； $y=f(x)$ 也能寫爲

$$f(x)=x^2-4x+3$$

又例如有

$$f(0)=3, f(1)=0, f(2)=-1, f(-1)=8, \text{等等}$$

注意(1)——任何函數的 f 符號，能設如算子 (Opérateur) 一樣。因爲 f 在一函數中能指示，應該如何的，由自變數之數值產生函數之相應數值的運算。在前例中，這種運算包含有一箇自乘方，一箇以 4 乘的乘法，一箇減法和一箇加法。

注意(2)——若同時設 x 的各種函數，可用相似形的 $f(x)$, $g(x)$, ... $F(x)$, $G(x)$, ... $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ 等記號代表各函數。

2、顯函數 (Fonction Explicite)——凡 x 之 y 函數，是用 y 式決定的，如前例，均稱為顯函數。

有理函數 (fonctions rationnelles) 就是一的整數多項式，又兩箇整數多項式的分數式稱為有理分數式 (fractions rationnelles)

$$\text{例如： } y=2x-3, \quad y=x^2+x-1, \quad y=\frac{x-1}{x+1}, \dots$$

一個顯函數若式內有根號則稱為無理函數。

$$\text{例如： } y=\sqrt{1-x^2} \quad y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} \dots$$

注意(1)——至於一箇整數多項式，他的自變數能代任何數值。或者說，自變數能由 $-(\infty)$ 變到 $(+\infty)$ 。在有理分數中，就要除去自變數的許多異值 (Valeurs singulières) 把這些異值代入函數式中，函數就要失掉了意義。這就是使分母等於零的一些數值。如同 $x=-1$ 是 $y=\frac{x-1}{x+1}$ 的一箇異值。

注意(2)——又有時，無理函數的 x 只應在某間隔 (Intervalles) 內變值如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 只有當 $-1 \leq x \leq 1$ 時才有意義，就是說函數只能決定在 $(-1, +1)$ 間隔中。

定義—— a, b 是兩任意數值。又 a 小於 b ，普通所稱 a, b 間隔乃指所有 x 的數值適合於下雙不等式 (double inégalité) 者：

$$a \leq x \leq b$$

a, b 數值是兩極端 (Extremités) 或是間隔的兩界 (bornes)。間隔包括 a, b ，若適合於下雙不等式 各數值。

$$a < x < b$$

則稱為在 a, b 之間的數值。或者說在 (a, b) 間隔中的數值。

又說： $(-\infty, a)$ 間隔是指所有 x 小於或等於 a 的數，即： $x \leq a$ ；又 $(b, +\infty)$ 間隔是指所有 x 大於或等於 b 的數，即： $b \leq x$ 。

3、多元函數 (Fonctions de plusieurs Variables) ——設有幾箇自變數例如 x, y, z 。另外有一 u 字，與 x, y, z 的關係，是每給 x, y, z 一組

數值時 u 就有一相應數值。稱 u 爲 x, y, z 的函數。用下面的記號代表之。

$f(x, y, z), g(x, y, z), \dots, F(x, y, z), G(x, y, z), \dots, \mathcal{P}(x, y, z), \dots$

例題——若以 u 代表多項式 $x^2 + 2yz - z^2 + 2y - \sigma x + 2$

將寫成：

$$u = x^2 + 2yz - z^2 + 2y - \sigma x + 2;$$

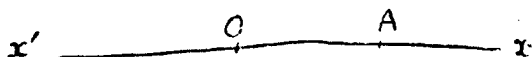
是 u 爲 x, y, z 的一個函數，若以 $u = f(x, y, z)$ 表之則有，

$$f(0, 0, 0) = 2, f(1, 0, -1) = -4, f(1, 2, 3) = 4 \dots$$

4. 方程式 (Equation)，在含 x 的方程式中，將式中各項儘移於左端 (premier membre)，於是左端成爲函數 $f(x)$ ，是以方程式的普通樣式爲 $f(x) = 0$ 。

同樣，方程式中有幾個變數 x, y, z 的普通形是 $f(x, y, z) = 0$

5. 一元之圖示 (Représentation Graphique d'une Variable)——設想一動點在直線 xx' 上移動，他能夠向東或向西移動；即從 x' 到 x ，或從 x 到 x' 。



例如，由 x' 到 x 稱正向 (sens positif) 可得一矢直線或軸 (axe)，在軸上取一定點 O ，稱爲原點又選定一種圖單位 (Unité Graphique) 例如厘米 (Centimètre)。

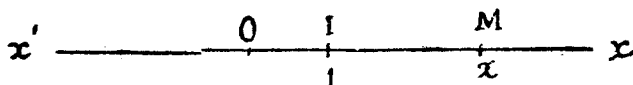
於是凡軸上的 A 點都與一代數數 a 相應，稱 a 爲 A 點的橫坐標 (Abscisse)；即 $\overrightarrow{OA}$ 矢 (vecteur) 的代數量，他的符號是 $(+)$ 或 $(-)$ 是隨矢的向 (即動點由矢的原點到終點 A 的向) 爲軸的正向，或是相反的向而定。

另一說法， a 的絕對值 (Valeur Absolue) 就是 A 與原點的距離 a ，是正或負則按照 A 是在 ox 半軸上 (正半軸) 或在 ox' 半軸上 (負半軸)。

反言之，每箇代數數 a ，都與軸的一點 A 相應，亦只有一點用 a 爲橫坐標。因 a 的符號顯示 ox, ox' 兩半軸的符號，應在那一半軸上有 A 點；又此半軸上有一點，亦僅僅一點與原點的距離是 a ①。

① 記號 $|x|$ 是代表代數數 x 的絕對值，以後我們也用模 (Module) 字，此字與絕對值 (Valeur Absolue) 的意義相同。

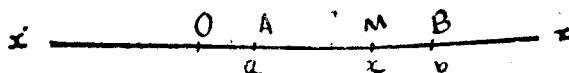
因此，各代數數與軸上的各點有獨相應(Correspondance Univeque)(●)



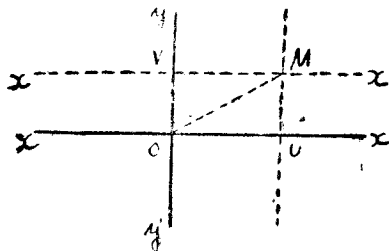
又能用軸上各點 M 代表一個變數 x 的各數值，而這些 M 點的橫坐標就是 x 的這些數值。若 M 點以 x 做橫坐標，就是說 M 與變數 x 的值相應， M 點的橫坐標可稱為 M 的 x 。

注意(1)——給了軸的原點，軸的正向及圖單位都已知道，就是等於在直線上，畫出與 0 及 1 數相應之 0 及 1 兩點。

注意(2)——當 x 增加時， M 向正向移動。軸的 AB 段 (Segment) 代表 $(a'b')$ 間隔又節的兩極端 A 與 B 的橫坐標為 a 及 b 。



6. 二變數組之圖示 (Représentation Graphique d'un système de deux Variables)——在一平面內，設兩正交軸 xx' , yy' 。兩軸相交於 0 點，將用 0 為各軸的原點。圖單位已選定。因此有一組坐標軸；及 0 為坐標的原



點。為免除紊亂計，將稱 yy' 軸上的坐標為縱坐標 (ordonnées) $x'x$ 上的坐標為橫坐標以區別之。

平面上每一 M 點與一雙代數數相應，即在 $x'x$ 上的正投影 (projection orthogonal) U 之橫坐標 x 在 $y'y$ 上的正投影 V 之縱坐標 y 普通稱為 M 的橫坐標及縱坐標 (或橫軸及縱軸)；又稱 x, y 為 M 點在 xy 組內之坐標，

(●)就是一個與一個相對應。

又簡稱為 M 的 x, y 。

故 M 的橫坐標及縱坐標，就是 $\overrightarrow{OM}$ 矢在 $x^1 x$ 及 $y^1 y$ ，兩軸上投影(或偏矢(Composante)的代數量。

M 為 $y^1_1 y_1, x^1_1 x_1$ 兩軸的交點。 $y^1_1 y_1, x^1_1 x_1$ 是由 U 及 V 引與 $y^1 y$ 及 $x^1 x$ 平行的兩軸。

反轉來說，凡 x, y 兩變數的一組數值，與平面上以 x, y 為坐標的 M 點相應(僅只一點)因為 x 數值只與 $x^1 x$ (變數 x 的軸)的一 U 點相應； y 數值只與 $y^1 y$ (變數 y 的軸)的一 V 點相應。又由 U 及 V 引長平行於 $y^1 y$ 及 $x^1 x$ 的 $y^1_1 y_1$ 及 $x^1_1 x_1$ 的兩軸只能相交於 M 點。

若變數 x, y 均為自變數，在平面上的各點， M 與兩變數的 (x, y) 組的數值有獨相應，故平面上的各點 M ，可以代表一變自變數，如同直線上的各點 M ，可以代表一個自變數一樣。

注意(1)——稱 OUM, OVM 為 M 點的坐標的界線 (Contour des Coordonnées)，有代數數

$$\overline{OU} = x, \quad \overline{UM} = y; \quad \overline{OV} = y, \quad \overline{VM} = x$$

因為議定，應該常使平行軸的正向與軸的正向相同。

若 x, y 為已知數，然後就能書 OUM 界線，得相應的 M 點；就是取 x 做橫坐標得 U 點；及取 y 做縱坐標，就是說書平行於 $y^1 y$ 的 UM 矢，這矢有 U 為原點， y 為代數數

同樣，也能用相反的秩序書界線 OVM 。

7. 一元函數之圖示(Réprésentation Graphique d'une fonction d'une variable)——設函數 $y=f(x)$ ，每個 x 的數值，就是 x 軸上每個 U 點，與 y 的

