高等数学题解集

第 二 册

福州大学数学系高等数学教研室编

高等数学题解集
第二册
*
福州大学数学系高等数学教研室编
福州大学印刷厂印刷
*
1979.10.

前　　言

本题解集是在同济大学数学教研室编《高等数学习题集》（1965年修订本）的基础上，结合我校情况进行适当地增补，为我校非数学系各专业的一、二年级同学学习《高等数学》这门课的需要编写的。也可作为从事高等数学教学工作的老师和学习高等数学的同志的参考资料。

全集共分五册。第二册内容为：函数、极限、连续及一元函数微分学。限于篇幅，每道习题虽都给出解答（附在各章习题之后），但详简不一，对有多种解法者，最多也仅给出两种。鉴于水平有限，经验不足，时间又匆促，因此在选题和解法上缺点、错误一定不少，欢迎使用本书的同志指正。

本题解集是在校、系领导的鼓励和支持下，由我室徐进明编写，郭有龙、李秋秀、林可容、王启泰、罗由学、李炳光、陈增政、高觉诚、王传荣、陈志鸿等全室同志集体审核的。在编写过程中还得到兄弟院校的同志提供宝贵资料，另外参阅和选用了一些高等数学教学参考书或习题集上的习题，在这里一并表示道谢！

编　者

一九七九年十月

第二编　数 学 分 析

第二编　数学分析

第十章　函　　数

绝对值的运算

解不等式：

10.1. $|x|<5$.　　10.2. $|x-3|<4$.　　10.3. $x^2<9$.

10.4. $0<(x-2)^2\leqslant 4$.　　10.5. $|x|>x$.

10.6. $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$.　　10.7. $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$.

求下列方程的实根：

10.8. $|x|=x+1$.　　10.9. $|x|=-x$.

10.10. $|\sin x|=\sin x+2$.　　10.11. $|2x+3|=x^2$.

函数值的求法

10.12. 若$f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

10.13. 若$\varphi(x)=2^{x-2}$，求$\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\frac{5}{2}\right)$.

10.14. 若 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$.

10.15. 若$f(x)=x^2-3x+7$，求$f(x+\triangle x)$，$f(x+\triangle x)-f(x)$.

10.16. 若 $f(x)=\frac{1}{x}$，求$f(x+\triangle x)-f(x)$.

10.17. 若$\psi(x)=\ln x$①，证明$\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

10.18. 若 $F(z)=a^z$，证明 (a) $F(-z)\cdot F(z)-1=0$，(b) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

10.19. 若$\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$, 证明$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$.

10.20. 若$\varphi(\theta)=\operatorname{tg}\theta$, 证明$\varphi(a+b)=\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}$.

10.21. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$, 证明$f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

10.22. 若 $f(x)=x^5-x^3+2x$, 证明 $f(-2)=-f(2)$, $f(-x)=-f(x)$.

10.23. 若$F(x)=x^2+\cos x$, 证明$F(x)=F(-x)$.

10.24. 若$\varphi(z)=\sin z-5z^3$, 证明$\varphi(-z)=-\varphi(z)$.

10.25. 若$\psi(x)=2\sin x-3\cos x$, 证明$\psi(x+2n\pi)=\psi(x)$, 其中n为整数.

10.26. 若$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求$f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(2)$.

10.27. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求$\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(-0.5)$.

10.28. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求$\varphi(1)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$.

---

①本书中的对数函数，以10为底的一律用"lg"表示；以e为底的一律用"ln"表示，底为任意数a的表为"$\log_a x$".

函数的定义域

在题10.29—10.58中指出函数的定义域：

10.29. $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$.　　10.30. $y=\frac{1}{x^2+1}$.

10.31. $y=\sqrt{3x+4}$.　　10.32. $y=\sqrt{x^2-1}$.

10.33. $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.　　10.34. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

10.35. $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$.　　10.36. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$.

10.37. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.　　10.38. $y=\frac{1}{\lg(1-x)}$.

10.39. $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.　　10.40. $y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$.

10.41. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\log_a(2x-3)\quad(a>1)$.

10.42. $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$.

10.43. $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.　　10.44. $y=\log_2(\log_2 x)$.

10.45. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.　　10.46. $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

10.47. $y=\operatorname{tg}(x+1)$.　　10.48. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

10.49. $y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.　　10.50. $y=\arccos\sqrt{2x}$.

10.51. $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$.　　10.52. $y=\arcsin(2+3^x)$.

10.53. $y=\lg\sin x$.　　10.54. $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

10.55. $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$.

10.56. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

10.57. $y=\begin{cases}x^2+1, & -1<x<2, \\ x^3-3, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

10.58. $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0, \\ x, & 0<x<1, \\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$

10.59. 设$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，问

(a) $f(x^2)$，　(b) $f(\sin x)$，

(c) $f(x+a)$，$(a>0)$，(d) $f(x+a)+f(x-a)$，

$(a>0)$的定义域是什么?

10.60. 已知从高为h处落下的重物所经过的路程是由公式$S=\frac{1}{2}gt^2$来确定，问(a)此函数的定义域为何?(b)解析式$S=\frac{1}{2}gt^2$的定义域又如何?

在题10.61—10.64中，$f(x)$与$\varphi(x)$是否表同一函数?说明其理由，并在哪一区间内，它们是相同的.

10.61. $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$.

10.62. $f(x)=\lg x^2, \varphi(x)=2\lg x$.

10.63. $f(x)=x$，$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$.

10.64. $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.

建立函数关系

10.65. 温度计上摄氏0度对应华氏32度，摄氏100度对应华氏212度，试求将摄氏温标表为华氏温标的函数.

10.66. 设M为密度不均匀细杆OB上的一点，若OM的质量与OM的长度平方成正比，又已知$OM=4$寸其

质量为8单位. 试求 OM 的质量与长度间的关系.

10.67. 一物体作直线运动, 已知阻力的大小与物体运动的速度成正比, 但方向相反. 当物体以1米/秒速度运动时阻力为2克, 建立阻力与速度间的函数关系.

10.68. 电压在某电路上等速下降, 在实验开始时电压为12伏特, 经过8秒后电压降落到6.4伏特. 试把电压 V 表为时间 t 的函数.

10.69. 已知三角形中有两边长分别为 a 与 b, 设 γ 为该两边之间的夹角. 试将三角形的面积表成 γ 的函数, 并求其定义域.

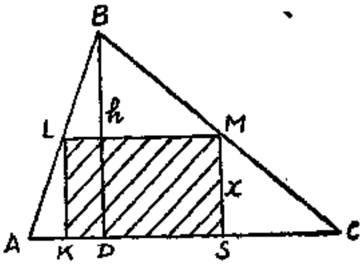
10.70. 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱, 试将圆柱的体积表为其高的函数, 并求此函数的定义域.

10.71. 已知圆锥的体积为 V, 试将圆锥的底半径表为其高的函数, 并求此函数的定义域.

10.72. 一物体受压缩弹簧的推力而运动. 如这弹簧一端固定于原点, 原长 $2l$, 压缩后长度为 l, 弹性系数为 k. 试将物体所受之力表为距离之函数(只考虑弹簧长度由 l 变至 $2l$ 的过程).

10.73. 把一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

10.74. 底 $AC=b$, 高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中(如右图)内接矩形 $KLMS$, 其高记为 x, 将矩形

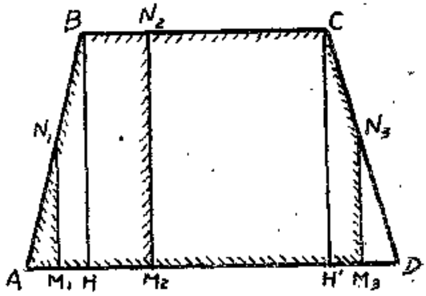


(10.73图)

之周长p和其面积S表为x的函数.

10.75. 在三角形ABC中，$AB=6$厘米，$AC=8$厘米，$\angle BAC=x$. 试将边$BC=a$表为变量x的函数.

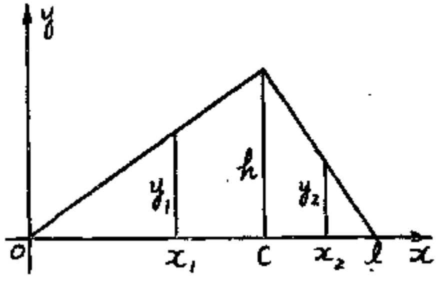
10.76. 等腰梯形$ABCD$（如图），其两底分别为$AD=a$和$BC=b$ $(a>b)$，高为$HB=h$. 引直线$MN \parallel BH$，MN与顶点A的距离$AM=x$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$. 将梯形内位于直线$MN$之左的面积$S$表为$x$的函数.



(10.76图)

10.77. 弦的长为l，两端固定，在c点处将弦提高h后呈图中的形状. 设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连结线方向移动. 以x表示弦上点的位置，y表x点处升高的高度，试建立x与y间的函数关系.

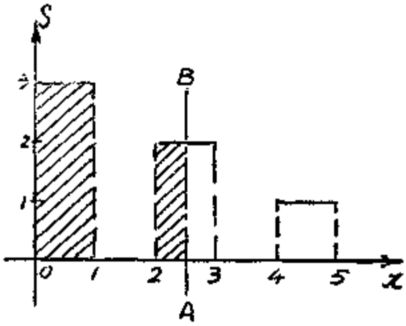
10.78. 某公共汽车路线全长为20里，票价规定如下：乘坐4里以下者收费5分，乘坐4—10里收费1角，10里以上收费1角5分. 试将票价表成路程之函数，并作图.



(10.77图)

10.79. 有三个矩形，其高分别等于3米、2米、1

米，而底皆为1米，彼此相距一米放着(如图)．假定 x（$-\infty<x<+\infty$）连续变动(即直线 AB 连续地平行移动)．试将阴影部分的面积 S 表为距离 x 的函数．



(10.79图)

10.80. 在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有3克重的物质均匀分布着，此外又有一克重的物质集中在 $x=3$ 处．设 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，试将区间 $(-\infty,x)$ 一段的质量 M 表为 x 的函数．

函数性质的讨论

10.81. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶的函数(在各函数中 $a>1$)：

(a) $y=x^4-2x^2$； (b) $y=x-x^2$； (c) $y=\cos x$；

(d) $y=2^x$； (e) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$； (f) $y=\sin x$；

(g) $y=\sin x-\cos x$； (h) $y=\mathrm{tg}\, x$；

(i) $y=e^{-x^2}$； (j) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；

(k) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$； (l) $y=\dfrac{x}{a^x-1}$；

(m) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$； (n) $y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$.

10.82. 证明函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数．

10.83. 假设下面所考虑的函数都是定义在$(-l,l)$内，证明：

(a) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(b) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

10.84. 证明：不论$f(x)$是定义在$(-l,l)$内的什么样的函数，$f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数.

10.85. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期：

(a) $y=\sin^2 x$；　(b) $y=\sin x^2$；

(c) $y=x\cos x$；　(d) $y=\cos 2x$；

(e) $y=\sin \pi x$；　(f) $y=\sin\frac{1}{x}$；

(g) $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$；　(h) $y=\sin(x+1)$；

(i) $y=\cos(x-2)$；　(j) $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

10.86. 验证下列函数在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的：

(a) $y=3x-6$,　(b) $y=2^{x-1}$,　(c) $y=\lg x+x$.

10.87. 证明：(a) $y=10^{\lg y}$，$(y>0)$；(b) $x^3=10^{3\lg x}$，$(x>0)$；(c) $A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$，$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}$.

10.88. 建立下列函数的反函数：

(a) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$；(b) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$；(c) $y=2\sin 3x$；

(d) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$；　(e) $y=1+\lg(x+2)$；

(f) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$；　(g) $y=3^{2x+5}$.

10.89. 验证：函数$y=\frac{1-x}{1+x}$的反函数就是它本身.

10.90. 验证：函数$f(x)=\frac{ax-b}{cx-a}$的反函数就是它本身.

函数的图形

在题 10.91—10.107 中画出各函数的图形：

10.91. $y=x+b$, 当 $b=0, b=1, b=-1$时.

10.92. $y=ax^2$, 当$a=1, a=-1$, $a=\frac{1}{16}$时.

10.93. $y=x^2+cx+1$, 当 $c=-2$, $c=0, c=2$ 时.

10.94. $y=x^3+d$, 当$d=0, d=1, d=-2$时.

10.95. $y=|x|$. 10.96. $y=-|x-2|$. 10.97. $y=|x^2-1|$.

10.98. $y=x-x^2$. 10.99. $y=\frac{2}{x}$. 10.100. $y=\frac{1}{x^2}$.

10.101. $y=\frac{x^2+1}{x}$. 10.102. $y=x^k$, 当 $k=\frac{1}{3}$, $k=\frac{2}{3}$时.

10.103. $y=a^x$, 当 $a=\frac{1}{2}$, $a=2$时.

10.104. $y=3^{ax}$, 当 $a=1, a=-1$时.

10.105. $y=\lg ax$, 当 $a=1, a=-2$时.

10.106. $y=1-\cos x$. 10.107. $y=|\sin x|$.

10.108. 利用 $y=2^x$的图形画出下列函数的图形：

(a) $y=2^x+1$; (b) $y=3\cdot 2^x$; (c) $y=2^{2x}$.

10.109. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

(a) $y=\sin 2x$; (b) $y=\sin\left(2x+\frac{3}{2}\right)$;

(c) $y=\frac{1}{2}\sin x$; (d) $y=\frac{1}{2}\sin x-1$.

10.110. 利用图形的加法作下列函数的图形：

(a) $y=x+\sin x$; (b) $y=\sin x+\cos x$.

10.111. 建立下列函数的反函数，并画出两种函数的图形：

(a) $y=2^x+1$; (b) $y=\log_4 x+1$; (c) $y=\sin(x-1)$;

(d) $y=x^2-2x$; (e) $y=\arcsin\frac{1-x}{4}$.

10.112. 画出 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{1}{2}, & x<0\end{cases}$ 的图形.

10.113. 画出 $y=\begin{cases}|x-1|, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x>2\text{或}x<0\end{cases}$ 的图形.

10.114. 已知$f(x)$以2为周期，并且$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

试在$(-\infty,+\infty)$上绘出 $y=f(x)$ 的图形

10.115. 作函数 $y=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$ 的图形.

双曲函数

10.116. 验证下列关系式：

(a) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$; (b) $\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}2x$;

(c) $2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x=\mathrm{sh}2x$;

(d) $\mathrm{sh}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta\pm\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$;

(e) $\mathrm{ch}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta\pm\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$;

(f) $1-\mathrm{th}^2x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$; (g) $1-\mathrm{cth}^2x=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}$;

(h) $\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x=e^{x}$； (i) $\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x=e^{-x}$.

补 充 题

10.117. 证明下列不等式：

(a) 当 $|x+1|<\frac{1}{2}$ 时， $|x-2|<\frac{7}{2}$；

(b) 当 $|x-1|\leqslant 1$ 时， $|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

10.118. 求下列函数在 $x=-\frac{1}{2}$，$x=0$，$x=\frac{1}{2}$ 点处的函数值，并画出函数的图形.

(a) $E(x)=[x]$（此处 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）；

(b) $f(x)=x-[x]$；

(c) $f(x)=sgn(x)=\begin{cases}1 & 当 x>0,\\ 0 & 当 x=0,\\ -1 & 当 x<0,\end{cases}$（此处 $sgn(x)$ 称为符号函数）.

10.119. 画出下列函数的图形：

(a) $y=a(1-e^{-x})$ $(a>0,\ x\geqslant 0)$；

(b) $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$；

(c) $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$；

(d) $y=\sqrt{9-x^2}-\frac{3x}{|x|}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$.

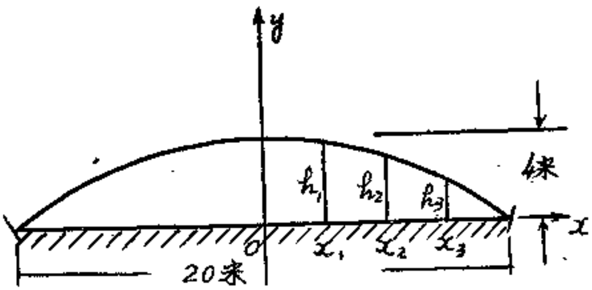
10.120. 脉冲发生器每隔100微秒（1秒$=10^6$微秒）产生一个10伏的电压脉冲，持续时间是10微秒. 写出电压 u 与时间 t 的函数关系，并画出电压波形图.

10.121. 一稳压电源回路，电动势为 E，内阻为 r_0，负载电

阻为 R；将输出功率 P 表为负载电阻 R 的函数.

10.122. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 θ 角的拉力 F，使物体从静止开始移动. 求物体开始移动时拉力 F 与角 θ 之间的函数关系式.

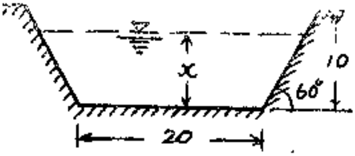
10.123. 一座拱桥，形状是抛物线，其跨度为 20 米，中心处拱高为 4 米. 根据施工需要，要求算出把跨度八等分时各分点处的高度. 试计算图中的 h_1，h_2 和 h_3.



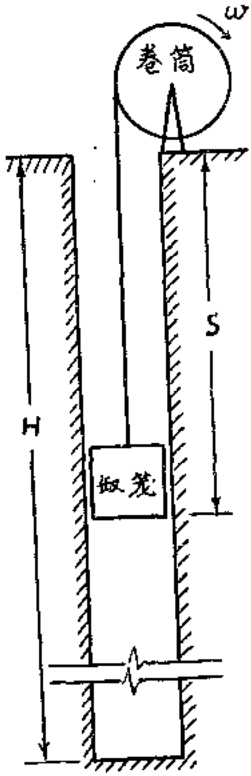
(10.123图)

10.124. 矿井深 H(米). 半径为 R(米)的卷筒以等角速度 ω(弧度/秒)转动，从井底用罐笼起吊重物(如图)；求起吊过程中，罐笼底部离地面的距离 S 与时间 t 之间的函数关系式.

10.125. 某工厂建一蓄水池，池长 50 米，断面尺寸如图所示. 为了随时能知道池中水的吨数（每立方米水重一吨）。只需在水池的端壁上标出尺寸，看出水的高度 x，就可以换算成所蓄水的吨数 T. 试写出换算用的函数关系式，并指出函数 $T(x)$ 的定义域.



(10.125图)



(10.124图)

10.126. 在单相交流电中：电功率 $n=ui$，电压降 $u=Ri$，电流强度 $i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$，其中$R$是电阻，$I_m$是电流的幅值，$\omega$是单相交变角频率，$\varphi$是初相位，$t$为时间，试求电功率$n$与时间$t$的函数关系.

10.127. 已知两个点电荷q_1、q_2的距离为r，写出其相互作用力f与距离r间的函数关系.

10.128. 如图所示曲柄连杆机构中：曲柄OA长为r，连杆AB长为l，当曲柄OA以等角速度ω绕O按逆时针方向旋转时，则连杆AB带动滑块B作直线运动．试求滑块B的运动规律.

(图见下页)