高等數學大綱

Vessiot et Montel 著
勞 君 展 譯

商務印書館發行

高等數學大綱

Vessiot et Montel 著
勞君展 譯

商務印書館發行

序

勞君展女士所譯韋孟兩氏高等數學大綱之前十章，包括高等數學與微分，最適合於大學數理化系及工科一年級之用；一者，學者由此直接高等數學分析，可無困難；一者，此實爲理化家及工程師必需之基本數學故也。韋孟兩氏之書，本爲巴黎大學講義，兩氏在數學上，均有極大貢獻，則此書之價值可知。聞嚴濟慈李珩兩先生已將此書之機械學部分譯成付梓，而魏璧女士聞亦正從事翻譯此書之解析幾何部分及積分部，不久可成全璧，而分之尤合於中國學生之用；蓋中國大學制，不甚注重混合教法，卽偶有採用混合教法者，於機械學亦不如是之偏重，故分之實有益而無損也。勞女士所譯部分優點，實可得而言焉。中國通行之微積分及高等分析各書，對於代數初等函數，指數函數，對數函數，三角函數，反三角函數，雙曲線函數，及反雙曲線函數等，皆語焉不詳；學生欲求深切瞭解，非參考專書不可。此書則抉其原本，附以圖解，使學生於極短時間，澈底瞭解此等函數，以引起其研究微積分之興趣，其爲優點一也；法國著者，往往偏於理論，而忽實際，惟此書精確實用並稱，其爲優點二也；函數變値法，最有助於解析幾何，此書論之甚詳，取材尤新，其爲優點三也；學子關於計算，往往任取小數至若干位，此實不知精密有所限制，本書於微分章後，關於計算差錯，及應如何取數字以適合於一定精密，可以補助中國學子之不逮，其爲優點四也。有此四優點，吾等可卜其決風行於世。譯者讀此書甚久，對於數學造詣甚深，譯筆暢達；又加以嚴濟慈博士之參訂，故無待於瑣述；謹論其大者，以就教於讀者之前焉，是爲序。

中華民國二十六年六月 何魯 熊慶來 同識

目　　錄

高 等 數 學 大 綱

第一篇　大代數　微分學　解析幾何

第一章　函數及極限的通性

第一節　變數及函數

1、定義——在所研究的問題中，一個 x 字母，能隨意給 x 以許多的數值，就稱 x 爲自變數（Variable indépendante）。

另一字母 y，在同一問題中，與 x 有聯帶關係；y 的每一數值與 x 的一數值相應；於是稱 y 爲 x 的函數。

在這種情況中，也說 y 是一個因變數（Variable dépendante）。

用記號 $y=f(x)$ 說明這個因變（dépendance）的意義。在 $y=f(x)$ 式中，$f(x)$ 是代表 x 每一數值。函數 y 的相應數値，又念 $f(x)$ 爲 x 的 f。

例題——若以 y 代三項式 x^2-4x+3，寫爲

$$y=x^2-4x+3$$

這個式子又表示 y 爲 x 的函數．用符號；$y=f(x)$ 也能寫爲

$$f(x)=x^2-4x+3$$

又例如有

$$f(0)=3,\quad f(1)=0,\quad f(2)=-1,\quad f(-1)=8,\text{等等}$$

注意（1）——任何函數的 f 符號，能設如算子（Opérateur）一樣。因爲 f 在一函數中能指示，應該如何的，由自變數之數值產生函數之相應數值的運算。在前例中，這種運算包含有一個自乘方，一個以 4 乘的乘法，一個減法和一個加法。

注意(2)——若同時設x的各種函數，可用相似形的 $f(x)$，$g(x)$，… $F(x)$，$G(x)$，…$\varphi(x)$，$\Psi(x)$等記號代表各函數。

2、顯函數(Fonction Explicite)——凡x之y函數，是用y式決定的，如前例，均稱爲顯函數。

有理函數 (fonctions rationnelles) 就是的整數多項式，又兩箇整數多項式的分數式稱爲有理分數式 (fractions rationnelles)

例如： $y=2x-3$，　　$y=x^3+x-1$，　　$y=\dfrac{x-1}{x+1}$，……

一個顯函數若式內有根號則稱爲無理函數。

例如： $y=\sqrt{1-x^2}$　　$y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$……

注意(1)——至於一箇整數多項式，他的自變數能代任何數值。或者說，自變數能由$-(-\infty)$變到$(+\infty)$。在有理分數中，就要除去自變數的許多異值 (Valeurs singulières) 把這些異值代入函數式中，函數就要失掉了意義。這就是使分母等於零的一些數值。如同 $x=-1$ 是 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$的一箇異值。

注意(2)——又有時，無理函數的x只應在某間隔 (Intervalles) 內變值如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 只有當$-1\leqslant x\leqslant 1$時才有意義，就是說函數只能決定在$(-1,+1)$間隔中。

定義——a, b是兩任意數值。又a小於b，普通所稱$a\ b$間隔乃指所有x的數值適合於下雙不等式 (dauble inègalitè) 者：

$$a\leqslant x\leqslant b$$

a, b數值是兩極端(Extremités) 或是間隔的兩界(bornes)。間隔包括a, b，若適合於下雙不等式各數值。

$$a<x<b$$

則稱爲在a, b之間的數值。或者說在$(a,\ b)$間隔中的數值。

又說：$(-\infty, a)$間隔是指所有x小於或等於a的數，即：$x\leqslant a$；又$(b+\infty)$間隔是指所有x大於或等於b的數。即：$b\leqslant x$。

3、多元函數 (Fonctions de plusieurs Variables) ——設有幾箇自變數例如 x, y, z。另外有一u字，與 x, y, z 的關係，是每給 x, y. z 一組

數值時 u 就有一相應數值。稱 u 爲 x, y, z 的函數。用下面的記號代表之。

$f(x, y, z), g(x, y, z) \cdots\cdots, F(x, y, z), G(x, y, z), \cdots\cdots \varphi(x, y, z), \cdots\cdots$

例題——若以 u 代表多項式 $x^2+2yz-z^2+2y-\sigma x+2$

將寫成：

$u=x^2+2yz-z^2+2y-\sigma x+2$；

是 u 爲 x, y, z 的一個函數，若以 $u=f(x, y, z)$ 表之則有，

$f(0, 0, 0)=2,\ f(1, 0, -1)=-4,\ f(1, 2, 3)=4\cdots\cdots$

4、方程式 (Equation)，在含 x 的方程式中，將式中各項儘移於左端 (premier membre)，於是左端成爲函數 $f(x)$，是以方程式的普通樣式爲 $f(x)=0$。

同樣，方程式中有幾個變數 x, y, z 的普通形是 $f(x, y, z)=0$

5、一元之圖示 (Réprésentation Graphique d'une Variable)——設想一動點在直線 xx' 上移動，他能向東或向西移動；即從 x' 到 x，或從 x 到 x'。

例如，由 x' 到 x 稱正向 (sens positif) 可得一矢直線或軸 (axe)，在軸上取一定點 O，稱爲原點又選定一種圖單位 (Unité Graphique) 例如厘米 (Centimètre)。

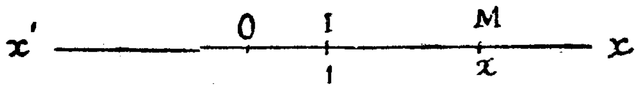
於是凡軸上的 A 點都與一代數數 a 相應，稱 a 爲 A 點的橫坐標(Abscisse)；即 $\overrightarrow{OA}$ 矢 (vecteur) 的代數量，他的符號是(+)或(−)是隨矢的向(即動點由矢的原點到終點 A 的向)爲軸的正向，或是相反的向而定。

另一說法，a 的絕對值 (Valeur Absolue) 就是 A 與原點的距離 a，是正或負則按照 A 是在 ox 半軸上(正半軸)或在 ox' 半軸上(負半軸)。

反言之，每箇代數數 a，都與軸的一點 A 相應，亦只有一點用 a 爲橫坐標。因 a 的符號顯示 ox, ox' 兩半軸的符號，應在那一半軸上有 A 點；又此半軸上有一點，亦僅只一點與原點的距離是 a (❶)。

(❶)記號 (x) 是代表代數數 v 的絕對值，以後我們也用模 (Module) 字，此字與絕對值 (Valeur Aboolue) 的意義相同。

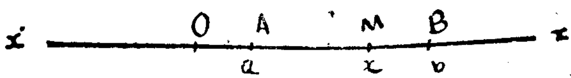
因此，各代數數與軸上的各點有偶相應(Correspondance Univeque)(●)



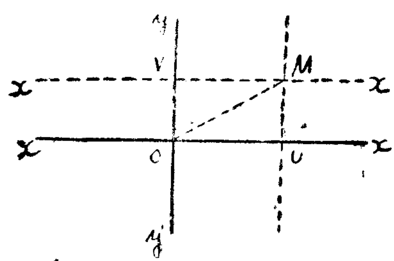
又能用軸上各點 M 代表一個變數 x 的各數值，而這些 M 點的橫坐標就是 x 的這些數值。若 M 點以 x 做橫坐標，就是說 M 與變數 x 的值相應，M 點的橫坐標可稱爲 M 的 x。

注意(1)——給了軸的原點，軸的正向及圖單位都已知道，就是等於在直線上，畫出與0及1數相應之0及1兩點。

注意(2)——當 x 增加時，M 向正向移動。軸的 AB 段 (Segment)代表 $(a'b)$ 間隔又節的兩極端 A 與 B 的橫坐標爲 a 及 b。



6、二變數組之圖示 (Répresentation Graphique d'un système de deux Variables)——在一平面內，設兩正交軸 xx', $y\ y'$。兩軸相交於0點，將用0爲各軸的原點。圖單位已選定。因此有一組坐標軸；及0爲坐標的原



點。爲免除紊亂計，將稱 $y'y$ 軸上的坐標爲縱坐標 (ordonnées) $x'x$ 上的坐標爲橫坐標以區別之。

平面上每一 M 點與一雙代數數相應，即在 $x'x$ 上的正投影(projection orthogonal) U 之橫坐標 x 在 $y'y$ 上的正投影 V 之縱坐標 y 普通稱爲 M 的橫坐標及縱坐標（或橫軸及縱軸）；又稱 x, y 爲 M 點在 xoy 組內之坐標，

(●)就是一個與一個相對應。

又簡稱爲 M 的 x, y。

故 M 的橫坐標及縱坐標,就是 $\overrightarrow{OM}$ 矢在 $x^1 x$ 及 $y^1 y$, 兩軸上投影(或偏矢(Composante) 的代數量。

M 爲 $y'_1 y_1$, $x'_1 x_1$ 兩軸的交點。$y'_1 y_1$,, $x'_1 x_1$ 是由 U 及 V 引與 $y' y$ 及 $x' x$ 平行的兩軸。

反轉來說,凡 x, y 兩變數的一組數值,與平面上以 x, y 爲坐標的 M 點相應(僅只一點)因爲 x 數値只與 $x' x$(變數 x 的軸)的一 U 點相應;y 數値只與 $y' y$(變數 y 的軸)的一 V 點相應。又由 U 及 V 引長平行於 $y' y$ 及 $x' x$ 的 $y'_1 y_1$ 及 $x'_1 x_1$ 的兩軸只能相交於 M 點。

若變數 x, y 均爲自變數,在平面上的各點,M 與兩變數的 (x, y) 組的數値有獨相應,故平面上的各點 M,可以代表一雙自變數,如同直線上的各點 M,可以代表一個自變數一樣。

注意(1)——稱 OUM, OVM 爲 M 點的坐標的界線 (Contour des Coordonnées),有代數數

$$\overline{OU}=x, \quad \overline{UM}=y; \quad \overline{OV}=y, \quad \overline{VM}=x$$

因爲議定,應該常使平行軸的正向與軸的正向相同。

若 x, y 爲已知數,然後就能書 OUM 界線,得相應的 M 點;就是取 x 做橫坐標得 U 點;及取 y 做縱坐標,就是說書平行於 $y'y$ 的 UM 矢,這矢有 U 爲原點,y 爲代數數

同樣,也能用相反的秩序書界線 OVM。

7、一元函數之圖示(Réprésentation Graphique d'une fonction d'une variable)——設函數 $y=f(x)$,每個 x 的數値,就是 x 軸上每個 U 點,與 y 的