有限元素法

北京航空学院四〇五教研室

一九八二年五月

目　录

限

(4)

第一章　概述

有限元素法是一种有效的数值計算法。对于結构形状复杂、載荷和支持情况也复杂的零件进行应力分析，有限元素法也都能适应。这是任何其他典型方法所不及的。所以，有限元素法在航空工程上以及其他工程部門中，得到了广泛的采用。

有限元素法必须使用高速数字电子計算机来进行計算。有关計算机和矩陣代数等方面的知识，已在“計算数学”課中解决；需要的彈性力学方面的基本知识，也已由“材料力学与彈性力学基础”課程中提供。这份講义主要从力学方面对有限元素法的概念和处理问题的方法进行介紹。

本章主要是說明有限元素法的基本概念和处理问题的基本思路。为了把其內容的特点叙述得清晰易懂，将本着由淺入深、由个別到一般的原則，先从簡单的实例入手，再从中归納出有限元素法的处理问题的基本思路。

§1－1　弹簧的剛度和柔度

如图1－1所示的彈簧，受到拉力P的作用，彈簧产生位移（伸长）为u，則由虎克定律得出力与位移的关系。

$$P=Ku \qquad (1-1)$$

或

$$u=CP \qquad (1-2)$$

式中K称彈簧的剛度（或剛度系数），它表示彈簧产生单位位移时所需要的力；C称彈簧的柔度（或柔度系数），它表示单位力引起彈簧的位移。

剛度K和柔度C的关系，可以由（1−1）、（1−2）式得：

$$KC=1 \qquad (1-3)$$

如果以U表示彈簧的变形能，由图1所示則为

$$U=\frac{1}{2}Pu=\frac{1}{2}Ku^2 \qquad (1-4)$$

限
④

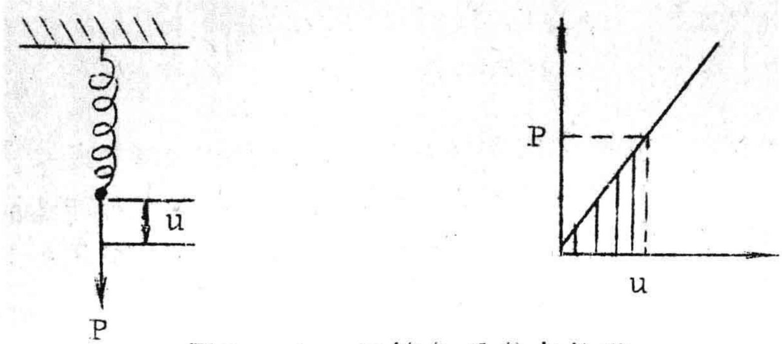


图1－1　弹簧的受载与位移

由（1—4）式，可以很容易得到如下关系式：

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{dU}{du}\,。\\ u &= \frac{dU}{dP}\,。\end{aligned}\right\}\qquad (1-5)$$

§1－2　連接二杆件上的受力分析

在图1－2中，有等截面杆件a和b，在节点2处鉸連起来成为一簡单的杆系。該杆系在节点1处与支座鉸連，并在节点2和3处分别受外加軸向載荷P_2和P_3。試求支反力P_1，节点2和3处的位移u_2和u_3，以及杆a和杆b上的应力。

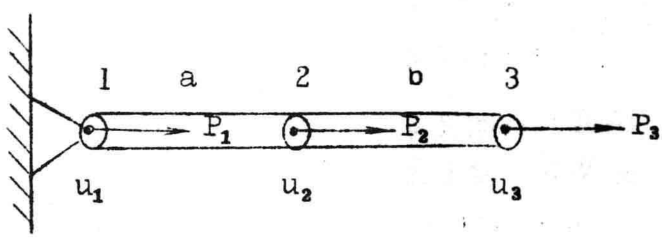


图　1－2

这是一个簡单的一維问题，可以很容易地由一般工程方法直接求得。

根据力的平衡条件，求出支反力P_1：

$$\begin{aligned} &P_1+P_2+P_3=0\,, \\ \therefore\quad &P_1=-(P_2+P_3)。\end{aligned}\qquad (1-6)$$

式中负号說明支反力 P_1 的方向应与外載 P_2 和 P_3 的方向相反。于是在杆 a 上受拉力（P_2+P_3），在杆 b 上受拉力 P_3。由于节点 1 为支点，其位移 $u_1=0$，则节点 2 的位移 u_2 由（1—1）式得：

$$u_2=\frac{P_2+P_3}{K_a} \tag{1—7}$$

杆 a 的剛度 K_a，可以从材料力学中直接求得 $K_a=\frac{EA_a}{L_a}$。其中 E 为材料的弹性系数，A_a 及 L_a 为杆 a 的横截面积及长度。同理，节点 3 的位移 u_3 为：

$$u_3=\frac{P_3}{K_b}+u_2=\frac{P_3}{K_b}+\frac{P_2+P_3}{K_a} \tag{1—8}$$

杆 b 的剛度 $K_b=\frac{EA_b}{L_a}$，其中 A_b 及 L_b 为杆 b 的横截面积及长度。

杆 a 和杆 b 的应力 σ^a 和 σ^b，即可由下式求得：

$$\sigma^b=\frac{P_3}{A_b}\text{，}$$

$$\sigma^a=\frac{P_2+P_3}{A_a}\text{。} \tag{1—9}$$

把这个例题用有限元素法来求解。显然这样一个簡单的问题，实际上是不必用复杂的有限元素法来处理的，这完全是为了說明有关有限元素法的基本思路和特点，作为以后处理复杂问题时的借鉴。其具体步驟如下：

1．离散：将图 1－2 的杆系离散为图 1－3 所示的元素 a 和元素 b。节点 1 和 2 对元素 a 的作用力为 F_1^a 和 F_2^a（称节点力），节点 2 和 3 对元素 b 的作用力为 F_2^b 和 F_3^b。元素 a 和 b 点对节点 1、2、3 的反作用力分别为 $F_1^{a'}$、$F_2^{a'}$、$F_2^{b'}$、$F_3^{b'}$。根据作用力与反作应力大小相等方向相反的原理，$F_1^a=F_1^{a'}$，$F_2^a=F_2^{a'}$，$F_2^b=F_2^{b'}$；$F_3^b=F_3^{b'}$。在节点 1、2、3 上的外力分别为 P_1、P_2、P_3（支反力 P_1 也为外力）。

2．求元素的节点力与节点位移的关系，以便用节点的位移表示节点力。将各节点位移作为整个系統的待求未知数，这就是位移法的特

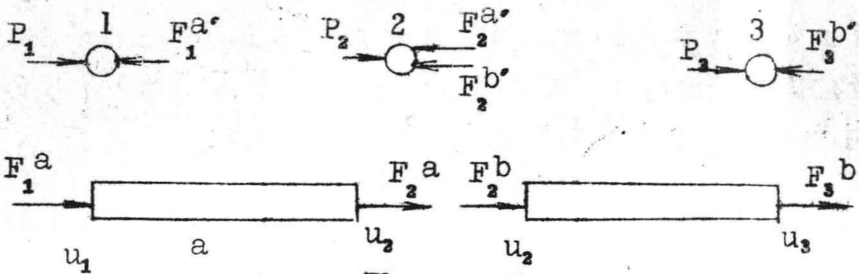


图 1－3

元素a：首先假設1端固定 $u_1=0$，2端有位移 u_2（如图1－4所示），则1、2节点力分别为：

$$\left.\begin{aligned} F_2^{a''} &= K_a u_2 \\ F_1^{a''} &= -F_2^{a''} = -K_a u_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1-10)$$

式中 $-K_a$ 即刚度为負，說明力与位移的方向不一致。其次假設2端固定 $u_2=0$，1端的位移 u_1，则1、2端节点力分别为：

$$\left.\begin{aligned} F_1^{a'''} &= K_a u_1 \\ F_2^{a'''} &= -K_1^{'''} = -K_a u_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1-11)$$

于是由于（1－10）式和（1－11）式求得用节点位移表示的节点力为：

$$\begin{aligned} F_1^a &= F_1^{a'''} + F_1^{a''} = K_a u_1 - K_a u_2 \\ F_2^a &= F_2^{a'''} + F_2^{a''} = -K_a u_1 + K_a u_2 \end{aligned} \qquad (1-12)$$

把（1－12）式写成矩陣形式：

$$\begin{Bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (1-13)$$

式中 K_{11}，K_{12} 等的下标，除說明所在的行和列的位置外，还有明显的物理意义，即 $K_{11}=K_a$，說明由节点1位移引起的节点1处的节点力之間的剛度；$K_{12}=-K_a$，說明由节点2位移引起的节点1处的节点力之間的剛度。K_{21}，K_{22} 等意义相似。

元素b，同样求得用节点位移表示的节点力为：

$$\left.\begin{aligned} F_2^b &= K_b u_2 - K_b u_3 \\ F_2^b &= -K_b u_2 + K_b u_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1-14)$$

图 1－4

将其写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} F_2^b \\ F_3^b \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{33} & K_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1-15)$$

3．建立节点平衡方程式(见图1－3):

节点1的平衡方程式:

$$P_1 - F_1^{a'} = 0$$

即
$$P_1 = F_1^{a'} = F_1^a = K_a u_1 - K_a u_2 \quad (1-16)$$

节点2的平衡方程式:

$$P_2 - F_2^{a'} - F_2^{b'} = 0$$

即
$$P_2 = F_2^{a'} + F_2^{b'} = F_2^a + F_2^b = (-K_a u_1 + K_a u_2) + (K_b u_2 - K_b u_3)$$
$$= -K_a u_1 + (K_a + K_b) u_2 - K_b u_3 \quad (1-17)$$

节点3的平衡方程式:

$$P_3 - F_3^{b'} = 0$$

即
$$P_3 = F_3^{b'} = F_3^b = -K_b u_2 + K_b u_3 \quad (1-18)$$

在位移法中仅各点位移u_1、u_2、u_3为未知数，其他各参数均为已知，于是根据节点平衡方程式(1－16)～(1－18)式即可求解。将其写成矩阵形式为:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_a & -K_a & 0 \\ -K_a & K_a+K_b & -K_b \\ 0 & -K_b & K_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1-19)$$

一般简写成: $\{P\}=[K]\{\delta\}$

或 $\{K\}\{\delta\}=\{P\}$ (1－20)

式中 $\{P\}=\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{Bmatrix}$ 为载荷列阵

$$[K]=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\K_{21} & K_{22} & K_{23}\\K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}$$ 为该杆系的总刚度矩阵

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}$$ 为节点位移列阵。

4．代入边界条件求解节点位移及支反力：

已知边界条件为$u_1=0$。而P_1为未知的支反力将其代入（1—19式为：

$$\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}K_a & -K_a & 0\\\hline -K_a & K_a+K_b & -K_b\\0 & -K_b & K_b\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}0\\\hline u_2\\u_3\end{array}\right\} \quad (1-21)$$

分解成两个矩阵方程：

$$\begin{Bmatrix}P_2\\P_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_a+K_b & -K_b\\-K_b & K_b\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix} \quad (1-22)$$

及

$$P_1=\{-K_a \quad 0\}\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}, \quad (1-23)$$

对（1—22）式求逆解$\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}$得：

$$\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_a+K_b & -K_b\\-K_b & K_b\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}P_2\\P_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{K_a} & \frac{1}{K_a}\\\frac{1}{K_a} & \frac{1}{K_a}+\frac{1}{K_b}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_2\\P_3\end{Bmatrix} \quad (1-24)$$

其結果与（1—7）和（1—8）式完全相同。再将（1—24）式代入（1—23）式得：

$$P_1=\{-K_a\ \ 0\}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{K_a} & \dfrac{1}{K_a}\\ \dfrac{1}{K_a} & \dfrac{1}{K_a}+\dfrac{1}{K_b}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_2\\ P_3\end{Bmatrix}=\{-1\ \ -1\}\begin{Bmatrix}P_2\\ P_3\end{Bmatrix} \qquad (1-25)$$

$$=-P_2-P_3$$

其結果与（1—6）式相同。

5．求应力：由已知节点位移求各元素中应力。对等截面弹性杆在受拉情况下，其应力 σ 与应变 ε 和位移 u 的关系，可以根据材料力学的知识很容易得出：

$$\varepsilon=\frac{du}{dx},$$

$$\sigma=E\varepsilon=E\frac{du}{dx} \qquad (1-26)$$

元素 a：

$$\sigma^a=E\frac{du}{dx}=E\frac{u_2-u_1}{L_a}=E\frac{1}{L_a}u_2$$

将（1—24）式中的 u_2 代入：

$$\sigma^a=E\frac{1}{L_a}\frac{P_2+P_3}{K_a}=\frac{E}{L_a}\frac{P_2+P_3}{\dfrac{EA_a}{L_a}}=\frac{P_2+P_3}{A_a} \qquad (1-27)$$

元素 b：

$$\sigma^b=E\frac{u_3-u_2}{L_b}=\frac{E}{L_b}(u_3-u_2).$$

将（u_3-u_2）值代入得：

$$\sigma^b=\frac{E\,P_3}{L_bK_b}=\frac{E}{L_b}\frac{P_3}{\dfrac{EA_b}{L_b}}=\frac{P_3}{A_b} \qquad (1-28)$$

所得 σ^a，σ^b 的結果与（1—9）式完全相同。

§ 1－3　有限元素法的分析步驟和特点

从上节对二連杆系的对比分析中，可以归納出有限元素法分析问题的一般步驟和特点：

1．将构件离散成許多簡单的元素。这些元素通过节点相互連結起来。

2．求出各元素的剛度矩陣：

如前例中元素 a 的剛度矩陣（見（1－13）式）为：

$$[K]^a=\begin{bmatrix} K_a & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{1-29}$$

元素 b 的剛度矩陣（見（1－15）式）为：

$$[K]^b=\begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \tag{1-30}$$

3．求整个結构的总剛度矩陣：

如前例在求总剛度矩陣〔K〕时，不能直接由元素的剛度矩陣（1－29）式和（1－30）式相加而成，因为两种矩陣中的行和列是不协調的。为了解决这个矛盾必須将元素的剛度矩陣的阶数膨脹，使其与集合后的总剛度矩陣的阶数相同。这就需要对那些与該元素无关的节点位移对应的行和列加一些零。于是（1－29）式和（1－30）式变为

$$[K]^a=\begin{bmatrix} K_a & -K_a & 0 \\ -K_a & K_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-29'}$$

式

$$[K]^b=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_b & -K_b \\ 0 & -K_b & K_b \end{bmatrix} \tag{1-30'}$$

将（1－29）′式和（1－30）′式迭加起来，即得总剛度矩陣（見（1－19）式）：

$$[K]=\begin{bmatrix} K_a & -K_a & 0 \\ -K_a & K_a+K_b & -K_b \\ 0 & -K_b & K_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \tag{1-31}$$

从（1—31）式中可以看出整个結构的总剛度矩陣〔K〕有以下一些特点。

(1) 对称性；

(2) 任一行元素之和为零，它反映了平衡条件；

(3) 主对角綫上元素均为正值。这是与物理意义一致的，否則就会出現正 P_i 产生負位移 u_i 的不合理情况；

(4) 总剛度矩陣的行列式为零，它表明 $[K]^{-1}$ 是不存在的，即〔K〕是奇異矩陣。这是因为尙未指定边界位移条件，整个构件系統尙可作剛体运动的緣故。因此要求出问題的解答，必須指定边界位移条件。

上述各条特性，虽然是从一个具体例題中得出的，但是它具有一般性质。

4．求解节点位移和支反力，求节点載荷，并形成載荷列陣 $\{P\}$；将所得 $\{P\}$ 及总剛度矩陣〔K〕代入平衡方程式（見（1—20）式，便有

$$\{P\}=[K]\{\delta\} \qquad (1-32)$$

再将已定边界位移条件代入（1—32）式。即可求解（見（1—21）～（1—25）式）。其实只要将总剛度矩陣中与已定边界位移对应的行和列去掉，就可以直接求逆矩陣，如（1—24）式所示。关于边界条件的确定以及在計算中的处理问題，以后还要再詳細分析。

5．求元素中应力：当节点位移求得后，各元素中的应力則較易求出，如前例中（1—27）式和（1—28）式所示。

第二章 平面应力问题的有限元素法

§2－1 基本概念

一、平面应力状态

平面应力状态是彈性力学中的一种重要的基本应力状态。在航空渦輪噴气发动机上有不少零件也属于平面应力状态，如压气机轉子中的薄盘就是。所以首先介紹平面应力状态的特点。

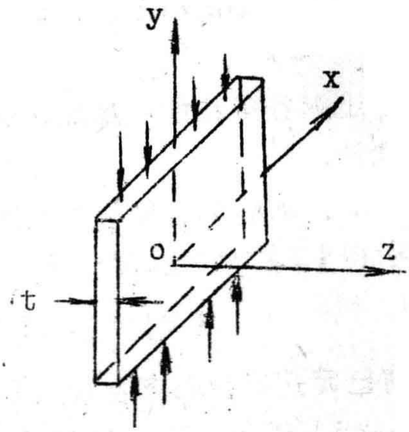


图 2－1

例如考察一块薄板（見图2－1）。假定：(1)板的厚度 t 比其他两个方向的尺寸要小得多，(2)只在板的側面上受到平行于板面的外力作用，且此外力沿着板的厚度方向是均匀分布的。这时，将座标平面 oxy 取在板的中面上，并可忽略应力分量中的正应力 σ_z 及剪应力 τ_{yz}，τ_{zx}，即設

$$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

而正应力 σ_x，σ_y 及剪应力 τ_{xy} 沿板厚方向的变化通常很小，可以認为它們与座标 z 无关，只是座标 x，y 的函数。这样，我們就可以只在平行于板面的 oxy 平面上考虑应力分布的状况，即为彈性力学中的平面问題（也称二維问題）。于是沿 x，y 方向的位移分量 u，v，只是 x，y 的函数：

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y) \qquad (2-1)$$

三个应变量为（具体推导过程見彈性力学基础）：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x},\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y},\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\} \qquad (2-2)$$

应力与应变的关系：

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_x-\varepsilon_{x_0})+\mu(\varepsilon_y-\varepsilon_{y_0})\right]$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\mu(\varepsilon_x-\varepsilon_{x_0})+(\varepsilon_y-\varepsilon_{y_0})\right] \tag{2-3}$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}$$

記

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{2-4}$$

則（2—3）可以写成矩陣形式：

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}) \tag{2-5}$$

式中 $\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$，$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\ \varepsilon_{y_0}\\ \gamma_{xy_0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha T\\ \alpha T\\ 0\end{Bmatrix}$，而$\{\varepsilon_0\}$称为初应变，也称热应变。$\alpha$ 为材料的綫膨脹系数，T 为温度的增加量，在各同向性材料中，因綫膨脹在各向相同，則不产生任何剪应变，所以 $\gamma_{xy_0}=0$。E 及 μ 为材料的弹性模数及泊桑比系数。

二、平面应力问题的有限元素法概念

用有限元素法来解平面应力分析问题，不仅本身具有实际意义，而且还带有一定的典型性，通过它可以看到对一般的連续体进行应力分析时使用有限元素法的过程，这个方法的优点以及在使用中应注意的问题。

对平面应力问题用有限元素法来解的思路，与前章介紹的方法大致相同。

首先对平面弹性連续体离散化：将弹性連续体用綫或面分成許多互不重迭的有限个元素，元素常取为三角形（也可以取为四边形），

限
(4)

如图2－2所示。为了便于利用前章介紹的有限元素法求解，从力学的角度作如下的假設：

(1) 每个元素的頂点即为节点；相邻的元素只在节点上連接（鉸接），于是元素間的相互作用力只能通过节点傳遞；

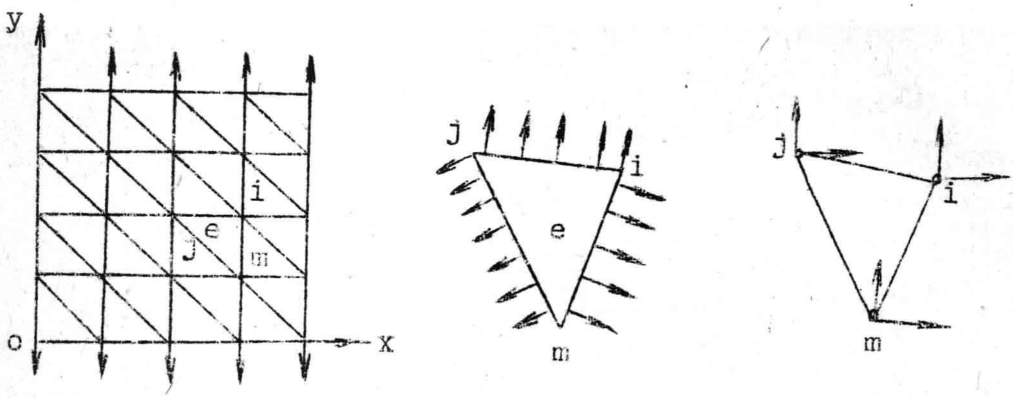


图 2－2

(2) 元素周边的作用力由节点上的集中作用力（即节点力）来代替。于是每个元素所受的外力作用有两部份，一为元素周圍节点作用在元素上的所謂节点力。另一是作用在元素上的外載荷，这些外載荷也都需要移置为节点集中載荷，即称等效节点載荷。

(3) 每个元素的位移状态（即应变状态）由节点的位移唯一确定（至于如何确定，在基本公式推导中介紹）。并取各节点位移为问题的基本待求未知数。

通过上述各条假設的处理，就把一个平面弹性連续体离散成为由很多个有限大小的三角形元素仅在其节点相連的結构物，这样就与上章介紹的杆系问题很相似了，可以沿用其思路和步驟对平面应力问题进行分析。

§2－2 元素的划分

将平面弹性連续体的整个求解区域划分为有限个元素，元素通常取为三角形（也可以取四边形），如图2－3所示。这种划分要一直进行到区域的边界上（图中只画出了一部分三角形元素）。当边界是直綫段时，就可取为三角形元素的一边；当边界是曲綫时，在每一小段上用相应的直綫近似地代替曲綫而作为三角形元素的一边。

用三角形元素来划分网格时，要注意下列各点：

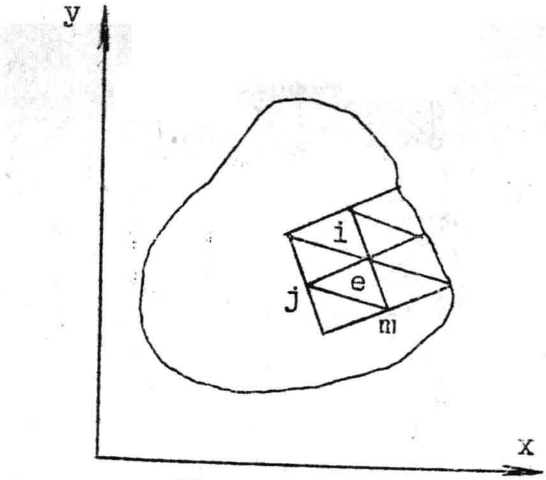
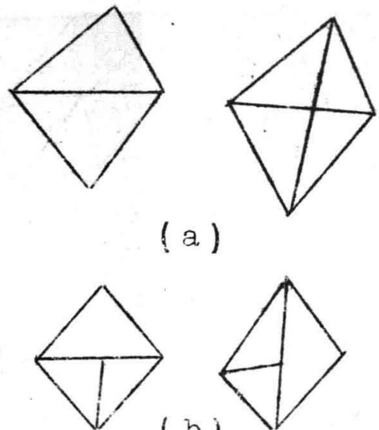


图 2－3



(a)

(b)

图 2－4

(1) 任一三角形元素的頂点必須同时也是其相邻三角形元素的頂点，而不能是其相邻三角形元素边的內点，如图2－4所示，(a)为正确的。

(2) 使每个三角形元素的三个边长（或三个頂角）之間不要悬殊太大，否則，在計算中会出現过大的誤差。于是对同样的四个頂点采取不同划分，則可能得出两个三角形元素均属銳角三角形，或均属鈍三角形，如图2－5所示。我們应該采用(a)划分方式。

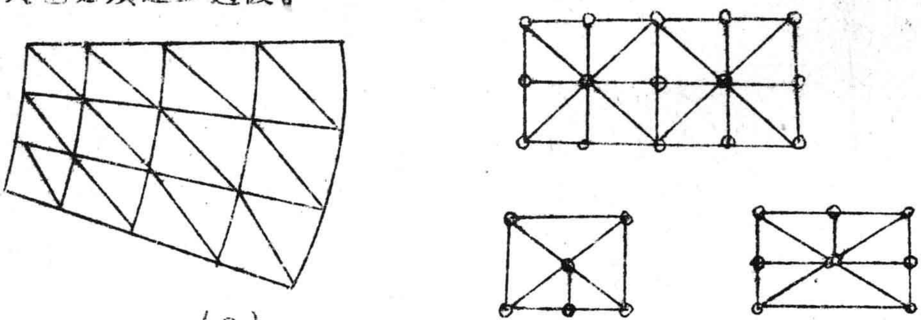
(3) 应尽可能使网格綫具有某种规則形式，使每个內节点为六个三角形的共同頂点，并且六个內角大小不要相差太悬殊，如图2－6中(a)所示。

(a) (b)

图 2－5

(4) 为了既保証計算的精确度又适当节約計算的工作量，应根据被求零件的形状、載荷分布和边界条件作大致分析，在其应力集中、应力变化梯度較大的地方，元素的划分要尽量的細些；而在应力变化梯度較小的地方，元素可以取得大些。为了符合第(2)条要求，元素由

小到大也必须逐步过渡。



(a)　　　　　　(b)

图 2－6

按上述要求划分后，要将所有元素及节点按一定顺序編号，以便进行討論和計算。編号的次序不影响計算的結果，原則上是可以任意的。但是从压縮机器存儲量、减輕計算工作量及簡化程序的角度，就必須提出一定的要求，其內容詳見第五章的分析說明。

§2－3　基本方程的推导

一、位移函数（单元位移場）及解答的收歛性

将一个連续体划分成有限个单元之后，可以求出各結点的位移值（u，v），进而求得各单元的应变、应力。但以后我們将会看到，无論在建立以結点位移表达平衡方程的过程，还是以結点位移求解应变、应力的过程，都不能单凭弹性体內有限个結点的位移值，而必須知道其中任一点（x，y）的位移u（x，y）、v（x，y）。即必須知道彈性体的位移場。因为在上述的过程中，不可逾越彈性力学中的一个基本方程—— 表达位移和应变之間关系的几何方程（2—2），其矩陣形式为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{Bmatrix} \tag{2-2}$$

这就是說，只有当u（x，y）、v（x，y）是一个連续、可导的函数时，方可由它們求出应变｛ε｝来。问题的困难在于我們往往不能用解析形