信号空间理论

（下册）

何敬成　刘醒凡

成都电讯工程学院七系

第六章　线性算子的表示方法

§6·1　在有限维定义域上的线性变换表示法

在第三章中，我们已对线性变换的基本概念作了简要的阐述。在此基础上，本章进一步讨论各种类型的线性变换的表示方法。目的是企图寻找一种普遍的方法，来表征系统的信号变换特性。我们将会看到，对线性变换的表示方法，与第四章中描述的关于信号的表示法，有着惊人的类似。但是，应当注意，有很大一类线性变换，它的表示方法远比信号表示方法更复杂当然，要完全令人满意地解决这类问题，已超出本课程的内容我们这里只是就最基本的方面作些讨论，以便为下一章的内容准备必要的知识。

当线性变换的定义域，是有限维内积空间时，有一些简单而直接的方法表示线性变换。这些方法引出了各种形式的表示法，且各自具有不同的优点。而我们最关心的，是具有如（4.1）式所示内积形式的$L^2(T)$函数空间的有限维子空间。研究有限维的定义域上的变换的基本动机，是想通过对它的基本方法的研究，推广延伸到感兴趣的更广泛的定义域，以至全$L^2(T)$空间。下面我们便来简单地介绍它们的几种表示方法。

1．响应矢量表示法

首先，我们假定输入空间A，是由线性独立集合$\{\overline{\varphi}_i\ ;i=1,2,\cdots n\}$张成，且具有互易集合$\{\overline{\theta}_i\ ;i=1,2,\cdots n\}$。输出空间B为n维空间，它包含所研究的线性变换L的值域。由于值域的维数不可能超出定义域的维数，我们总可以找到这样

的空间。现对任意$\bar{X}\in A$，由（4·2）和（4·9）式有

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{X},\ \bar{\theta}_i)\varphi_i(t)\quad t\in T \tag{6·1}$$

又由于L的线性特性，则可得

$$y(t)=Lx(t)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{X},\ \bar{\theta}_i)\psi_i(t) \tag{6·2}$$

这里集$\{\bar{\psi}_i;\psi_i(t)=L\varphi_i(t),\ i=1,2,\cdots n\}$构成A各个基函数输入到L后的响应。很显然，在A中点的全体像，可表示为$\{\psi_i\}$的线性组合，系数为表示$\bar{X}\in A$相同的n个有序组$\bar{\alpha}=\{\alpha_i=(\bar{X},\ \bar{\theta}_i);i=1,2,\cdots n\}$。因此，我们可以把$\{\bar{\psi}_i;i=1,2,\cdots n\}$看作为L关于A的基$\{\bar{\varphi}_i;i=1,2,\cdots n\}$的表示。与用n个有序组表示信号相比，线性变换的表示法，是用B中n个有序矢量序列关于A的特定基的表示。

由此，似乎可以想像把$\{\bar{\psi}_i;i=1,2,\cdots n\}$作输出空间B的基。但是，由于不能确保它是线性独立，因而不能这样做。否则由线性独立性的定义可知，若存在某个非零$\bar{X}$输入在B中映射射为零。只要有一个矢量映射为零，那么必定有一子空间也映射为零。A的这一子空间叫线性变换的零空间。由于导致多对一的映射特性，不存在逆映射，且线性变换是奇异的。一个奇异的变换必具有小于维数n的值域。由于$\{\psi_i\}$是线性相依，不能张成输出空间B。事实上，很容易证明值域和零空间维数的和是等于n。值域空间维数叫做线性变换的秩。

2．线性泛函序列表示法

表示L的另一种方法是借助于空间A的n个矢量的有序序

列。下面简述这一方法。

令 $\{\tilde{\varphi}_i\ ; i=1,\ 2,\ \cdots n\}$ 是张成B的线性独立矢量，$\{\tilde{\theta}_i\ ;\ i=1,\ 2,\ \cdots n\}$ 是对应的互易基集合。则在B中任意矢量可表示为

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n}(\bar{y},\ \bar{\theta}_j)\tilde{\varphi}_j(t) \qquad (6\cdot3)$$

将（6·2）式代入（6·3）式，得

$$y(t)=Lx(t)=\sum_{j=1}^{n}(\bar{x},\ \overline{}_j)\tilde{\varphi}_j(t) \qquad (6\cdot4)$$

这里

$$\omega_j(t)=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\theta}_j,\ \bar{\psi}_i)\theta_i(t) \qquad (6\cdot5)$$

因此，有序序列 $\{\bar{\omega}_i\ ; i=1,\ 2,\ \cdots n\}$ 代表对于B的特殊基的L的表示法。零空间是A中的矢量子空间，它和所有 $\bar{\omega}_j$ 正交。如果 $\{\bar{\omega}_j\ ; j=1,\ 2,\ \cdots n\}$ 是线性独立，则变换的秩是n。我们也可以把这样一种表示法，想像为包含形式为 $f_j(\bar{x})=(\bar{x},\ \bar{\omega}_j)\ ;\ j=1,\ 2,\ \cdots n$ 的n个线性泛函有序序列。因而，变换可表示为

$$Lx(t)=\sum_{j=1}^{n}f_j(\bar{x})\tilde{\varphi}_j(t) \qquad (6\cdot6)$$

3．矩阵表示法

由于在第一种方法中的每个矢量 $\bar{\psi}_i$，和在第二种方法中的每个矢量 $\bar{\omega}_j$，均可用n个有序组表示。因而可知，线性变换可用 $n\times n$ 个标量方阵（矩阵）来表示。为了证明这点，假定

$$\psi_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}\widetilde{\varphi}_j(t) \tag{6·7}$$

这里

$$\lambda_{ji}=(\overline{\psi}_i,\widetilde{\theta}_j)=(L\overline{\varphi}_i,\widetilde{\theta}_j) \tag{6·8}$$

将(6·7)代入(6·1)，有

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}\alpha_i\widetilde{\varphi}_j(t)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\widetilde{\varphi}_j(t) \tag{6·9}$$

这里

$$\alpha_i=(\overline{x},\overline{\theta}_i)$$

$$\beta_j=(\overline{y},\widetilde{\theta}_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ji}\alpha_i$$

或用标准的矩阵符号表示为

$$\overline{\beta}=\overline{L}\,\overline{\alpha} \tag{6·10}$$

这里$\overline{\alpha}$和$\overline{\beta}$分别是$\overline{x}$和$\overline{y}$关于A和B的基的n个有序组表示法。$\overline{L}$表示n×n方阵，其元素为第i行和j列标量$\lambda_{ij}=(L\overline{\varphi}_j,\widetilde{\theta}_i)$，它代表了变换L。

§6·2 $L^2(T)$空间算子的表示法

上面的表示法，当应用到特殊线性变换时是非常有用的。但是，若要提供对所有变换类的表示，上述方法存在根本限制。这些限制更多的不是来自约束的定义域，而是来自变换的值域。不同的变换类型，它的变换值域可能根本不同。值域限制在特定的n维输出空间的一类变换，对于很多感兴趣的变换来说是少数。另一方面，定义域为整个$L^2(T)$空间的有介线性变换

类，代表了实际感兴趣的主要变换类。应当注意，在$L^2(-\infty,\infty)$上的有介线性变换，实际上是线性算子。因为有介信号的象是有介的。有介算子的物理解释为网络具有稳定特性，意味着有限能量输入信号仅产生有限能量输出信号。

从解析的观点看，在$L^2(T)$空间上的线性算子，最方便的表示方法，是借助于第四章描述的连续基。因此，我们假定用函数$u(s)$ 和 $v(s)$，分别代表输入和输出信号$x(t)$和和$y(t)$关于核基$\varphi(t,s)$的表示。即

$$x(t)=\int_S u(s)\varphi(t,s)ds \tag{6·11}$$

$$y(t)=\int_S v(s)\varphi(t,s)ds$$

对算子L，我们有

$$y(t)=L\,x(t)=\int_S u(s)\psi(t,s)ds \tag{6·12}$$

这里$\psi(t,s)=L\,\varphi(t,s)$，是具有参变量s和自变量t的函数。像在第四章中提到的，这里不要求$\varphi(t,s)$是t的平方可积函数。因为，由(5·1b)式知

$$v(s)=\int_T y(t)\theta(s,t)dt \tag{6·13}$$

联立(6·12)和(6·13)式求出

$$v(s)=\int_T\int_S u(\sigma)\psi(t,\sigma)\theta(s,t)d\sigma\,dt$$

$$=\int_S L(s,\sigma)u(\sigma)d\sigma \qquad (6\cdot14)$$

这里

$$L(s,\sigma)\triangleq\int_T \theta(s,t)\psi(t,\sigma)dt \qquad (6\cdot15)$$

(6·15)式和离散情况下的(6·8)式之间的类似性是很显然的。(6·8)式中的离散变量j和i由(6·15)式中的连续变量s和σ替代。输入输出信号关于基φ(t，s)的表示，是通过积分变量联系。积分变换，因而也是算子，由核函数L(s，σ)表征，它类似于(6·10)式中的矩阵L。由(6·15)式也可看出，核函数完全由网络对信号基φ(t，s)的响应描述(见图6·1)。

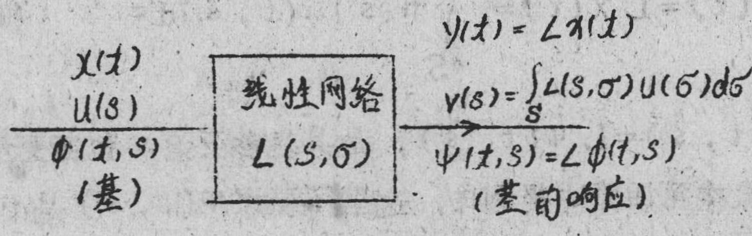

图6·1　线性网络信号变换特性表示

作为一个实际例子，先来研究通常使用的基φ(t，s)＝δ(t－s)，具有T＝S＝(－∞，∞)。在这种情况下，有最简单情况u＝x和v＝y，见(5·21)式。这里基响应为ψ(t，s)＝h(t，s)，网络的冲激响应。它是t的函数，是

在输入端上S时刻加入的冲激响应。由(6·15)式有

$$L(s, \sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-t)h(t, \sigma)dt=h(s, \sigma) \tag{6·16}$$

因此，一种表示网络输入输出关系的方法，是利用冲激响应作为核的积分变换。

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau \tag{6·17}$$

另一个常用的基是 $\varphi(t, s)=e^{j2\pi st}$，具有T＝S＝(－∞，∞)，它导致信号和算子的频域描述。这里U＝X和V＝Y，X和Y分别是x和y的付氏变换。借助于网络的冲激响应，我们可求出付基 $e^{j2\pi st}$ 的响应 $\psi(t, s)$，按照(6·17)式有

$$\psi(t, s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)e^{j2\pi s\tau}d\tau \tag{6·18}$$

因此，由(6·14)和(6·15)有

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f, \gamma)X(\gamma)d\gamma$$

这里

$$H(f, \gamma)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)e^{-j2\pi ft}e^{j2\pi\gamma\tau}dtd\tau \tag{6·19}$$

1．混合基

对于某些应用来说，有时需要用不同的基表达输入输出信号。设$\varphi(t,s)$为输入信号的基，$\tilde{\varphi}(t,s)$为输出信号的基，则根据上面的讨论有

$$\nu(s)=\int_S L(s,\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

这里

$$L(s,\sigma)=\int_T \theta(s,t)\psi(t,\sigma)dt \qquad (6\cdot 20)$$

$$\psi(t,s)=L\,\varphi(t,s)$$

频域描述输入信号和时域描述输出信号，已在时变网络分析中得到应用，即

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t,s)&=e^{j2\pi st}\\ \tilde{\varphi}(t,s)&=\delta(t-s)\end{aligned}\right\} \qquad (6\cdot 21)$$

利用(6·20)式于上式，求得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t,f)X(f)df \qquad (6\cdot 22)$$

这里借助于冲激响应有

$$G(t,\ )=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau \qquad (6\cdot 23)$$

另一描述混合基表示算子的例子是上述情况的对偶情况，即

$$\begin{aligned}&\varphi(t,s)=\delta(t-s),\\&\varphi(t,s)=e^{j2\pi st}\end{aligned}\tag{6·24}$$

在这种情况下，我们有

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty}k(f,t)X(t)dt\tag{6·25}$$

$$k(f,t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau,t)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

2．算子的分类

线性系统的某些特性，可借助于算子核函数性质表征。这些特性对各类算子的分类是很有用的。下面我们来描述在实际应用中常遇到的几类。在这里，我们假定算子的定义域是$L^2(-\infty,\infty)$。

a．时不变算子

很多实际系统有这样的信号变换特性，它与激励信号加入的时刻无关。时不变可描述为下述意义上时间原点位移不变：若L是时不变算子，则对任意X和任意位移t_0，若有$y(t)=LX(t)$，则有$y(t-t_0)=LX(t-t_0)$。如果而且仅仅如果冲激响应$h(t,\tau)$只依赖于单变量$t-\tau$，则算子是时不变的。由于这一原因，通常把冲激响应写为$h(t-\tau)$，甚至更简单地

写为h（t），表示冲激是在$\tau=0$时刻加入。算子的时域描述，由（6·17）式得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \qquad (6\cdot27)$$

这里$\bar{y}$是$\bar{h}$和$\bar{x}$的卷积，符号表示为$\bar{y}=\bar{h}\otimes\bar{x}$。通过改变（6·27）式中积分变量，可以表示运算为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma)x(\sigma+t)d\sigma \qquad (6\cdot28)$$

式中已令$k(\sigma)=h(-\sigma)$。这是一种由扫描得到信号的方法。如果一空间分布信号$\bar{x}$，如一光图像，通过一 定速度扫描装置扫描读出，得到的时间函数由（6·28）式给出。这里$k(\sigma)$可解释为扫描“窗”两端透射比。扫描运算经常在信号处理系统中遇到，记住这些运算是等效于时不变滤波是非常重要的。

用频率域描述时不变算子特别方便。在这种情况下，(6·19)式变为

$$H(f,\gamma)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ft+j2\pi\gamma t}dtd\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-j2\pi f\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-\gamma)\tau}d\tau d\sigma$$

$$=H(f)\delta(f-\gamma) \qquad (6\cdot29)$$

)

因此得

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)\delta(f-\gamma)X(\gamma)d\nu$$

$$=H(f)X(f) \qquad (6\cdot30)$$

(5·30) 式中函数H(f) 叫做时不变网络的传输函数。借助k(6)，有

$$Y(f)=K^{*}(f)X(f) \qquad (6\cdot31)$$

时不变算子类的另一重要特性是算子相乘符合交换律。由此可得，时不变网络级联组合的传输函数是各级传输函数的积（符合交换律）。因而，级联中的顺序是不重要的。

b．恒等算子

恒等算子I是对所有$\bar{X}$有$\bar{X}=I\bar{X}$。显然，它是一时不变算子。相应的冲激响应是$h(t)=\delta(t)$，对应的传输函数为$H(f)=1$。

c．延迟算子

与恒等算子紧密相联，且在实践中很有用的另一类算子，是所谓延迟算子。它将$x(t)$映射为$x(t-t_0)$。相应的冲激响应是$h(t)=\delta(t-t_0)$，传输函数为$H(f)=e^{-j2\pi f t_0}$。

d．选通算子（相乘器）

有几种实际器件（调制器、信号选通等），执行的变换为

$$y(t)=W(t)x(t) \qquad (6\cdot32)$$

很明显，它不是时不变的，除非W(t)是常数（在这种情况下，运算是简单的标量积）。选通算子的冲激响应给出为

$$h(t,\ \tau)=W(t)\delta(t-\tau) \tag{6·33}$$

或者等效地为

$$h(t,\ \tau)=W(\tau)\delta(t-\tau)$$

在频率域中，利用（6·19）求出

$$H(f,\ \gamma)=\int_{-\infty}^{\infty} W(t)\delta(t-\tau)e^{-j2\pi ft+j2\pi\gamma\tau}\,dt\,d\tau$$

$$=\int_{\infty}^{\infty} W(\tau)e^{-j2\pi(f-\gamma)\tau}\,d\tau$$

$$=W(f-\gamma) \tag{6·34}$$

因此，运算用卷积表征为

$$Y(f)=\int_{\infty}^{\infty} W(f-\gamma)X(\gamma)\,d\gamma \tag{6·35}$$

d．物理可实现算子

表征一物理可实现系统的算子的基本限制，是系统是非提前发生的，或因果的。这一要求很容易借助冲激响应来陈述。由（6·17）式，我们可看出，如果y(t)只依赖于输入的过去值，则对脉冲响应的必要和充分条件是

$$h(t,\ \tau)=0\ ,\qquad \tau>t \tag{6·36}$$

很多作者综合这一条件把运算表示为

$$y(t)=\int_{-\infty}h(t,\ \tau)\chi(\tau)d\tau$$

这里对函数 $h(t,\tau)$ 未作限制。但是，为了我们的目的，更方便的作法是为了保持固定的积分区间，即，附加一冲激响应应满足的辅助条件

$$h(t,\ \tau)=w(t-\tau)h(t,\ \tau) \tag{6·37}$$

这里

$$\begin{aligned} w(t)&=1 && \text{对} t>0 \\ &=0 && \text{对} t<0 \end{aligned}$$

e．有限阶微分算子

很多物理系统的响应特征，可近似由有限阶微分方程来描述。分析线性系统的标准方法，是借助于由集总元素组成的级联网络模拟系统。有很多著名的方法导出集总参数网络的微分方程。可以证明，对如下形式的微分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\frac{d^i y(t)}{dt^i}=\sum_{i=0}^{n-1}b_i(t)\frac{d^i\chi(t)}{dt^i} \tag{6·38}$$

相应的运算冲激响应可表达为

$$\begin{aligned} h(t,\ \tau)&=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t)\theta_k(\tau) && \text{对} t>\tau \\ &=0 && \text{对} t<\tau \end{aligned}$$

这里$a_i(t)$和$b_i(\tau)$是连续系数，在系数是常数情况下，系统是时不变的，除特殊情况下多项式$Q(p)=\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$有根外，系统冲激响应给出为

$$
\begin{aligned}
h(t-\tau) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{p_k(t-\tau)} \qquad \text{对} t > \tau \\
&= 0 \qquad \text{对} t < \tau
\end{aligned}
\tag{6·40}
$$

这儿p_k是$Q(p)=0$的根。这一时不变算子的传输函数是频率的有理函数。

$$
H(f)=\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{j2\pi f-p_k} \tag{6·41}
$$

或者等效为

$$
H(f)=\frac{P(j2\pi f)}{Q(j2\pi f)}
$$

这里分子多项式是

$$
P(p)=\sum_{i=1}^{n-1} b_i p^i
$$

f．退化算子

在$L^2(-\infty,\ \infty)$上，值域为有限维（有限秩）的算子叫退化算子。退化算子的核函数有可分特性，它对近似表示和算子方程的数值解非常有用。秩为n的退化算子的冲激响应为

$$h(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\theta_i^*(\tau) \qquad (6\cdot42)$$

这里$\{\psi_i(t);i=1,2,\cdots n\}$和$\{\theta_i(t);i=1,2,\cdots n\}$是在$L^2(-\infty,\infty)$空间的线性独立集合。对$\bar{x}$运算的像，借助于$\bar{x}$的n个线性泛函表达为

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{x},\bar{\theta}_i)\psi_i(t) \qquad (6\cdot43)$$

应当提醒的是，（6·42）式表示的冲激响应，形式上好像表示有限阶系统的（6·39）式。但是，有限阶系统在一般情况下不是退化的，这是由于它对$t>\tau$和$t<\tau$有不同的特性。

§6·3　在$L^2(T)$空间上算子的近似表示法

在借助于积分变换核函数表示$L^2(T)$空间上算子中，我们曾经避开了一个重要问题：即对这些算子获得有限数表示的问题。这一问题的实质是寻找一个算子，它可以用如5·1节中描述的$n\times n$矩阵表示，且在某种意义上，它是所研究的算子的最好近似。一个有用且直接的方法，是限制定义域到$L^2(t)$空间的有限维子空间上。主要根据是输入信号的集合，在特殊情况下，可以很好地表达为基函数有限集合的线性组合。例如，可以断定，在4·3节中描述的完备规一化正交集之一的前几项，能提供较恰当地表示所有输入信号。最方便地表示输出信号是用同一基。因此，假定M_n表示由$\{\bar{\varphi}_i;i=1,2,\cdots n\}$张成的子空间。在待逼近的$L^2(T)$算子L运算下，$\bar{x}\in M_n$的象在一般情况下是不包含在$M_n$中。选$L_n$作为近似算子，它将$\bar{x}$映射为象$\bar{y}=L\bar{x}$在$M_n$正交投影。如图6·2所示。