信号和线性系统

上海市电气成套自动化研究所

1976·2

前　　言

六十年代前后，出现了所谓现代控制理论，处理了昔日经典控制理论无能为力的问题，控制理论的面目为之一新。在这时期，计算机技术又与之并行发展。现代控制理论采纳了多种数学工具，使计算机能更有效地解算系统和网络问题。近十余年来，书刊上发表的大量有关现代控制的论文，广泛采用这些数学工具和有关基本技术，致使尚未掌握这些知识的读者，往往无从卒读。

为解除这种障碍起见，我们选择并翻译了盖柏尔和罗伯兹合著的《信号和线性系统》（Robert A. Gabe and Richard A. Roberts : Signals and Linear Systems）一书，以供从事控制工程的读者参考。

原书系1973年在美国出版，全书约400余页，对信号和线性系统中的一些主题比较充分论及，而举例较多，尤为特点。

在材料组织方面，既考虑到适当水平，又慎重地突出重点，特别是，关于断续时间系统材料的处理，以前的书籍大都叙述过于离散，甚或导向若干特定类型的系统，而且只按主题次序堆积布排，以致读者难以跟踪。原著基本上扫除上述缺陷。

在具体内容方面，全书分为二大部分，第一部分以《时间域方法》为题：从复习经典理论开始；然后涉及卷乘，阐明连续时间系统与断续时间系统理论的差别与同一；详论态变量理论。第二部分题名《变换域方法》：以不同于习见的角度分别讨论常用

的变换，虽为技术人员着眼而写作，在一定程度上并未失去数学的严肃性。原书基本上已包罗控制理论的一些主要数学工具和理论基础，然而按今日的需要亦有残缺之处，如关于拓扑、图论等尚未论及，是不足之处。此外，不适我国情况的概予删除或改写；原著有些错误之处亦作了适当的改正。

由于我们学习马克思主义、列宁主义、毛泽东思想不够，外文和专业水平有限，错误之处希望读者批评指正。

《信号和线性系统》翻译小组

1975年7月

第一部分 时间域方法

线性系统

卷 乘

第二部分　变换域方法

Z 变换

福里哀变换

拉普拉斯变换

第一部分　时间域方法

一

线性系统

1.1. 导　论

多少年来，线性系统的研究，是正规大学教育的一个必不可少的部分。线性系统的分析之所以重要，主要因为它有实用价价：尽管物理系统并非都是线性的，但在一定使用范围内，线性模型却是适用的。而且，在分析这类系统时，还有大量的数学理论可供工程师和科学家运用。与此相反，非线性系统的分析主要适用于特定的情况，换言之，每一个非线性系统必须一种一种地加以研究，没有一般的分析方法，也没有一般的解。

使用特定的一类输入信号，或特定的信号表示法，往往能使指定的线性系统变得容易分析。因此，研究线性系统时，自然要研究信号及其性质。在以后的几章中，我们将发现这种研究是卓有成效的。

我们作为工程师，不仅对系统的分析感兴趣，而且也对综合感兴趣。实际上，正是系统的综合和设计才真正是工程的创造部分。可是，象很多创造活动一样，人们必须先学会分析系统，而后才能设计系统。本书主要是致力于分析某些种类的线性系统，虽然如此，但设计与分析是密切相关的，从而也提供了简单的设计基础。

我们可以把系统的分析分为三个方面：

(1) 为有关的物理问题发展一个适当的数学模型。这一部分分析涉及到取得“运动方程”、边界或初始条件、参数值等。在这个过程中，要把判断、经验和实验结合起来，以发展一个适当的模型。在某种意义上说，这个第一步是最困难的。

(2) 在取得了适当的模型之后，就要解获得的方程，以取得各种形式的解。

(3) 根据物理问题解释数学模型的解。希望(1)的发展有足够

的精确性，以便能作出有关物理系统的有意义的解释和预言。

本书的主要注意力是放在上述第二和第三方面。第一步是必不可少的，但似乎是只有在专门的学科内才能更好、更全面地完成。因此，化学工程师要学会写化学反应过程的运动方程，而电气工程师则应会写电路的运动方程。一旦获得模型，人们可以研究各种方法求它的解，并为它提供数学解释的基础。

因为线性模型在工程和科学的各个学科中得到广泛使用，所以这种资料非常有用。我们认为举出各种物理问题的例子是说明这一事实的最好方法。对该种方法唯一的阻碍，是读者有时候可能不具有完成第一步分析，即写出运动方程所必要的基础。这一问题是可以预料得到的。对熟悉该专门学科的人来说，第一步是可以迎刃而解的。用不着进一步辩解，我们将举出很多领域中的物理实例，而不是为一个系统的运动方程的推导创造全面的基础。

本书作了一些总结工作，汇集了用以分析各种物理现象的方法和概念。这一集成工作很有用处，是令人满意的。

1.2. 定　义

我们主要谈线性系统，且不论它固有的物理结构如何。因此，我们时常把线性系统表示为一个具有输入 $x_1(t)$、$x_2(t)$ …… $x_n(t)$ 和输出 $y_1(t)$、$y_2(t)$ …… $y_m(t)$ 的方框，如图1.1所示。输入 $x_i(t)$，$i=1, 2, \cdots, n$ 和输出 $y_j(t)$，$j=1, 2, \cdots, m$ 一般说来都是时间信号，即随时间变化的有关物理变量。暂且让我们集中讨论单一输入和单一输出的线性系统。在第三章中我们将详细讨论多输入输出的系统。

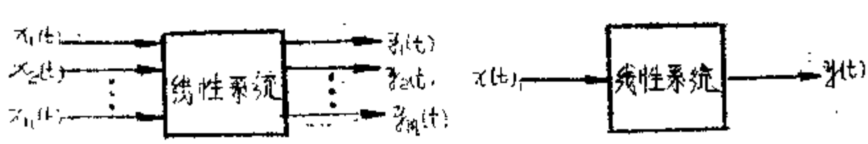

图1.1　线性系统略图

线性系统的定义

线性表示属于非自然关系的特性。这样，我们可以认为，一个线性系统，在某种意义上，就是输出与输入成正比关系的系统。也就是说，如果对于任意常数 α $x(t)$ 产生 $y(t)$，则 $\alpha x(t)$ 产生 $\alpha y(t)$。用符号表示时，假如

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

则 $$\alpha x(t) \rightarrow \alpha y(t) \qquad (1\cdot1)$$

这种性质称作齐次性，为所有线性系统所具有的性质。但是线性系统不仅包括（1·1）的关系，还具有叠加性质。换言之，对某类输入 $\{x(t)\}$ 来说，如果

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

并且 $$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

则 $$x_1(t)+x_2(t) \rightarrow y_1(t)+y_2(t) \qquad (1\cdot2)$$

只要一个系统保持齐次性和叠加性质，就是线性的。我们能使（1·1）及（1·2）结合成一个方程。只要一个系统具有以下关系我们便定义它为线性系统：

$$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t)+\beta y_2(t) \qquad (1\cdot3)$$

这里 α 及 β 为常数。（1·1）-（1·3）的箭头采用机能标志法，表示输入按（1·4）变换为输出：

$$y(t)=H[x(t)] \qquad (1\cdot4)$$

只要 H 是线性变换，即 $H[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha H[x_1(t)]+\beta H[x_2(t)]$，（1·4）所表示的系统就是线性的。如果 α 是有理数的话，虽然齐次性的性质可以从叠加性质中推论出来，但数学变换满足叠加关系的要求，却不能满足齐次性的要求。可是，这确乎是反常的例子，物理上是不会发生的。因此，我们将仅用检

验叠加的方法验证输入－输出关系的线性。

例1.1 假设一个系统具有以下线性方程给出的输入输出关系：

$$y(t)=ax(t)+b \qquad (1.5)$$

$x(t)$ 与 $y(t)$ 的关系如图1.2所示。图1.2所表示的是线性系统吗？让我们研究叠加的性质。如果我们施加一个输入 $x_1(t)$，则相应的输出是 $y_1(t)=ax_1(t)+b$。同样，输入 $x_2(t)$ 产生的输出是 $y_2(t)=ax_2(t)+b$。如果我们施加的输入是 $x_1(t)+x_2(t)$，那么得到的输出是 $a(x_1(t)+x_2(t))+b$，它不等于 $(y_1(t)+y_2(t))=a(x_1(t)+x_2(t))+2b$，除非 $b=0$。这样，即使描述 $x(t)$ 及 $y(t)$ 关系的方程是线性方程，图1.2的系统仍不是线性的。这样看来，有了一个由线性方程描述的系统可能还是失望的，因为结果仍旧不能用线性分析的方法来分析这个系统。在1.5节中将说明如何处理这个问题，以便能够把线性分析的方法使用到这种系统上去。

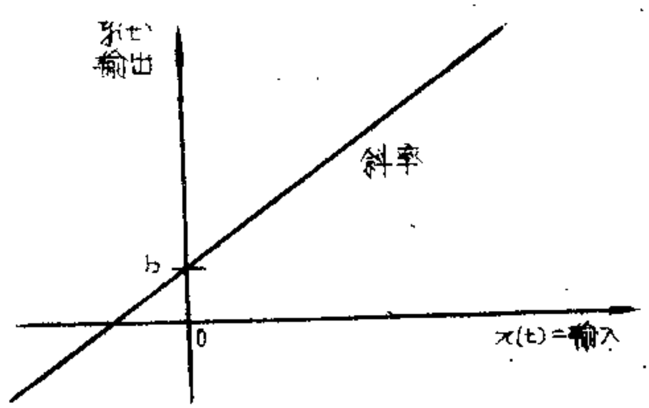

图 1.2

例1.2 让我们研究图1.3给出的电路。假设这个系统中的$x(t)$是输入电压，$y(t)$是输出电压。只要A点上的电压小于3伏，下式就成立：

$$y(t)=x(t)/2 \qquad (1.6)$$

这样，$x_1(t)$产生$y_1(t)=x_1(t)/2$，$x_2(t)$产生$y_2(t)=x_2(t)/2$。这就是说，$(x_1(t)+x_2(t))$产生$y_3(t)=(x_1(t)+x_2(t))/2$，即$y_1(t)+y_2(t)$（倘若$(x_1(t)+x_2(t))<3$）。这样，只要二极管不导通，这个系统就是线性的。这意味着点A的电压必须小于3伏，也就是说，对$\{x(t)\}$这类信号，系统是线性的，但$x(t)$或$x(t)$的任何组合总要小于3伏。如果$\{x(t)\}$这类信号中输入或输入的组合超过3伏，那么这个系统就不是线性的了，要注意，为了明确起见，我们不仅要说明系统，而且还要说明输入信号的种类。通常对后者只是含蓄地加以规定。

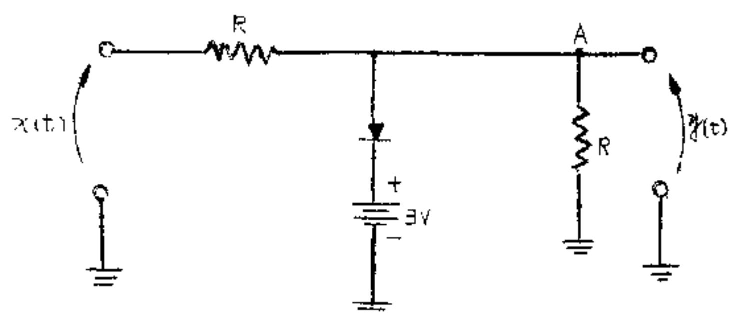

图 1.3

连续时间和断续时间系统

前面已经示意过，我们所感兴趣的是随时间变化的输入和响应。如果一个系统的输入和输出在任何瞬间都能改变，那么我们叫这个系统是连续时间系统。输入$x(t)$和输出$y(t)$是连续时

间变量t的函数。要注意，输入和输出本身不必是连续函数。

另外一些系统，与之有关的信号只是在断续的瞬间改变，例如数字计算机算术运算器的内容，或是来自动物感觉器官的神经冲击。断续的时间间隔可以改变，也可以是恒定的。这一次和下一次的信号值可能不同。信号不一定明确在两个间隔之内，也可能是不变的。这些系统称为断续时间系统。为了表示各个时间间隔内的信号值，我们使用 x_{tk}、x_k 或 $x(k)$ 等标志，可以互换使用。

连续时间系统通常用微分方程作为模型，而断续时间系统却用差分方程作为模型。

例 1.3　图 1.4所示系统的输入值序列由 x_1、x_2、x_3 …表示，由它们变换而来的输出值序列为 y_1、y_2、y_3 …。在时间 $t=k$ 的时候，输出由 $y_k=Gx_k+x_{k-1}$ 给出，G是常数。假设我们有两个输入序列 $\{x_k\}$ 及 $\{x'_k\}$，那么两个相应的输出序列为 $\{y_k\}$ 及 $\{y'_k\}$，这里

$$y_k=Gx_k+x_{k-1}\ ,\quad y'_k=Gx'_k+x'_{k-1}$$

如果输入为 $\{x_k\}+\{x'_k\}$，则输出为：

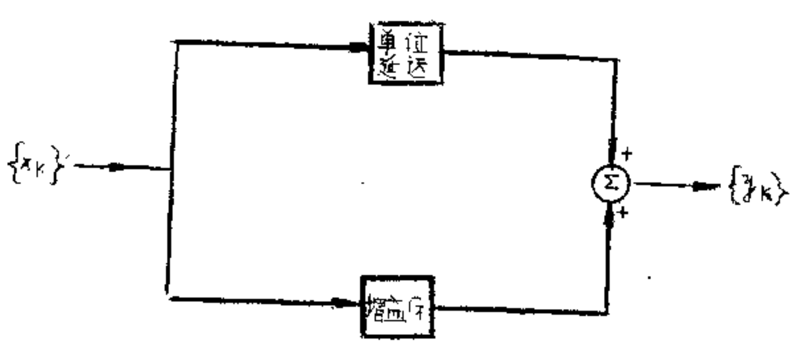

图 1.4

$$G(x_k+x'_k)+(x_{k-1}+x'_{k-1})=Gx_k+x_{k-1}+Gx'_k+x'_{k-1}$$

这样，该系统能满足叠加的要求，因而是线性的。

时不变和时变系统

线性系统这一类，还可以细分为几个小的类别。例如，可分为线性时不变系统和时变系统。系统中的参量随时间变化的，称为时变系统。这种系统常用带有时变系数的线性微分方程或差分方程作为模型。对于这种系统，我们仅简单地加以讨论。时不变或恒定参量系统，常用常系数线性微分方程或差分方程作为模型。

我们可以通过在时间上移动输入信号的方法，来简单地描述时不变系统的特性。假设x(t)产生输出y(t)。现在让我们讨论x(t-T)所产生的输出，也就是说，原来的输入信号滞后了T。如果系统是时不变的，那么x(t-T)产生输出y(t-T)。时不变系统的特性用符号表示如下，如果

$$x(t)\rightarrow y(t)$$

$$x(t-T)\rightarrow y(t-T) \qquad (1\cdot7)$$

那么t及T为任意值。

(1·7)是可以这样断续仿效的：如果

$$x(n)\rightarrow y(n)$$

那么 $$x(n-k)\rightarrow y(n-k) \qquad (1\cdot8)$$

其中n及k为任意值。

方程(1·7)及(1·8)是另一种说法：系统响应与时间原点无关，仅取决于输入形式。

集中参量和分布参量系统

一个物理系统，是许多相互连接的元件所构成的集合体。当我们给一个系统施加一个输入x(t)时，输入激发信号或是同时

达到每一个元件，或是要经过一定的传播时间才能作用于系统内的各种元件。如果输入激发信号立即传播到整个系统，该系统便称为集中参量系统。这种系统用一般的微分方程作为模型。在电系统中，这意味着激发信号的波长大于各元件的波长。

分布参量系统可以用偏微分方程作为模型。在这种系统中，输入激发信号经过非零时间而作用于系统的各个元件，这个时间取决于激发信号在系统中的传播速度，使一种材料扩散遍布于另一种材料的化学系统，就是分布参量系统的一个例子。电能通过传输线的传播是另一种例子。分布参量模型在为生物系统作出模型时也是有效的。例如，研究心电活动能力就包括分布参量系统的分析。

定机和非定机系统

在许多物理系统中，人们常遇到不能控制系统内某些参量的情况；或是在分析一个系统时，系统内的某些参量是由过于复杂的过程产生的，以致于不能完全理解。在这种情况下，有些系统参量值是未知的，或者至少是未确定的。通常我们总想随机地为这种情况作出模型。例如，我们为通过大气的通讯作出模型时，共中引入的干扰或噪音是凭统计而指定的。一个系统具有一个或更多的未知或未确定参量的元件，我们称之为非定机系统。如果系统参量是确切知道的，则称之为定机系统。

记忆系统和无记忆系统

另一种有用的系统区分法涉及到系统对输入激发信号的记忆。如果在任意时间 t 或 t_k 时的输出，仅取决于同一时间的输入，这个系统便称为无记忆系统。如果在时间 t 或 t_k 时的输出取决于某个区间内的输入值，比方说（$t-T$，t），这个系统便具有记忆时间长度 T 的能力。例如，由一个电容器构成的系统，其输入规定为电流，输出规定为电压，它能在无限的持续时间内进行记忆，因为

$$e(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \qquad (1.9)$$

方程(1·9)表示的输出取决于整个区间$(-\infty, t)$内的输入。

与此相反，一个由水管构成的系统是无记忆系统，设其输入为流率$f(t)$，输出为压力$P(t)$。压力$P(t)$ 随时受到流率的影响，并由下式给出：

$$P(t)=Rf(t) \tag{1·10}$$

这里R是水管对水流的阻力。

我们已用不同方式对系统进行了分类：

(1) 线性和非线性系统

(2) 连续时间和断续时间系统

(3) 时不变和时变系统

(4) 集中参量和分布参量系统

(5) 定机和非定机系统

(6) 无记忆和记忆系统

我们引用了这些分类，以便能把用于特殊系统的模型和方法总括起来。了解对指定种类的系统有哪些方法不可使用是很重要的，同样，熟悉那些能使用的方法也是同等重要的。换言之，知道我们学识的界限是很重要的。上述分类使我们能比较方便地说明这种界限。在本书以后的篇幅中我们将主要讨 定 机 、 时 不变、集中参量和线性系统的模型。

1·3 物理系统的模型

为了便于表述多种多样的物理现象，便自然而然地出现了系统的线性模型。我们从不同学科中举出了一些例子，以便说明线性模型可用以描述物理系统。

例1·4 罗伯特·虎克定性地研究了机械弹簧，并实验证明，在有限的范围内弹簧的变形正比于所施加的力F。如果我们用y表示弹簧变形，那么描述弹簧这种情况的模型是：

$$力=k\cdot变形 \tag{1·11}$$

这里k是弹簧的常数特性，方程（1.11）就是虎克定律，只要变形y不大，式（1.11）是很好的一个弹簧模型。如果我们把力F看成是系统的输入，y是输出，那么这个系统的输入－输出方程是：

$$y(F)=F/k \qquad (1.12)$$

把线性的定义应用到（1.12）式，立即可证明这个系统是线性的。如果分别施加F_1及F_2，相应的输出是F_1/k及F_2/k。现在如果我们把输入加起来，并施加到这个系统中去，则输出是$(F_1+F_2)/k$，等于上面求得的两输出之和。这样，这个系就满足了叠加的要求，因而是线性的。

例1.5　有关人口的研究想以过去的增长数据为基础，预言今后的增长。人口当然是断续的，但如果我们着眼于大量的人口，可以把在时间t时的人口P(t)看作是一个连续的变量。如果注意到实验数据表明人口增长率正比于一个限定人口范围的人口总数，就可获得一个最简单的增长模型。这样，如果k是按人口计算的净增长率，那么我们可以写出：

$$\frac{dP(t)}{dt}=kP(t) \text{ 或 } \frac{dP(t)}{dt}-kP(t)=0, \quad t>0 \qquad (1.13)$$

这个简单的模型以线性微分方程的形式，导致一个预言今后人口的模型为：

$$P(t)=P_0e^{kt}, \qquad t\geqslant 0 \qquad (1.14)$$

这里P_0是初始人口。在这个系统中，我们把输出看成是在时间t时的人口。什么是这个系统的输入呢？通常在这类模型中，输入在（1.13）式的右边，在该种情